SCUOLA DI SPECIALIZZAZIONE PER L'INSEGNAMENTO
SECONDARIO DELLA TOSCANA

Sede di Firenze

IX CICLO
I ANNO

INDIRIZZO FISICO MATEMATICO
LABORATORIO INFORMATICO - CABRI

Specializzanda

Elena Lucarelli

ANNO ACCADEMICO 2007/2008

INTRODUZIONE

Quando si considerano solo segmenti o angoli la congruenza, la sovrapponibilità e l'uguaglianza estensiva (o equivalenza) si identificano. Ma per le superfici poligonali? Euclide, considerando il concetto di area come primitivo, fonda la sua teoria dell'equivalenza dei poligoni su alcuni postulati:

- poligoni uguali sono equivalenti
- poligoni equivalenti ad uno stesso sono equivalenti fra loro
- somme di poligoni equivalenti sono equivalenti
- differenze di poligoni equivalenti sono equivalenti
- un poligono non è equivalente ad una sua parte

Ma perché l'uguaglianza di estensione possa essere oggetto di studio rigoroso, è necessaria un'analisi approfondita, che manca in Euclide e fu compiuta soltanto in tempi recenti.
Diversi furono i matematici che si impegnarono a costruire una teoria della equivalenza di poligoni fino a giungere a dimostrare

- Due poligoni equivalenti si dicono equivalenti se sono scomponibili in poligoni rispettivamente congruenti
- L'equivalenza gode della proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva

E da questi derivano i teoremi che ci permettono di stabilire in quali casi due poligoni hanno la stessa area:

- Due parallelogrammi aventi un lato in comune e i lati opposti a questo contenuti in una stessa retta, sono equiscomponibili. Da questo come caso particolare si ha che dato un parellelogramma, è possibile costruire un rettangolo avente la stessa area.
- Dato un triangolo, è possibile costruire un parallelogramma con la stessa area che ha per base la metà della sua base ed uguale altezza. Da cui ovviamente segue che dato un triangolo, è possibile costruire un rettangolo avente la stessa area.
- Dato un poligono, è possibile costruire un poligono equivalente con un lato in meno.
- Dato un poligono convesso, è possibile costruire un rettangolo con la stessa area
- Teorema dello gnomone: dato un rettangolo, è possibile costruire un altro rettangolo con la stessa area e avente un lato assegnato.
- Dato un qualsiasi poligono, è possibile costruire un rettangolo avente la stessa area e con un lato assegnato.

A questo punto useremo le abilità fin qui acquisite sul concetto di equiscomponibilità per verificare i Teroremi di Euclide e il Teorema di Pitagora in modo che gli allievi ne arrivino a capire gli enunciati più chiaramente. Completeremo il discorso sull'equiscomponibilità verificando che, grazie ai teoremi di Euclide, è possibile costruire un quadrato che ha la stessa area di un rettangolo dato.

CLASSE DI RIFERIMENTO

2° ANNO DI UN QALSIASI ISTITUTO DI SCUOLA SECONDARIA DI SECONDO GRADO

Prerequisiti

- Elementi di geometria piana: assiomi, definizioni relative a segmenti, angoli, rette.
- Principali caratteristiche di triangoli e quadrilateri.
- Criteri di congruenza dei triangoli.
- Teoremi di Euclide
- Conoscenza base del software Cabrì.

OBIETTIVI

- equiscomponibilità ed equivalenza
- equivalenza di parallelogrammi
- equivalenza di un triangolo e di un parallelogrammo
- mostrare un esempio di come l'equiscomponibilità aiuta nel visualizzare e a comprendere gli enunciati dei teoremi. Costruzione con Cabrì dell'enunciato dei teoremi di Euclide e loro verifica.

