UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MACERATA

Scuola Interuniversitaria di Specializzazione all'Insegnamento Secondario

Indirizzo Fisico-Informatico-Matematico
Classe A049

Relazione critica finale

Il gioco come strumento didattico per l'insegnamento della matematica

Specializzando
Dott.ssa *Marika Marconi*

Docente supervisore
Prof. *Pio Francesco Muciaccia*

Anno accademico 2008/2009 – IX Ciclo

Essere un educatore
non è un modo per vivere
ma un modo di vivere

ai miei educatori

Indice

1. Introduzione

Questo lavoro è stato realizzato a conclusione del percorso di studi della durata di due anni presso la Scuola Interuniversitaria di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario per il conseguimento dell'abilitazione nella Classe A049 (Matematica e Fisica).
Esso è il frutto del lavoro svolto durante i laboratori didattici e il tirocinio indiretto e dell'attività di tirocinio diretto effettuato presso un Liceo Scientifico.

1.1 Obiettivi

L'obiettivo di questa relazione è proporre una didattica che faccia ampio uso del gioco e del problem solving in modo non banale analizzandone pregi e difetti, metodi e possibilità di realizzazione.
La scelta dell'argomento è dovuta alla mia forte passione per i giochi matematici ma soprattutto alla consapevolezza, maturata in anni di orientamento nelle scuole superiori, di mostre (organizzate o semplicemente visitate) e convegni sul tema, che è importantissimo far conoscere ai ragazzi, e non solo a loro, il lato divertente, interessante, utile della matematica, fornendo loro uno scopo per lo studio di questa materia che a volte resta piuttosto arida.
Ad esempio, parlare in quinto superiore dell'utilizzo dell'analisi matematica in campo medico o biologico per lo studio dell'evoluzione e della diffusione di malattie o per la crescita di una colonia batterica o far vedere loro che il momento migliore per infornare la pizza si ha in un istante preciso della lievitazione (che si può trovare risolvendo un semplice problema di massimo) aiuta sicuramente a guardare allo studio della materia da un punto di vista molto differente.
Parlare di gioco significa parlare di problemi e situazioni non standard, è quindi spontaneo legare questo concetto a quello di problem solving. Ritengo infatti che, di fronte ad un problema, non sia tanto importante dare

ai ragazzi solo delle formule risolutive, quanto un metodo che permetta loro un approccio cosciente ed efficace al quesito e, più in generale, ai problemi. Il problem solving infatti non è una competenza tecnica che appartiene ad un settore specifico, bensì una competenza trasversale ad ogni settore che tende a sviluppare capacità di affrontare un problema qualsiasi in maniera razionale.

1.2 Contenuti

Questa relazione è divisa in quattro parti:

Il primo capitolo è un'introduzione al lavoro che ne espone obiettivi e contenuti.

Il secondo illustra brevemente le idee, i concetti ed i metodi che sono alla base di questa proposta didattica.

Il terzo capitolo è quello centrale di tutto il lavoro e verte sull'esperienza del tirocinio diretto seguendo il percorso intrapreso nei tre semestri. Il primo paragrafo contiene, così come previsto dalla fase osservativa, riflessioni sulle difficoltà dell'insegnamento della matematica nel secondo ciclo della scuola secondaria. Seguono poi i quattro paragrafi relativi alla fase attiva del tirocinio, quella appunto in cui, interagendo costruttivamente con la tutor, si sono discussi i punti critici nell'insegnamento delle materie previste dalla classe A049 per trovare gli spunti ed in seguito progettare il mio intervento attivo nella disciplina.

In particolare i paragrafi due, tre e quattro espongono il momento della riflessione effettuata con la tutor ai fini della scelta dell'intervento, della classe, dei tempi e dei modi mentre il quinto paragrafo è un'esposizione critica ed una valutazione di quello che è stato il vero e proprio intervento attivo in aula, col proposito di realizzare una proposta didattica concreta, riproponibile ed esportabile in altri contesti.

Infine il quarto capitolo espone le conclusioni ed i possibili sviluppi futuri.

2. Gioco e problem solving nell'insegnamento della matematica

2.1 Il gioco per scoprire una nuova matematica

Narra Raymond Smullyan nell'introduzione al libro "Donna o Tigre?":

> *«Mio figlio (chi parla è un amico di Smullyan) sta leggendo il tuo libro e gli piace molto! Ma quando gli parlerai non dirgli che sta facendo della matematica, perché odia la matematica! Se dovesse immaginare che questa è effettivamente matematica, immediatamente smetterebbe di leggere il libro!». [Smullyan R.]*

L'autore continua poi sostenendo di aver incontrato moltissima gente che dichiarava di odiare la matematica e che tuttavia era enormemente interessata a qualsiasi problema logico o matematico lui proponesse, a patto che venisse presentato sotto forma di indovinello, arrivando a chiedersi cosa sarebbe accaduto se gli "Elementi" di Euclide fossero stati scritti sotto forma di indovinelli.

