S.S.I.S. - Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario della Toscana

Sede di Firenze

Laboratorio di didattica

Calcolo combinatorio

Maria Rita Lungo

Anno accademico 2007/2008

PERCORSO DIDATTICO: Calcolo combinatorio.

DESTINATARI: Studenti del biennio della scuola secondaria superiore, oppure studenti del triennio della scuola secondaria superiore (naturalmente con metodologie didattiche diverse).

PREREQUISITI: Per la comprensione degli argomenti trattati in questo percorso didattico, non sono richiesti particolari prerequisiti: agli studenti del biennio è richiesta la conoscenza dell'algebra di base; a quelli del triennio è richiesta anche la conoscenza delle definizioni di cardinalità di un insieme, applicazioni tra insiemi, iniettività, suriettività, biettività.

OBIETTIVI DIDATTICI: Dal punto di vista nozionistico, l'obiettivo di questo percorso è quello di far comprendere agli studenti in modo rapido e piacevole le regole del calcolo combinatorio, ma è anche quello appassionarli all'argomento, in modo da condurli a definire, da soli, i concetti di combinazioni e disposizioni con e senza ripetizioni e le relative formule per calcolarle. Tuttavia, l'obiettivo principale che mi sono prefissata è quello di abituare gli studenti ad affrontare un certo tipo di problemi di varia natura avvalendosi di modelli matematici adatti alla loro rappresentazione.

APPROCCIO METODOLOGICO:

- **Per gli studenti del biennio**: si prediligeranno discussioni (guidate dall'insegnante) e lavori di gruppo. Queste tecniche, infatti, facilitando lo scambio di idee ed esperienze inducono, secondo me un maggiore coinvolgimento ed una conseguente maggiore assunzione di impegno da parte degli studenti. Quindi gli argomenti oggetto delle lezioni saranno introdotti dapprima da un punto di vista intuitivo, utilizzando svariati esempi e, solo successivamente mediante formalizzazione matematica. In questo modo si vuole rendere la trattazione degli argomenti quanto più semplice possibile, senza tuttavia trascurare la correttezza logica e terminologica.

- **Per gli studenti del triennio**: a quelle classi che hanno già studiato l'argomento nel primo biennio, basterà riproporre l'impianto teorico da un punto di vista formale e sottoporre esercizi di vario livello. Eventualmente si possono gettare le basi per l'applicazione al calcolo delle probabilità degli elementi di calcolo combinatorio.

  Alle classi, invece, che affrontano l'argomento per la prima volta si può proporre un lavoro simile a quello descritto per il biennio, adattato però alla differente età media degli studenti e quindi lavorando ad un livello di astrazione più alto ed eventualmente proponendo anche le dimostrazioni delle formule introdotte.

TEMPI PREVISTI:

- **Per gli studenti del biennio**: circa 12 ore così distribuite: 6 ore di lezione frontale/discussione guidata; 2 ore per la scheda di lavoro guidato; 2 ore di attività di laboratorio di informatica; 2 ore per la verifica (sommativa).

- **Per gli studenti del triennio**: è possibile introdurre concetti (quasi sicuramente già noti) e formule in circa 2 ore di lezione frontale; 2 ore per la scheda di lavoro guidato; 2 ore di attività di laboratorio di informatica; 2 ore per la verifica (sommativa). Agli studenti dell'ultimo anno del liceo scientifico è consigliabile presentare i diversi quesiti della seconda prova scritta in cui è richiesta la conoscenza del calcolo combinatorio.

1 Disposizioni

Tratto dal blog di un ragazzo un po' nostalgico:

Sono cresciuto a suon di cucciolone Eldorado (non ancora Algida). Mia nonna, quando mi comportavo bene, mi chiedeva se volevo il gelato: era sempre il cucciolone. [...] Ed è così che il cucciolone ha costituito la mia formazione letteraria infantile.

Il cucciolone aveva ed ha tutt'ora, la simpatica particolarità di riportare una vignetta illustrata in ognuno dei due lati. Con 800 lire mi compravo un gelato e ben due vignette e tornavo a casa per divorare entrambe le caratteristiche. [...] Ci fu un giorno in cui scoprii che il mondo non era perfetto e che l'umanità nonostante sapesse coniugare zabaione, vaniglia e cacao tra due biscottoni al malto, commetteva di tanto in tanto dei madornali errori: a volte entrambi i lati riportavano la stessa vignetta...

"Ma come poteva essere?", mi chiedevo, "I grandi non lo vedono che sono uguali? Non sarà che i grandi non sono poi così svegli come li si dipinge?" Insomma, già a cinque anni con un "cucciolone epistemologico" in mano mi venivano i primi sospetti su come funzionava il mondo...

Per capire se e quanto "i grandi" sono meno svegli di quello che si crede, ci chiediamo in quanti possibili modi si possono scegliere due vignette *diverse* da un insieme assegnato V. Per rispondere a questa domanda, procediamo per gradi.

In primo luogo vediamo quante coppie di vignette possiamo formare con due sole vignette a disposizione, diciamole V_1 e V_2: è evidente che abbiamo due sole possibilità

$$V_1 V_2 \qquad V_2 V_1.$$

In generale qualunque siano i due elementi considerati, possiamo sempre disporli a coppie in due soli modi diversi. Si può formalizzare questa osservazione dicendo che le *disposizioni* di due elementi *a due a due* sono due e scrivendo:

$$D_{2,2} = 2$$

dove la D sta per disposizioni; il primo pedice per ricordare che stiamo scegliendo tra due elementi ed il secondo per ricordare che stiamo contando il numero di raggruppamenti a due a due.