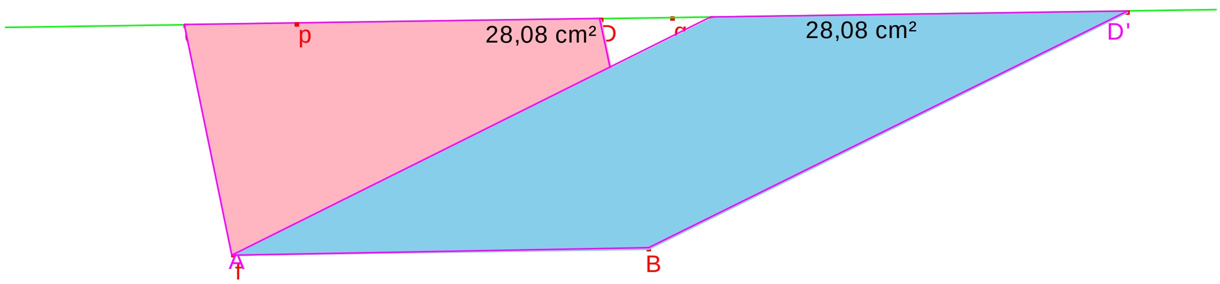
Il percorso che segue ci permette di osservare che ogni poligono può essere equiscomposto con un rettangolo equivalente al poligono dato e con un lato assegnato.

PRIMO RISULTATO

Due parallelogrammi aventi un lato in comune e i lati opposti a questo contenuti in una stessa retta, sono equiscomponibili. Da questo come caso particolare si ha che dato un parellelogramma, è possibile costruire un rettangolo avente la stessa area.

COSTRUZIONE

1. Traccia una *retta r*.
2. Prendi due punti, A e B, su di essa.
3. Prendi un punto C non appartenente ad r.
4. Traccia una retta parallela ad r, s, e passante per C.
5. Disegna una circonferenza di centro C e raggio AB.
6. Prendi l’intersezione fra la circonferenza e la retta r, nomina D il punto di intersezione.
7. Disegna il poligono ABCD
8. Prendi un punto C’ sulla retta s.
9. Disegna una circonferenza di centro C’ e raggio AB.
10. Chiama D’ l’intersezione fra quest’ultima circonferenza e la retta s.
11. Disegna il poligono ABC’D’.
12. Misura l’area dei due poligoni.



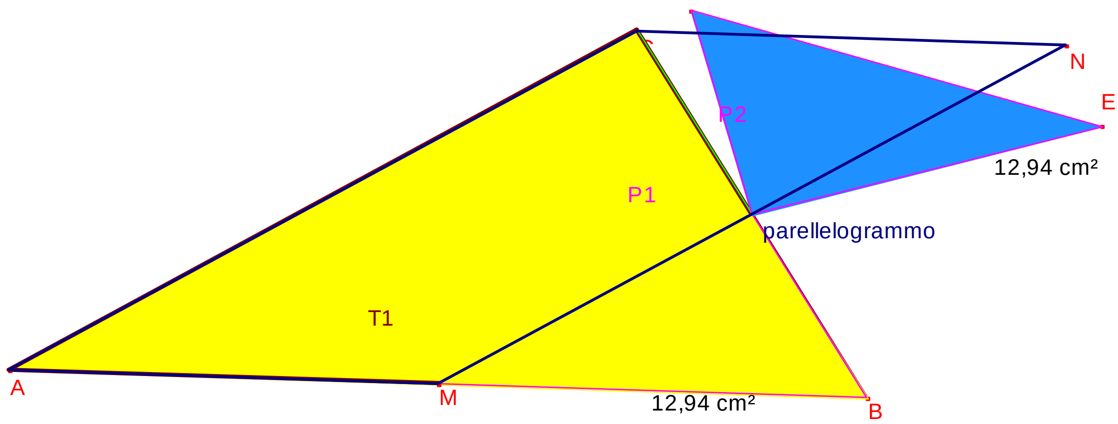
SECONDO RISULTATO

Dato un triangolo, è possibile costruire un parallelogramma con la stessa area.

COSTRUZIONE

1. Disegna un triangolo ABC
2. Disegna il punto medio M del lato AB
3. Traccia la retta r parallela al lato AC e passante per M
4. Traccia la retta s parallela al lato AB e passante per C
5. Disegna l’intersezione delle rette r ed s e chiamalo N
6. Disegna l’intersezione P tra il lato BC e la retta r.