Supponiamo ora di possedere invece tre vignette: V_1, V_2 e V_3; vogliamo determinare le coppie di elementi diversi che si possono formare a partire da tre elementi. E' chiaro che, nel caso delle vignette, queste coppie si ottengono unendo ciascuna vignetta con una delle rimanenti due. Facendo una rappresentazione ad albero della situazione, si ha:

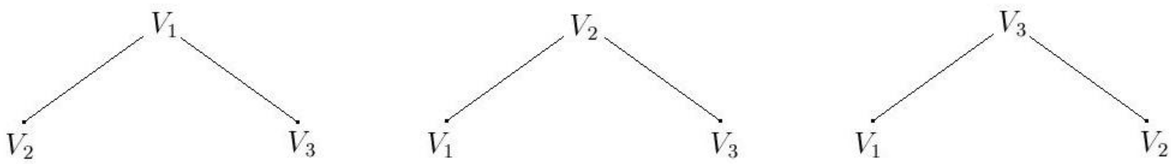

Figura 1: Disposizioni di tre elementi a due a due

questa rappresentazione equivale all'altra che abbiamo usato nel caso di due sole vignette:

$$\begin{array}{ccc} V_1V_2 & V_2V_3 & V_3V_1 \\ V_1V_3 & V_2V_1 & V_3V_2 \end{array}$$

Abbiamo così ottenuto le disposizioni di tre elementi a due a due; esse (con le stesse notazioni di prima) sono in numero di:

$$D_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6.$$

E se partiamo da quattro vignette (V_1, V_2, V_3 e V_4)? A questo punto dovrebbe essere chiaro (possiamo aiutarci, ad esempio, rappresentando la situazione attraverso un diagramma ad albero) che le disposizioni di quattro elementi a due a due sono:

$$D_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12.$$

La nostra intuizione ci suggerisce allora che per ottenere coppie di elementi diversi scelti tra n, dobbiamo accoppiare ciascuno di essi con i rimanenti $n-1$. Troviamo che vale la seguente formula:

$$D_{n,2} = n(n-1).$$

Con un piccolo abuso di notazione, si indicherà con $D_{n,k}$ sia l'insieme delle disposizioni di n elementi di classe k, sia il loro numero.

Queste considerazioni non ci permettono ancora di rispondere alla domanda dalla quale siamo partiti, perché forniscono un numero più grande di quello che interessa a noi, in quanto ad esempio nelle disposizioni di tre vignette a due a due:

$$V_1V_2 \qquad V_2V_1 \qquad V_3V_1$$

$$V_1V_3 \qquad V_2V_3 \qquad V_3V_2$$

le coppie con elementi differenti sono soltanto le tre della prima riga. Infatti quelle della seconda riga differiscono ciascuna da una delle precedenti solo per l'ordine in cui compaiono gli elementi, che è evidentemente irrilevante ai fini del calcolo del numero diverso di coppie di vignette che posso trovare sul gelato. Cioè, ad esempio, la configurazione di vignette V_1V_2, al fine del nostro calcolo è uguale a quella V_2V_1, perché il gelato non ha un verso preferenziale (anche se qualcuno preferisce mangiare prima la vaniglia e qualcun altro prima lo zabaione!)

Quindi il numero di coppie differenti di vignette che si può fare con 3 è 3, cioè la metà del numero di disposizioni che si possono fare di tre elementi a due a due.

Nei casi come questo, in cui non interessa l'ordine in cui gli elementi compaiono, non si parla più di disposizioni, bensì di *combinazioni*. Ragionando in maniera analoga rispetto al caso di tre vignette, si può generalizzare dicendo che:

$$C_{n,2} = \frac{D_{n,2}}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

cioè il numero di coppie che si possono formare con n elementi diversi, quando non interessa l'ordine in cui gli stessi compaiono (combinazioni) è la metà del numero delle disposizioni di n elementi a due a due.

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per rispondere alla domanda iniziale: in quanti possibili modi si possono scegliere due vignette *diverse* da un insieme di n, senza soffermarci sull'ordine con il quale si presentano? La risposta è

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

ipotizzando, ad esempio, che l'Algida possegga 100 vignette diverse, il numero cercato è:

$$\frac{100 \cdot 99}{2} = 4950.$$

Tutte queste considerazioni, oltre alla voglia di gelato, fanno nascere la curiosità di sapere quante *terne* si possono formare con n elementi; procedendo per gradi, come fatto finora, supponiamo di avere tre elementi diversi, ad esempio tre valigie V_1, V_2 e V_3 che dobbiamo distribuire a tre membri della nostra famiglia.

Per ottenere le terne possiamo pensare ancora una volta di usare un diagramma ad albero, ad esempio aggiungendo nel diagramma in Figura 1 ad ogni coppia l'elemento mancante.

Dovrebbe essere chiaro allora, che si ha:

$$D_{3,3} = 6.$$

Proviamo a calcolare $D_{4,3}$, cioè, nel nostro esempio, in quanti modi posso distribuire a tre membri della mia famiglia quattro valigie diverse V_1, V_2, V_3 e V_4. In

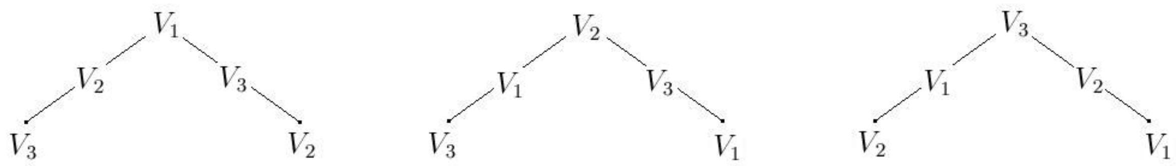

Figura 2: Disposizioni di tre elementi a tre a tre

questo caso, a ciascuna coppia schematizzata in figura 1, bisogna aggiungere uno dei due elementi mancanti e quindi, il numero delle disposizioni di 4 oggetti a tre a tre è dato da:

$$D_{4,3} = D_{4,2} \cdot 2 = (4 \cdot 3) \cdot 2 = 24.$$

In maniera del tutto analoga, per trovare le disposizioni di 5 elementi a tre a tre, bisogna aggiungere a ciascuna delle coppie che posso ottenere con 5 elementi, uno dei tre elementi che non ho ancora scelto e quindi:

$$D_{5,3} = D_{5,2} \cdot 3 = (5 \cdot 4) \cdot 3 = 60.$$

In generale, siamo allora giunti alla formula:

$$D_{n,3} = D_{n,2} \cdot (n-2) = n(n-1)(n-2),$$

in quanto le disposizioni di n elementi a tre a tre si possono ottenere aggiungendo a ciascuna coppia delle $D_{n,2}$ uno degli $(n-2)$ elementi ancora non scelti.

A questo punto facciamo uno sforzo di astrazione, cercando di dedurre dai ragionamenti fatti finora la formula per $D_{n,k}$, cioè per il numero di disposizioni di n elementi a k a k. Se abbiamo ragionato bene negli esempi precedenti, dovrebbe venir fuori in maniera quasi naturale la formula:

$$D_{n,k} = D_{n,k-1} \cdot [n-(k-1)] = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1),$$

perché le disposizioni di n elementi a k a k si ottengono aggiungendo a ciascuna delle $D_{n,k-1}$ uno degli $n-(k-1)$ elementi non ancora scelti.

Possiamo riassumere le considerazioni fatte fino ad ora, dando la seguente:

Definizione 1.1. Dati n elementi distinti ed un numero $k \leq n$, si dicono *disposizioni* (o *disposizioni semplici*) di classe k tutti i raggruppamenti che si possono formare con gli elementi dati, in modo che ogni raggruppamento ne contenga k tutti distinti tra loro e che due raggruppamenti differiscano tra loro o per qualche elemento oppure per l'ordine secondo il quale gli elementi si susseguono. Il loro numero è dato da:

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Non siamo ancora in grado, invece, per il momento di generalizzare anche il concetto di combinazione che abbiamo introdotto prima. Lo faremo quando avremo gli strumenti matematici necessari (cioè dopo la prossima sezione).

Per gli studenti del biennio, la trattazione teorica sulle disposizioni può finire qui. Per gli studenti del triennio, invece, l'insegnante può selezionare alcuni degli esempi precedenti ed introdurre, oltre alla definizione appena data, quella più formale:

Definizione 1.2. Dati due insiemi A e B, rispettivamente di k ed n elementi, si dice *disposizione* (o *disposizione semplice*) di n oggetti di classe k una funzione iniettiva di A in B. Il numero delle disposizioni di n oggetti di classe k si indica con $D_{n,k}$ e si ha:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

A seconda del livello della classe, si può presentare una dimostrazione per induzione di quest'ultima formula, oppure proporre solo una riflessione fondata su diversi esempi.

Esempi

1. *In quanti modi i 30 alunni di una classe si possono disporre su banchi di due posti ciascuno?*

   Si ha:

   $$D_{30,2} = 30 \cdot 29 = 870.$$

2. *Ad un gioco partecipano 10 persone che concorrono alla vincita di quattro premi differenti tra loro. Quante sono le possibili quaterne di vincitori, se ogni persona può vincere un solo premio?*

   Evidentemente, si considerano differenti due quaterne sia che non abbiano i medesimi componenti, sia che i medesimi componenti siano disposti in ordine diverso.

   Il numero delle quaterne possibili è perciò dato dal numero delle disposizioni di 10 elementi di classe 4 e, cioè:

   $$D_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

3. *Quanti sono i numeri di tre cifre tutte diverse tra loro?*

   Le disposizioni delle dieci cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 a tre a tre, danno oltre ai numeri richiesti, anche i raggruppamenti del tipo $0ab$ (con a e b cifre distinte non nulle). Poiché il numero di tali raggruppamenti è $D_{9,2}$, il numero richiesto è:

   $$D_{10,3} - D_{9,2} = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 = 648.$$

2 Permutazioni

Nel caso particolare di n elementi ad n ad n, cioè nel caso in cui si dispongano gli n elementi in tutti i modi possibili, le disposizioni si dicono anche *permutazioni* e si indicano con P_n; si ha, allora:

$$P_n = D_{n,n} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Il prodotto $n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ ricorre spesso in matematica, per questo ha un simbolo ed un nome: si indica con $n!$ e si chiama *fattoriale di n*. Inoltre si pone, per convenzione: $0! = 1$.

In quanti modi si possono ad esempio disporre tre elementi diversi A, B e C? In $6 = 3!$ modi diversi, cioè:

$$\begin{array}{ccc} ABC & BCA & CAB \\ ACB & BAC & CBA \end{array}$$

Ancora: se una classe è composta da 25 alunni, in quanti modi diversi si possono disporre nei banchi? In

$$25! = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

modi diversi.

Osservazione. Questo numero è molto grande! Infatti il fattoriale di n cresce molto rapidamente al crescere di n; ad esempio si ha:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ 1! &= 1 \\ 2! &= 2 \\ 3! &= 6 \\ 4! &= 24 \\ 5! &= 120 \\ 6! &= 720 \\ 7! &= 5040 \\ 8! &= 40320 \\ 9! &= 362880 \\ 10! &= 3628800 \end{aligned}$$

Formalizzando questi concetti, arriviamo alla seguente:

Definizione 2.1. Dati n elementi distinti, si dicono *permutazioni* di tali elementi tutti i possibili raggruppamenti formati in modo che ognuno contenga tutti gli n elementi e differisca dagli altri per l'ordine secondo il quale gli n elementi si susseguono. Il loro numero si indica con P_n ed è il fattoriale di n, cioè:

$$P_n = n!$$

Agli studenti del triennio, può essere introdotta la definizione basata sulle applicazioni tra insiemi:

Definizione 2.2. Dato un insieme X di cardinalità n, si definisce permutazione di X una funzione biettiva di X in sé. La cardinalità dell'insieme delle permutazioni di un insieme di n elementi si indica con P_n ed è il fattoriale di n.

Anche per questa formula, l'insegnante può decidere se proporre o meno una dimostrazione per induzione.

Esempi

1. *Quanti numeri di tre cifre, fra loro diversi, si possono formare con le cifre 3, 5, 1?*

   Sono tanti quante le permutazioni che si possono fare con le tre cifre date, cioè:

   $$3! = 6.$$

2. *In quanti modi 7 persone si possono disporre:*

   (a) in sette sedie allineate?

   (b) in 7 sedie intorno ad un tavolo rotondo?

In sette sedie allineate si possono disporre in

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

modi.

Attorno ad un tavolo rotondo, invece: una persona può sedersi in un posto qualsiasi, dopo di che, le altre persone possono sedersi in 6! modi intorno al tavolo.

3 Disposizioni con ripetizione

Tratto da: "Insalate di matematica" - Paolo Gangemi - Sironi Editore

Il meraviglioso canzoniere di Petrarca comprende 366 componimenti che sono alla base di molta poesia occidentale. [...]

Ma c'è un poeta che, a prescindere da ogni valutazione estetica, surclassa di gran lunga tutti gli altri quanto al numero di poesie composte: si tratta di Raymond Queneau che è stato poeta, romanziere, saggista, ludolinguista e si è interessato anche di scienza e in particolare di matematica.