7. Traccia i segmenti PC, PN, NC, BP,BM,MP.
8. Disegna il triangolo BPM
9. Disegna il triangolo PNM
10. Con la funzione compasso disegna una circonferenza x di centro P e raggio NP.
11. Con la funzione “Punto su oggetto” disegna un punto coincidente con N.
12. Con la funzione compasso disegna una circonferenza y di centro M e raggio MP
13. Con la funzione compasso disegna una circonferenza z di centro P e raggio PC
14. Con la funzione “Intersezione di due oggetti” trova l’intersezione Q fra la circonferenza y e la circonferenza z.
15. Disegna il poligono PQE



Puoi a questo punto osservare che da questi due risultati discende il terzo passo del nostro percorso

TERZO RISULTATO

Dato un triangolo, è possibile costruire un rettangolo avente la stessa area

Siamo ora in grado di fare un altro passo

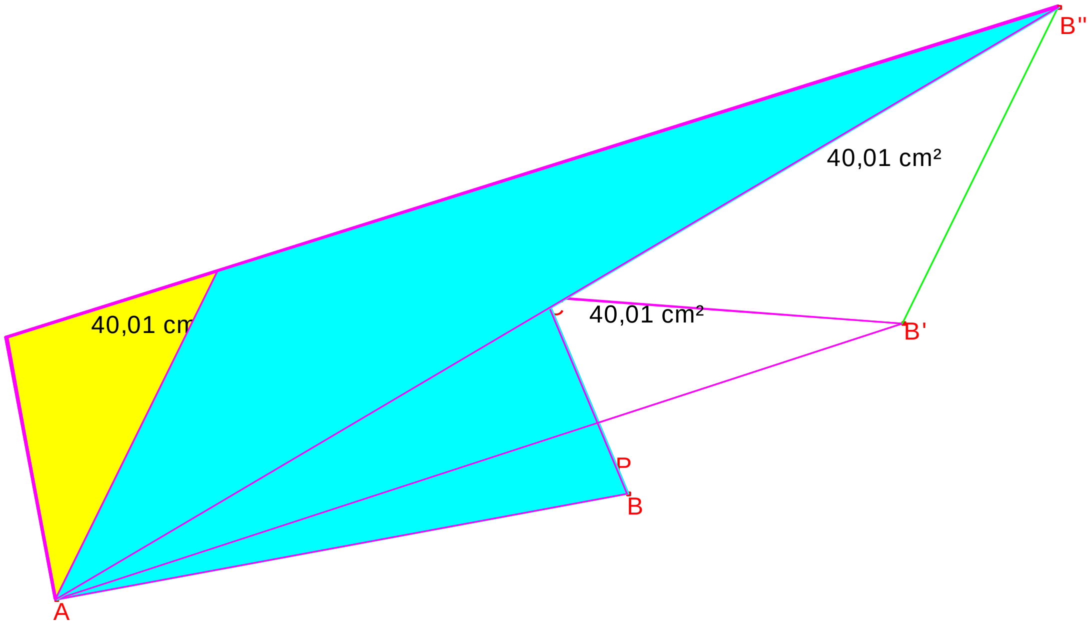
QUARTO RISULTATO

Dato un poligono, è possibile costruirne un altro equivalente con un lato in meno di quello di partenza. Facciamo la costruzione per un pentagono qualsiasi, ma puoi provare per esercizio a fare gli stessi passi per un poligono di un numero qualsiasi di lati.

COSTRUZIONE

1. Costruisci il poligono ABCDE
2. Traccia la diagonale AC
3. Traccia la retta r parallela ad AC e passante per B
4. Chiama B’ il punto di intersezione tra la retta DC e la retta r
5. Traccia il segmento AB’

6. Osserva che i triangoli ABC e AB’C sono equivalenti, perché hanno la stessa base AC e altezza congruenti
7. Ripeti il procedimento partendo tracciando la diagonale AD.
8. Ottieni il triangolo AB’’E equiscomponibile al pentagono ABCDE



Siamo pronti per il **TEOREMA DELLO GNOMONE**

Il termine”gnomone” in greco, significa “colui che fa conoscere”. Un palo conficcato perpendicolarmente ad un piano orizzontale serviva a far conoscere l’ora del giorno in base alla direzione della sua ombra; per questo veniva detto “gnomone”. Questa figura non è altro che una squadra, ossia uno strumento che “fa conoscere” la perpendicolare.