Proprio il suo spirito matematico lo ha portato a creare una delle sue opere più originali: "Cent mille milliards de poèmes"[...]

Ma quanti volumi riempie lo smisurato libro di Queneau? A parte brevi introduzioni e appendici, il testo poetico vero e proprio è lungo appena 10 pagine.

Non è un miracolo, né un mistero: l'autore francese ha unito una proprietà elementare del calcolo combinatorio alla sua fantasia rutilante.

La caratteristica dell'opera, infatti, è la possibilità di permutare i versi: Queneau ha composto 10 sonetti, ma, anziché su una pagina normale, li ha scritti ognuno su un foglio diviso in 14 striscioline orizzontali, una per verso, in modo che le striscioline si possano sfogliare indipendentemente l'una dall'altra.

Per far sì che tutti i sonetti risultanti fossero validi, Queneau li ha rimati secondo lo schema: ABAB ABAB CCD EED utilizzando sempre le stesse rime.

Se il lettore vuole, può leggere i 10 sonetti normalmente e finire i 140 versi del libro in pochi minuti.

Ma può anche decidere di sfogliare le striscioline in modo alternativo ottenendo ogni volta una poesia differente, sempre con la rima giusta. Certo il senso logico non è sempre coerentissimo. Del resto Queneau aderiva al surrealismo!

La cosa più bella (e più surreale) è che il lettore può creare poesie nuove ogni volta, aprendo il libro a caso.

Cerchiamo di calcolare quante sono i possibili sonetti che si possono ottenere: se si fissano, ad esempio, i primi 13 versi del primo sonetto, le possibilità per l'ultimo verso sono 10; se si fissano i primi 12 gli ultimi due sono liberi e le possibilità diventano $10 \cdot 10 = 10^2$. Procedendo in maniera analoga, si intuisce che il numero totale dei sonetti è 10^{14}, cioè centomilamiliardi!

Un ragionamento simile, può essere utilizzato per calcolare, ad esempio, in quanti modi è possibile compilare una colonna della schedina del totocalcio (ossia in quanti modi possiamo disporre i simboli 1, X, 2 in tredici caselle). Anche se ho usato la parola *disporre*, si vede subito che l'esercizio non è risolvibile con la formula data prima per $D_{n,k}$, perché in questo caso, avendo solo tre simboli da distribuire su 13 colonne, dobbiamo necessariamente ripetere più volte lo stesso simbolo.

Ancora una volta, procediamo a piccoli passi e cerchiamo di calcolare il numero delle coppie che si possono costruire con i 3 simboli 1, X, 2. Ricorrendo alla rappresentazione ad albero, si ha:

Si ottengono quindi $3 \cdot 3 = 3^2$ coppie. Queste si dicono *disposizioni con ripetizione* di tre elementi a due a due. L'espressione "con ripetizione" indica appunto che tra le coppie considerate ci sono anche 11, XX, 22.

Il numero di queste disposizioni si indica con $D^r_{3,2}$; la r in alto serve a ricordare

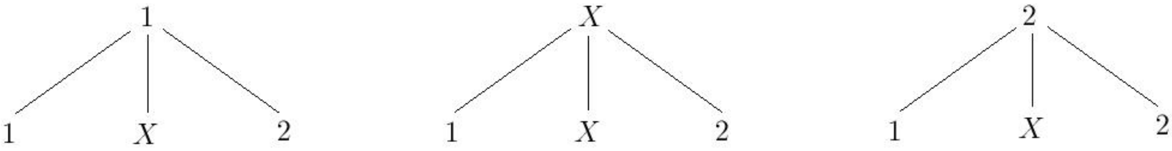

Figura 3: Disposizioni con ripetizione di tre elementi a due a due

che si tratta di disposizioni con ripetizione.

Cerchiamo ora di determinare $D^r_{3,3}$: potremmo costruire un altro grafo ad albero, oppure possiamo semplicemente osservare che ciascuna coppia di quelle trovate per le $D^r_{3,2}$ può essere completata ad una terna in tre modi possibili, cioè aggiungendo ogni volta uno dei tre termini. Pertanto la formula cercata è:

$$D^r_{3,3} = D^r_{3,2} \cdot 3 = 3^2 \cdot 3 = 3^3.$$

Ciò dovrebbe suggerire la soluzione al problema generale di determinare $D^r_{n,h}$. Se infatti abbiamo n elementi, per determinare le $D^r_{n,2}$ basta accoppiare ciascun elemento con tutti gli altri, compreso se stesso e quindi: $D^r_{n,2} = n \cdot n = n^2$; per ottenere le $D^r_{n,3}$, basta aggiungere ad ogni elemento delle $D^r_{n,2}$ ciascuno degli n elementi, perciò: $D^r_{n,3} = n^2 \cdot n = n^2$. Iterando il ragionamento, si ottiene allora:

$$D^r_{n,h} = n^h.$$

Pertanto il numero di schedine del totocalcio ad una colonna che è possibile giocare è $D^r_{3,13} = 3^13 = 1594323$.

Esempi

1. *Determinare quante terne di risultati (testa o croce) si possono ottenere lanciando una moneta tre volte.*

   Si tratta del numero delle disposizione con ripetizione di due elementi a tre a tre. Perciò il numero richiesto è:

$$D^r_{2,3} = 2^3 = 8.$$

2. *In quanti modi si possono accoppiare le facce di due dadi (contrassegnati con in numeri da 1 a 6)?* Il numero richiesto, evidentemente è il numero delle disposizioni complete di 6 elementi distinti, a due a due:

$$D^r_{6,2} = 6^2 = 36.$$

3. *Quanti sono i numeri di tre cifre nel sistema decimale non necessariamente distinte?* Le disposizioni con ripetizione delle dieci cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 a tre a tre, danno oltre ai numeri richiesti, anche i raggruppamenti del tipo $0ab$ (con a e b cifre non necessariamente distinte). Poiché il numero di tali raggruppamenti è $D^r_{10,2}$, il numero richiesto è:

$$D^r_{10,3} - D^2_{10,2} = 10^3 - 10^2 = 900.$$

4 Permutazioni con ripetizione

Dovrebbe a questo punto essere chiaro che gli anagrammi di parole con lettere tutte distinte sono un classico esempio di permutazioni. Negli anagrammi, però, hanno interesse anche quelli di parole formate da lettere non tutte distinte (come "mamma"). E' chiaro che in questo caso il numero di anagrammi è notevolmente inferiore rispetto a quello di parole con lo stesso numero di lettere tutte distinte: per esempio nel citato caso di mamma, uno scambio tra le m o tra le a non provoca cambiamenti nella parola. In questa ed altre situazioni è importante anche il calcolo del numero delle permutazioni su un insieme di oggetti non tutti distinti (*permutazioni con ripetizione*).