COSTRUZIONE

1. Costruisci il rettangolo ABCD
2. Sul prolungamento del lato AB fissa un punto E
3. Traccia la retta r perpendicolare ad AE passante per E
4. Traccia la retta s perpendicolare ad AE passante per B
5. Traccia il segmento CE
6. Traccia la retta t per D parallela a CE
7. Chiama F il punto di intersezione la retta t e la retta r
8. Traccia la retta u per A parallela a CE
9. Chiama G il punto di intersezione tra u e s
10. Hai ottenuto così un altro rettangolo BEFG.

- Verifica che BEFG è un rettangolo; per fare questo puoi:
  1. tracciare la retta passante per G e perpendicolare a GB; essa passa anche per………..
  2. misurare l’angolo BGF, esso misura:…………

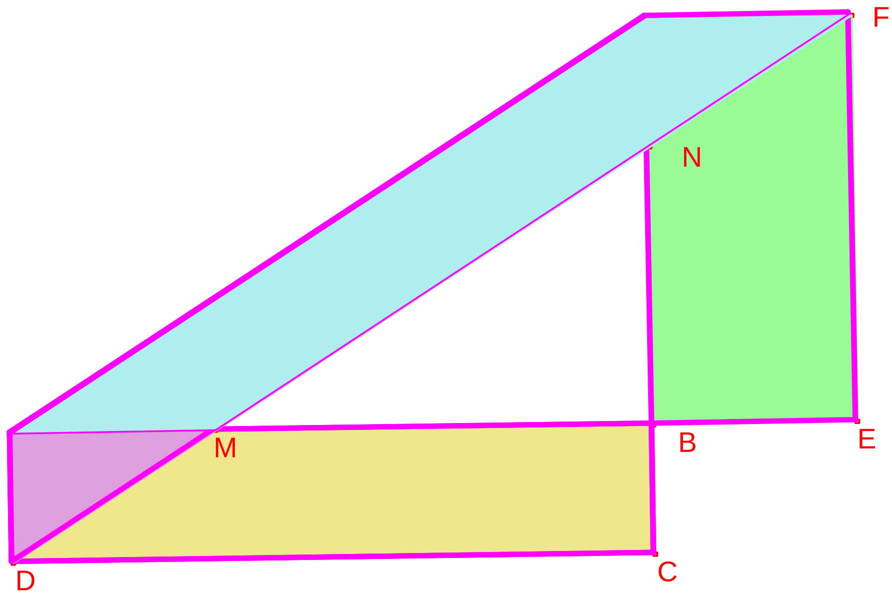
- Verifica che il triangolo BEFG è equiscomponibile con il rettangolo di partenza ABCD. Poiché due figure equiscomponibili hanno la stessa area, per far questo puoi misurare l'area dei due rettangoli.
- Muovi il punto E sulla retta AB e verifica che la costruzione funzioni e che l'area sia sempre uguale.
- Considera adesso il luogo dei punti di F al variare di E cerca di capire cosa è.

   1. Ottieni una curva nota?
      ……………………………………………………………

   2. Che tipo di proporzionalità esiste tra la base e l'altezza de rettangoli che hanno la stessa area?

      ……………………………………………………………………..
   3. Detta x la misura di BE, y quella di FE e k quella dell'area (costante) dei rettangoli, quale formula permette di ricavare l'equazione del luogo trovato?

      ………………………………………………………………………



Con questo ultimo risultato abbiamo visto come da un poligono qualsiasi posso ottenere un rettangolo equiscomponibile di lato assegnato.

Alcune applicazioni dei risultati ottenuti

AREA DEL TRAPEZIO
Il trapezio ha l'area equivalente di un triangolo avente come base la somma delle basi del trapezio e come altezza l'altezza del trapezio.

Dimostrazione
1. Costruisci un trapezio ABCD di basi AB e CD
2. Prendi il punto medio M di BC.
3. Traccia la retta per MD
4. Traccia la retta per AB
5. Chiama E il punto di intersezione tra le due rette
6. Disegna il triangolo AED
   - Verifica che l'area di ADE è equivalente all'area del trapezio ABCD
   - Cosa accade se C coincide con D?

……………………………………………………………………………………………………

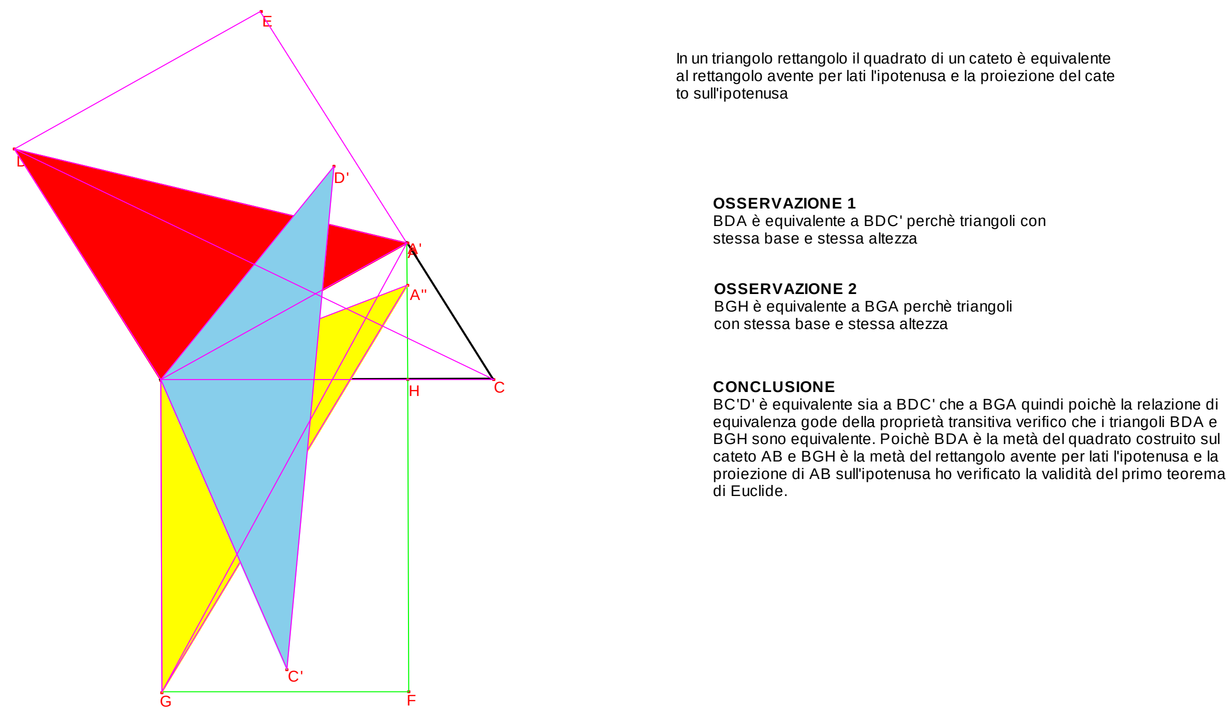
……………………………………………………………………………………………………

   - Verifica che ottieni lo stesso risultato se la base maggiore è CD anziché AB
   - Movendo B spiega cosa accade se coincide con A.

PRIMO TEOREMA DI EUCLIDE
In un triangolo rettangolo il quadrato di un cateto è equivalente al rettangolo avente per lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa

1) Disegna il segmento BC
2) Disegna il punto medio M di BC
3) Costruisci la circonferenza di centro M e raggio
4) Fissa un punto A della circonferenza
5) Traccia i segmenti AB e AC
6) Costruisci il quadrato ABDE
7) Fissa il punto A' sul segmento AC
8) Disegnail triangolo BDA'
9) Traccia la *Retta perpendicolare* per B a BC
10) Traccia la *Retta perpendicolare* per A a BC
11) Disegna la circonferenza di centro B e passante per C
12) Fai clic sull'icona *Punti* e seleziona lo strumento *Punto*
13) Chiama G il punto d'intersezione tra la circonferenza appena costruita e la perpendicolare in B a BC, nel semipiano opposto di A rispetto a BC
14) Disegna la perpendicolare in G a BG
15) Chiama H il punto di intersezione di BC con la perpendicolare per A a BC
16) Chiama F il punto d'intersezione della retta AH con la perpendicolare in G a BG
17) Disegna il segmento GF
18) Disegna il segmento FH
19) Disegna il segmento HA
20) Fissa un punto A" sul segmento AH
21) Disegna il triangolo BGA"