Se in un insieme di n elementi alcuni si ripetono $k_1,\ k_2, \ldots, k_s$ volte, allora il numero delle permutazioni con ripetizione degli n elementi è dato da:

$$P^r_{n,k_1,\ldots k_s} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_s!}$$

Esempio

Quanti sono gli anagrammi della parola CASA, anche privi di significato?

La "A" è ripetuta $k_1 = 2$ volte, quindi la risposta è $P^r_{4,2} = \frac{4!}{2!} = 12$.

5 Combinazioni

Nel film "Un sogno per domani" un bambino di scuola media, Trevor ha un'idea per migliorare il mondo: questa idea prevede di fare un favore a tre persone diverse, richiedendo che ciascuna di esse faccia altrettanto ad altre tre persone e così via... La catena parte proprio da Trevor.

Supponendo che, ogni persona impieghi un mese a fare i tre favori e facendo per semplicità l'ipotesi che i favori siano sempre fatti a persone diverse, ci domandiamo quante persone sono coinvolte in questa "catena di solidarietà" mese per mese.

Chiaramente, all'inizio, cioè al mese 0 c'è solo Trevor; al mese successivo a Trevor si aggiungono 3 persone; è facile realizzare che alle persone coinvolte fino al mese $n-1$-simo nel mese n si aggiungono 3^n persone.

Al solito, è possibile schematizzare il problema con un diagramma ad albero (Figura 4).

N.B. Non è interessante in questo contesto, ma questo esercizio offre anche lo spunto per introdurre in maniera naturale la funzione esponenziale e le funzioni ricorsive.

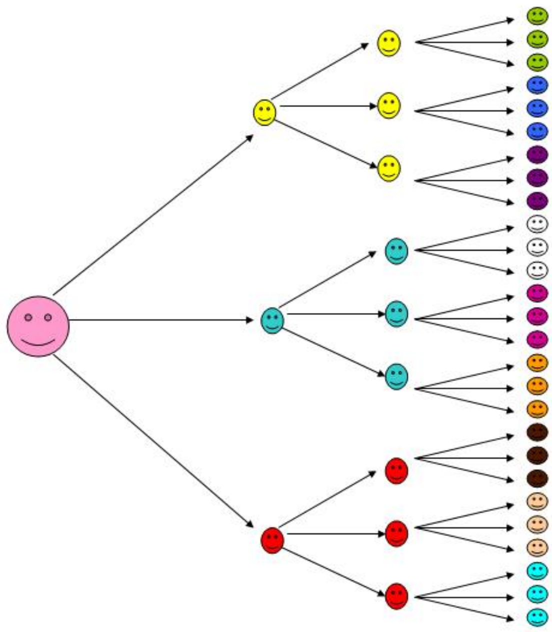

Figura 4: Numero di persone coinvolte nei primi mesi

Ci chiediamo allora, in quanti possibili modi è possibile scegliere le tre persone coinvolte nel primo mese tra gli abitanti del paese di Trevor che supponiamo essere 100.

Una prima differenza che possiamo notare rispetto ai problemi combinatori che abbiamo analizzato finora è che in questo caso non ha importanza l'ordine in cui si presentano i vari elementi dell'insieme di partenza. Come abbiamo accennato nella descrizione delle disposizioni semplici, in questi casi si parla di *combinazioni.*

Dati n elementi distinti ed un numero $k \leq n$, si dicono combinazioni di n elementi di classe k tutti i raggruppamenti che si possono formare con k degli n elementi in modo che i possibili raggruppamenti differiscano tra loro almeno per un elemento. Avevamo precedentemente trovato che

$$C_{n,2} = \frac{D_{n,2}}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

cioè il numero di coppie che si possono formare con n elementi diversi, quando non interessa l'ordine in cui gli stessi compaiono (combinazioni) è la metà del numero delle disposizioni di n elementi a due a due.

Nel tentativo di generalizzare anche il concetto di combinazione che abbiamo introdotto prima, proviamo a vedere quante sono le combinazioni di 4 elementi a tre a tre, cioè, riferendoci alle notazioni di prima, quanto vale $C_{4,3}$.

Come nel caso delle $C_{n,2}$, questo numero può essere calcolato a partire da $D_{4,3}$: è facile rendersi conto che dalle disposizioni di 4 elementi di classe 2 si ottengono le combinazioni di 4 elementi di classe 2 identificando tra loro quelle che differiscono solo per l'ordine dei loro elementi; viceversa dalle combinazioni di 4 elementi di classe 2 si ottengono le disposizioni di 4 elementi di classe 2, disponendo in tutti i modi possibili, cioè permutando, gli elementi che formano ciascuna combinazione.

Poiché il numero di modi in cui si possono permutare i 3 elementi che compongono ciascuna combinazione è $P_3 = 3! = 6$, da ogni combinazione si ottengono P_3 disposizioni, pertanto si ha $D_{4,3} = C_{4,3} \cdot P_3$, che permette di ricavare

$$C_{4,3} = \frac{D_{4,3}}{P_3} = \frac{(4 \cdot 3) \cdot 2}{6} = 4$$

Più in generale per trovare $C_{n,k}$: poiché le k-uple che differiscono per il solo ordine dando la stessa combinazione sono $k!$, si ha:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Si possono formalizzare i concetti introdotti nella seguente:

Definizione 5.1. Si dice *combinazione* (o *combinazione semplice*) di classe k di n elementi (con $k \leq n$) un qualunque sottoinsieme di k elementi, di un dato insieme di n elementi, tutti distinti tra loro. Il numero di combinazioni di classe k di n elementi si indica con $C_{n,k}$ ed è

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Agli studenti del triennio si può far notare che, con semplici osservazioni basate sulle definizioni di coefficiente binomiale e di fattoriale di un intero, si può riscrivere:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Esempi

1. *Quante schedine occorre giocare su una ruota al lotto per essere sicuri di vincere un terno?*

   Naturalmente si devono giocare tante schedine quante le combinazioni che si possono fare con i 90 numeri a 3 a 3, ossia:

$$\binom{90}{3} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117480$$

6 Combinazioni con ripetizione

Vogliamo risolvere ora il seguente problema: quante diverse schedine di due colonne è possibile compilare considerando anche le schedine contenenti due colonne uguali?