22) Disegna la circonferenza di centro B e passante per D
23) Fissa un punto sull'arco minore AD della circonferenza appena costruita
24) Seleziona lo strumento *Arco* clicca sul punto D, sul punto fissato sull'arco minore AD e sul punto A, disegnando l'arco AD
25) Fissa un punto a piacere dell'arco BD e chiamalo D'.
26) Costruisci la circonferenza di centro D' e raggio uguale a DC
27) Disegna il punto C', intersezione della circonferenza appena costruita con il minore dei due archi CG della circonferenza di centro B passante per C
28) Disegna il triangolo BD'C'
29) Disegna il triangolo ABG
30) Disegna il triangolo DBC



OSSERVAZIONE 1
BDA è equivalente a BDC' perchè triangoli con stessa base e stessa altezza

OSSERVAZIONE 2
BGH è equivalente a BGA perchè triangoli con stessa base e stessa altezza

CONCLUSIONE
BC'D' è equivalente sia a BDC' che a BGA quindi poichè la relazione di equivalenza gode della proprietà transitiva verifico che i triangoli BDA e BGH sono equivalente. Poichè BDA è la metà del quadrato costruito sul cateto AB e BGH è la metà del rettangolo avente per lati l'ipotenusa e la proiezione di AB sull'ipotenusa ho verificato la validità del primo teorema di Euclide.

TEOREMA DI PITAGORA

Qual è l’enunciato del teorema di Pitagora?

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Descrivi una costruzione che verifichi il teorema di Pitagora.
Quali risultati appena visti puoi usare?

……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..

SECONDO TEOREMA DI EUCLIDE

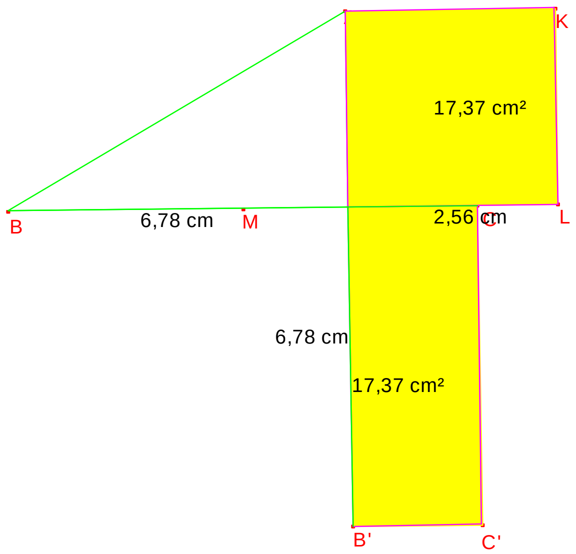
In un triangolo rettangolo il quadrato dell’altezza relativa all’ipotenusa è equivalente al rettangolo delle proiezioni dei cateti sull’ipotenusa .

Faremo una controllo di questo teorema basato sulla misura delle aree, anziché sull'equidecomponibilità utilizzata per le precedenti verifiche.

1) Disegnare il segmento BC
2) Disegna il Punto medio M del segmento BC
3) Disegnare la circonferenza di diametro BC e centro M
4) Fissa un punto A della circonferenza di diametro BC appena costruita
5) Traccia la *Retta perpendicolare* per A a BC
6) Chiama H intersezione di BC con la perpendicolare per A a BC
7) Disegna la circonferenza di centro H e passante per B
8) Fissa un punto B', intersezione della circonferenza appena costruita con la retta AH, e situato nel semipiano di origine BC che non contiene A
9) Traccia la *Retta perpendicolare* per B' a AH
10) Disegna la perpendicolare per C a BC
11) Chiama C' l’intersezione delle due rette appena costruite
12) Disegna il poligono HB'C'C
13) Disegnare il segmento AH
14) Disegna il quadrato AHKL
15) *Misura* le aree del rettangolo HB'C'C e del quadrato HKLA,

Trascinando il punto A, vedrai modificarsi il quadrato e il rettangolo, e le rispettive aree, che però restano sempre tra loro uguali tra loro.

In un triangolo rettangolo il quadrato dell'alt ezza rekativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo delle proiezioni dei cateti sull'ipo tenusa



IL CONCETTO DI QUADRATURA

Riuscire a quadrare il cerchio è stato un chiodo fisso dei matematici dai tempi di Anassagora (500-420 a.C.) sino al 1882, quando Ferdinand Lindemann (1852-1939) dimostrò definitivamente l'impossibilità del problema. Questo non ci ha comunque lasciato a bocca asciutta perché, come avremo modo di vedere, i tentativi di quadrare il cerchio hanno dato origine non solo alle moderne formule per calcolarne l'area, ma anche a quello che oggi chiamiamo calcolo infinitesimale.
È d'obbligo, prima d'iniziare le nostre considerazioni sul lavoro degli antichi, chiarire il concetto di «quadratura». «Quadrare una figura», così come era inteso dagli antichi, significa costruire un quadrato di area uguale a quella della figura piana considerata. Se ciò è realmente possibile, allora si dice che la figura è «quadrabile».
Il problema delle quadrature nacque in Grecia nel V secolo a.C., durante l'età d'oro di Atene e delle altre Polis greche. Gli antichi ellenici erano affascinati dalla simmetria e dalla perfezione della semplicità; in particolare si stupivano di come fosse possibile che «il semplice generasse il complesso, il quale poi potesse essere riportato al semplice». Questa «ricerca della semplicità e dell'essenziale», che si ritrova sempre in fondo anche alle teorie più difficili da comprendere, sta all'origine del nostro problema. In effetti, le quadrature appaiono come tentativi di trasformare figure anche complesse in altre vieppiù semplici, sino a giungere alla figura semplice e perfetta per eccellenza: il quadrato. Semplicità, dunque, ma anche precisione. Tutto ciò può essere riassunto dalla concezione di «costruzione». Questo termine descriveva non solo un mero procedimento matematico, ma anche uno stile di lavoro. Per costruire una figura potevano essere usati solo (semplicità) una riga non graduata ed un compasso, erano vietati altri strumenti. Non bisogna però confondere la semplicità con l'imprecisione: i matematici greci erano divenuti talmente abili con i loro strumenti da aver raggiunto traguardi eccezionali. Per esempio, alcuni riuscivano a quadrare qualsiasi poligono seppur contorto o irregolare, mentre altri si cimentavano in rappresentazioni al limite delle possibilità grafiche. La sfida più grande era comunque sempre la quadratura del cerchio. Molti tentarono, ma invano; di alcuni, come Ippocrate di Chio, Euclide e Archimede, ci sono giunte opere che racchiudono i loro studi,

di altri non sappiamo nulla, se non che hanno affrontato la questione. Molte, infine, sono le notizie di risultati positivi che però celano grossolani errori o imprecisioni, forse dovute ai trascrittori medioevali, lungi dall'essere alla pari degli autori dei libri che copiavano. Per quadrare le figure gli antichi greci lavoravano per "gradini": passavano dalla figura più complessa ad una più semplice utilizzando metodi fissi e dimostrati (come abbiamo appena fatto noi). Così iniziarono col quadrare il rettangolo, poi il triangolo e poi il poligono generico; e ogni quadratura faceva riferimento a quella precedente. Ad esempio, per quadrare un triangolo si costruiva un rettangolo avente la stessa area, per poi costruire il quadrato; per quadrare un poligono lo si divideva il triangoli che venivano quadrati separatamente, per poi sommare le aree ottenute in un unico quadrato; e così via.

QUADRATURA DEL RETTANGOLO

Dato un rettangolo è possibile costruire un quadrato con la stessa area.

Costruzione

1. Disegna il rettangolo ABCD (AD>AB)
2. Trova un punto E sul segmente AD di lunghezza uguale ad AB
3. Disegna il punto medio M di AD
4. Traccia una semicirconferenza di diametro AD (nel semipiano definito da AD che non contiene il rettangolo)
5. Traccia la retta per E parallela ad AB
6. Chiama F il punto di intersezione della retta con la semicirconferenza
7. Costruisci il quadrato di lato AF

Osserva che l'area del quadrato così costruito è uguale all'area del rettangolo ABCD