Si tratta evidentemente di un problema di combinazioni, perché non ha importanza se all'interno della schedina la colonna vincente è la prima o la seconda, e, come esplicitamente richiesto, consideriamo anche le schedine con due colonne uguali (ammesso che esista un giocatore disposto a giocarla!). Dobbiamo allora combinare a 2 a 2 le 1594323 colonne possibili.

Definizione 6.1. Dati n oggetti fra loro distinti, si chiama *combinazione con ripetizione*, di classe k ogni gruppo di k elementi, anche non distinti, presi tra gli n oggetti dati, nell'ipotesi che l'ordine sia ininfluente. Ovviamente si può avere $k \geq n$. Il loro numero si indica con $C^r_{n,k}$.

Dalla definizione risulta chiaro che, per esempio, dati gli elementi A e B, le terne AAB, ABA e BAA devono considerarsi una sola volta dato che esse differiscono solo per l'ordine in cui compaiono gli elementi. Individuato il problema, cerchiamo la formula per calcolare $C^r_{n,k}$.

Procedendo per gradi, come fatto finora, si giunge abbastanza agevolmente ala seguente formula:

$$C^r_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!},$$

che, ricordando la definizione di coefficiente binomiale, diventa:

$$C^r_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

Tornando quindi al calcolo del numero delle diverse schedine di due colonne del totocalcio, si ha $n = 3^{13}$ e $k = 2$ e quindi:

$$C^r_{3^{13},2} = \binom{3^{13}+2-1}{2} = 1270933711326.$$

7 Il calcolo combinatorio agli Esami di Stato

Talvolta nella seconda prova degli Esami di Stato del Liceo Scientifico, sono stati proposti semplici esercizi di calcolo combinatorio, spesso trascurati dagli studenti che non hanno mai affrontato questi argomenti nel corso degli studi.

Propongo alcuni di essi, con i rispettivi svolgimenti:

Maturità 1975/1976 - Sessione ordinaria - Problema 3

Si dimostri che $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(n-k) + n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(n-k+k+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}
\end{aligned}$$

come si voleva.

Si risolvono in maniera del tutto analoga i seguenti temi:

Maturità 1980/1981 - Sessione ordinaria - Problema 4

Si dimostri l'identità $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Esame di Stato 2000/2001 - Sessione ordinaria - Quesito 6

Dimostrare che si ha $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, *dove* n *e* k *sono numeri naturali qualsiasi con* $n > k > 0$.

Esame di Stato 2001/2002 - Sessione ordinaria - Quesito 9

Considerati i 90 numeri del gioco del Lotto, calcolare quante sono le possibili cinquine che, in una data estrazione, realizzano un determinato terno.

Chiaramente sono le combinazioni di $90 - 3$ oggetti di classe 2, cioè:

$$C_{87,2} = \frac{87 \cdot 86}{2} = 3741$$

. **Esame di Stato 2001/2002 - Sessione straordinaria - Quesito 10**

Dimostrare la formula che esprime il numero delle combinazioni semplici di n *oggetti presi a* k *a* k *in funzione del numero delle disposizioni semplici degli stessi oggetti presi a* k *a* k *e delle permutazioni semplici su* k *oggetti.*

La risoluzione di questo quesito può essere desunta dalla lettura delle sezioni inziali di questa trattazione.

Appendice

7.1 Potenza di un binomio

Consideriamo due numeri reali qualunque a e b. Sono note le formule:

$$\begin{aligned}
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{aligned}$$

e così via. Analizzando il calcolo della generica potenza di un binomio notiamo che tutti gli sviluppi sono dei polinomi omogenei e completi, di grado uguale all'esponente della potenza. Ordinando gli sviluppi secondo le potenze decrescenti di uno dei due monomi, notiamo che i loro coefficienti sono numeri del seguente prospetto che si chiama *Triangolo di Tartaglia*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\ldots & & & & & & & & & &
\end{array}$$

per la cui costruzione è sufficiente osservare che ogni riga inizia e termina con 1 e gli altri valori si ottengono come somma dei due elementi sovrastanti.

Sussiste il teorema: qualunque siano i due numeri a e b e l'intero positivo n, si ha:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

cioè lo sviluppo di $(a+b)^n$ è un polinomio omogeneo di grado n nel complesso delle due variabili a e b che, ordinato secondo le potenze decrescenti di a (e crescenti di b e viceversa) ha per coefficienti i numeri:

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n} = 1.$$

Lo sviluppo della potenza del binomio con il metodo di Newton può essere scritto in maniera più compatta nel modo seguente:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

7.2 Il gruppo delle permutazioni di n oggetti

L'introduzione del concetto di permutazione permette di presentare agli studenti la definizione di *gruppo* e quindi una struttura algebrica i cui elementi non necessariamente sono numeri.

Naturalmente, anche se questa trattazione è in appendice, perché ogni insegnante deciderà se è il caso o meno di affrontarla in base alla classe che ha di fronte, l'approccio metodologico usato sarà quello seguito finora della discussione guidata.

Tre amici, Antonio, Barbara e Carlo, dopo aver studiato le permutazioni di n oggetti, provano a determinare in quanti modi diversi possono occupare tre sedie allineate numerate da 1 a 3. Se hanno ben capito, questo numero è $3! = 6$, come verificano facilmente costruendo il seguente schema:

1 2 3

A B C

A C B

B A C

B C A

C A B

C B A

Chiariti i dettagli del problema, si osserva che il passaggio dalla configurazione iniziale alla successiva (dalla sequenza A B C alla sequenza A C B) può essere rappresentato con semplicità utilizzando la tabella:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

che va letta così: colui che occupava il posto 1 (Antonio) continua ad occupare quel posto; Barbara, che occupava il posto 2, occupa ora il posto 3 e, infine, Carlo, che occupava il posto 3, occupa adesso il posto 2. Allo stesso modo, il passaggio dalla seconda configurazione alla terza, la B A C, è rappresentato dalla tabella:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

dato che ora Antonio, che occupava il posto 1, si è spostato in 2; Carlo, che occupava il posto 2, in 3 e infine Barbara, che si trovava in 3, si è spostata in 1.

Lasciando un attimo da parte i tre amici e osserviamo che, il passaggio dalla terza alla quarta configurazione è anch'esso rappresentato dalla tabella (6). Quello dalla quarta alla quinta dalla tabella:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

e quello dalla quinta alla sesta ancora una volta dalla tabella (6).

Il passaggio dalla prima alla terza configurazione rappresentato dalla tabella:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

ed infine il passaggio dalla prima alla sesta configurazione dalla tabella:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Alle cinque tabelle precedenti possiamo aggiungerne una sesta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

che esprime la circostanza che i tre amici continuano ad occupare le rispettive posizioni.

Le sei tabelle precedenti esauriscono tutte le possibili combinazioni dei numeri 1, 2 e 3, pertanto, il passaggio da una qualunque delle sei configurazioni dello schema visto all'inizio ad una qualunque altra *è sempre rappresentato da una ed una sola delle sei tabelle precedenti.*

Indichiamo con $\mathbb{S}_3$ l'insieme costituito dalle sei tabelle precedenti, cioè:

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_3 \;=\; & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \right. \\ & \left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}\end{aligned}$$

Tra gli elementi (tabelle) di questo insieme, è possibile eseguire una particolare operazione; ad esempio considerando la seconda e la terza di queste tabelle si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

dove la tabella a destra dell'uguale è stata ottenuta a partire dalla seconda seguendo gli spostamenti di ogni singolo numero. (Si noti che la tabella ottenuta esprime il passaggio dalla prima alla quarta configurazione).

Si verifica subito che, eseguendo tale operazione tra due qualunque tabelle dell'insieme, eventualmente anche uguali tra loro, si ottiene sempre una tabella dell'insieme. In particolare, eseguendo l'operazione tra una qualunque tabella, ad esempio la terza, e la prima tabella di $\mathbb{S}_3$, in qualunque ordine, si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

che si interpreta pensando che ciascun occupante delle sedie non muta la posizione da cui parte.

L'operazione tra tabelle introdotta in $\mathbb{S}_3$ gode della proprietà associativa, come si verifica senza alcuna difficoltà.

A questo punto, viene da chiedersi se, in generale, loperazione introdotta è anche commutativa, cioè se il risultato è sempre indipendente dall'ordine con cui si dispongono le tabelle. Per rispondere a questa domanda, basta osservare che, ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \neq$$

$$\neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto gli studenti dovrebbero essere pronti per la seguente:

Definizione 7.1. Una struttura algebrica $(S, *)$, dove S è un insieme non vuoto e $*$ un'operazione binaria si dice *gruppo* se e soltanto se:

1. $\forall\ a, b \in G,\ \ (a * b) \in G$;
2. l'operazione $*$ è associativa;
3. esiste un elemento (detto *elemento neutro* di G) $e \in G$ tale che: $a * e = e * a = a,\ \forall a \in G$;
4. $\forall\ a \in G$, esiste un elemento (detto *inverso* di a) $\overline{a} \in G$ tale che: $a * \overline{a} = \overline{a} * a = e$.

Per quanto osservato prima, l'insieme $\mathbb{S}_3$ delle permutazioni di 3 oggetti è un gruppo (non commutativo) rispetto all'operazione tra tabelle che abbiamo introdotto. L'elemento neutro di questo gruppo è la tabella $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Riferimenti bibliografici

[DBM04] N. Dodero, P. Baroncini, e R. Manfredi. *Lineamenti di analisi e calcolo combinatorio*. Ghisetti e Corvi, Milano, 2004.

[Gan06] P. Gangemi. *Insalate di matematica*. Sironi Editore, Milano, 2006.

[RP78] L.L. Radice e L. Mancini Proia. *Il metodo matematico*. Principato editore, Roma, 1978.

[ZS91] G. Zwirner e L. Scaglianti. *Conoscenze e strategie nella matematica*. CEDAM, Padova, 1991.

Siti consultati

http://macosa.dima.unige.it/

http://didmat.dima.unige.it/

http://www.ciram.unibo.it/~barozzi/Net_Schede/

http://math.unipa.it/~grim/

http://www.batmath.it/index.asp

Valutazione sommativa

Rispondi alle seguenti domande:

1. Un concessionario ha ricevuto 5 nuovi modelli di scooter. In vetrina, però, può esporne solo 3 alla volta, a 3 distanze diverse, lasciando i rimanenti 2 nel retrobottega. Poiché vuole che tutti i modelli possano essere ugualmente osservati, decide di sistemare ogni giorno la vetrina in modo diverso, cambiando almeno un modello o l'ordine in cui gli scooter si presentano. In quanti giorni avrà esaurito tutte le possibilità?

2. (da I giochi di Archimede, Gara del biennio 2006)
   In quanti modi distinti si possono ordinare le lettere L,A,P,I,S, in modo che la prima e l'ultima lettera siano vocali?

3. Un barman ha a disposizione 8 liquori. Quanti cocktail può preparare utilizzandone 3 tra loro diversi?

4. I soci di un club utilizzano una tessera di riconoscimento formata da 3 simboli (non necessariamente diversi) tra i 5 seguenti: $\triangle$ $\clubsuit$ $\diamondsuit$ $\spadesuit$ $\heartsuit$. Quante tessere tra loro diverse si possono formare?

5. Al loro incontro 4 amici si salutano stringendosi la mano. Quante strette di mano si sono scambiati?

6. In quanti modi diversi si possono allineare le 7 note musicali?

7. In quanti modi diversi si possono distribuire 12 penne (indistinguibili) nei 5 scomparti di un portapenne?

8. I ragazzi di 5^aC sono pronti a partire per la gita di fine anno. Sul pullman sono rimasti liberi i sei posti affiancati dell'ultima fila: in quanti modi possono essere occupati da 6 studenti, considerato il fatto che Margherita e Cosimo sono fidanzati e vogliono sedersi vicini?

GRIGLIA DI VALUTAZIONE

Voto finale in decimi: 0

Esercizio 1

			val percent.	peso	punt. in decimi	punt. pond.
Competenze	C1	essere in grado di riconoscere la tipologia di raggruppamento richiesto (disposizione o combinazione)	25%	0,25		0
disciplinari	C2	essere in grado di riconoscere la presenza o meno delle ripetizioni	25%	0,25		0
80%	C3	essere in grado di applicare (correttamente) le formule giuste	25%	0,25		0
	C4	essere in grado di utilizzare un registro linguistico appropriato nella stesura della risoluzione degli esercizi	5%	0,05		0
Competenze						
formative	C5	essere in grado di rappresentare attraverso un modello matematico un problema della vita reale	10%	0,1		0
20%	C6	essere in grado di desumere dai calcoli effettuati eventuali risultati di utilità pratica	10%	0,1		0
					voto parziale	0

Esercizio 2

			val percent.	peso	punt. in decimi	punt. pond.

Competenze	C1	essere in grado di riconoscere la tipologia di raggruppamento richiesto (disposizione o combinazione)	25%	0,25		0
disciplinari	C2	essere in grado di riconoscere la presenza o meno delle ripetizioni	25%	0,25		0
80%	C3	essere in grado di applicare (correttamente) le formule giuste	25%	0,25		0
	C4	essere in grado di utilizzare un registro linguistico appropriato nella stesura della risoluzione degli esercizi	5%	0,05		0
Competenze						
formative	C5	essere in grado di rappresentare attraverso un modello matematico un problema della vita reale	10%	0,1		0
20%	C6	essere in grado di desumere dai calcoli effettuati eventuali risultati di utilità pratica	10%	0,1		0
					voto parziale	0

Esercizio 3

			val percent.	peso	punt. in decimi	punt. pond.
Competenze	C1	essere in grado di riconoscere la tipologia di raggruppamento richiesto (disposizione o combinazione)	25%	0,25		0
disciplinari	C2	essere in grado di riconoscere la presenza o meno delle ripetizioni	25%	0,25		0
80%	C3	essere in grado di applicare (correttamente) le formule giuste	25%	0,25		0
	C4	essere in grado di utilizzare un registro linguistico appropriato nella stesura della risoluzione degli esercizi	5%	0,05		0

Competenze						
formative	C5	essere in grado di rappresentare attraverso un modello matematico un problema della vita reale	10%	0,1		0
20%	C6	essere in grado di desumere dai calcoli effettuati eventuali risultati di utilità pratica	10%	0,1		0
					voto parziale	0

Esercizio 4

			val percent.	peso	punt. in decimi	punt. pond.
Competenze	C1	essere in grado di riconoscere la tipologia di raggruppamento richiesto (disposizione o combinazione)	25%	0,25		0
disciplinari	C2	essere in grado di riconoscere la presenza o meno delle ripetizioni	25%	0,25		0
80%	C3	essere in grado di applicare (correttamente) le formule giuste	25%	0,25		0
	C4	essere in grado di utilizzare un registro linguistico appropriato nella stesura della risoluzione degli esercizi	5%	0,05		0
Competenze						
formative	C5	essere in grado di rappresentare attraverso un modello matematico un problema della vita reale	10%	0,1		0
20%	C6	essere in grado di desumere dai calcoli effettuati eventuali risultati di utilità pratica	10%	0,1		0
					voto parziale	0

Esercizio 5

			val percent.	peso	punt. in decimi	punt. pond.
Competenze disciplinari 80%	C1	essere in grado di riconoscere la tipologia di raggruppamento richiesto (disposizione o combinazione)	25%	0,25		0
	C2	essere in grado di riconoscere la presenza o meno delle ripetizioni	25%	0,25		0
	C3	essere in grado di applicare (correttamente) le formule giuste	25%	0,25		0
	C4	essere in grado di utilizzare un registro linguistico appropriato nella stesura della risoluzione degli esercizi	5%	0,05		0
Competenze formative 20%						
	C5	essere in grado di rappresentare attraverso un modello matematico un problema della vita reale	10%	0,1		0
	C6	essere in grado di desumere dai calcoli effettuati eventuali risultati di utilità pratica	10%	0,1		0
					voto parziale	0

Esercizio 6

			val percent.	peso	punt. in decimi	punt. pond.
Competenze disciplinari	C1	essere in grado di riconoscere la tipologia di raggruppamento richiesto (disposizione o combinazione)	25%	0,25		0
	C2	essere in grado di riconoscere la presenza o meno delle ripetizioni	25%	0,25		0

80%	C3	essere in grado di applicare (correttamente) le formule giuste	25%	0,25		0
	C4	essere in grado di utilizzare un registro linguistico appropriato nella stesura della risoluzione degli esercizi	5%	0,05		0
Competenze						
formative	C5	essere in grado di rappresentare attraverso un modello matematico un problema della vita reale	10%	0,1		0
20%	C6	essere in grado di desumere dai calcoli effettuati eventuali risultati di utilità pratica	10%	0,1		0
					voto parziale	0

Esercizio 7

			val percent.	peso	punt. in decimi	punt. pond.
Competenze	C1	essere in grado di riconoscere la tipologia di raggruppamento richiesto (disposizione o combinazione)	25%	0,25		0
disciplinari	C2	essere in grado di riconoscere la presenza o meno delle ripetizioni	25%	0,25		0
80%	C3	essere in grado di applicare (correttamente) le formule giuste	25%	0,25		0
	C4	essere in grado di utilizzare un registro linguistico appropriato nella stesura della risoluzione degli esercizi	5%	0,05		0
Competenze						
formative	C5	essere in grado di rappresentare attraverso un modello matematico un problema della vita reale	10%	0,1		0

20%	C6	essere in grado di desumere dai calcoli effettuati eventuali risultati di utilità pratica	10%	0,1		0
					voto parziale	0

Esercizio 8

			val percent.	**peso**	**punt. in decimi**	**punt. pond.**
Competenze disciplinari 80%	C1	essere in grado di riconoscere la tipologia di raggruppamento richiesto (disposizione o combinazione)	25%	0,25		0
	C2	essere in grado di riconoscere la presenza o meno delle ripetizioni	25%	0,25		0
	C3	essere in grado di applicare (correttamente) le formule giuste	25%	0,25		0
	C4	essere in grado di utilizzare un registro linguistico appropriato nella stesura della risoluzione degli esercizi	5%	0,05		0
Competenze formative 20%						
	C5	essere in grado di rappresentare attraverso un modello matematico un problema della vita reale	10%	0,1		0
	C6	essere in grado di desumere dai calcoli effettuati eventuali risultati di utilità pratica	10%	0,1		0
					voto parziale	0