Perché questa repulsione a priori per la matematica? Perché questa disciplina risulta un qualcosa di inutile e lontana dalla vita di tutti i giorni?

Uno degli aspetti che sembra rendere difficile l'apprendimento e la comprensione della matematica è il linguaggio, un linguaggio che non ammette ambiguità, ma soprattutto che appare lontano da quello comune e dalla realtà che ci circonda, freddo, arido ed astratto.

Il gioco matematico recupera in parte questa distanza tra matematica e realtà poiché utilizza anche il cosiddetto linguaggio extramatematico; in questo modo il gioco estende il campo di interesse ed il vocabolario della matematica, inserendo, accanto a numeri e lettere (spesso anche di altri alfabeti) oggetti, animali, aneddoti e paradossi, gettando un ponte tra gli aspetti rigorosamente teorici e formali e gli ambiti concreti di applicazione.

Il costante riferimento a soggetti e situazioni appartenenti ad altri ambiti si traduce nella contestualizzazione dei contenuti, nella costruzione della conoscenza dal basso, a partire dal contesto applicativo. Proprio questo

riscontro concreto che trovano i concetti astratti nelle applicazioni a problemi reali induce a percepire quei concetti non più come aridi e sterili, ma come utili e applicabili.
Questi oggetti extramatematici inoltre colpiscono la fantasia e favoriscono un coinvolgimento della sfera emotiva del soggetto e questo ha un esito positivo sul piano dell'apprendimento e della motivazione.

Il problem solving e il gioco sono approcci capaci di rivelare un volto della matematica che rimane nascosto dietro l'aspetto astratto della disciplina. C'è un'altra matematica, quella che esercita un fascino in grado di appassionare allo studio di una disciplina generalmente considerata difficile e noiosa.

> *«Studiando i metodi per la risoluzione dei problemi, si scopre un altro aspetto della matematica. Sì, la matematica ha due volti: è la scienza severa di Euclide e qualcosa d'altro. Nell'assetto euclideo essa ci appare una scienza sistematica, deduttiva; ma nella pratica si rivela una scienza sperimentale, induttiva. Questi due aspetti sono nati insieme alla stessa matematica». [Polya G.]*

Mentre generalmente a scuola si studiano il risultato finale di un lungo processo e la sua formalizzazione tendendo ad ignorare le inquietudini, le idee geniali ed i fallimenti che hanno portato a tali risultati. La dimostrazione (processo di sintesi) giustifica un risultato, ma non dice niente del percorso attraverso cui quel risultato è stato ottenuto; se si procede a ritroso e si rovescia il processo (analisi) emerge quella parte del pensiero matematico costituita da tentativi, errori ed intuizioni che non sono utili ai fini del risultato, ma che paradossalmente potrebbero avere molto da insegnare.
E' quindi di fondamentale importanza un insegnamento della matematica che prenda in considerazione la storia di queste materie e che ponga gli studenti a contatto col contesto in cui l'autore è arrivato a scoprire un teorema o una formula. Un insegnamento di questo genere stimola negli studenti sì la capacità deduttiva, ma anche la fantasia e l'intuizione.

2.2 Il gioco per trovare stimoli e motivazioni

Un aspetto fondamentale connesso al problem solving e soprattutto al gioco è la capacità di recuperare la motivazione allo studio della matematica facendo sì che queste materie risultino interessanti per tutti, anche per quelli che non si ritengono capaci di comprenderle.

Ne scrive a proposito Gabriele Lolli nella sua opera *Il riso di Talete*:

> *«Questo tipo di matematica è seria e piena di legittimità, tanto è vero che su di essa si può basare una proposta didattica, e una delle più sensate, che ha tanti sostenitori nei più diversi tempi e contesti [...] I giochi non sembrano diversi dai tradizionali esercizi, se non forse perché sono di tipo più logico e linguistico e meno numerico, in generale, e questo argomento gioca tutto a loro favore. La differenza rispetto agli esercizi è che divertono, e non è cosa da poco [...] in primo luogo rappresentano una sfida, e secondariamente la soluzione di solito presenta un elemento di sorpresa. La sorpresa consiste o nel fatto che una risposta proprio ci sia, o nel fatto che la risposta è contraria a ciò che ci si attende. Questi aspetti avvicinano i giochi ad un altro fenomeno importante [...] che è quello dei paradossi». [Gabriele Lolli]*

La sorpresa, il paradosso o il risultato inatteso sono elementi stimolanti per l'attività cognitiva, sono un po' il gioco di prestigio di cui cerchiamo il trucco.

Quando un alunno risolve un problema o un gioco diventa un protagonista in quanto inventore o scopritore della soluzione; questo suo non essere più un soggetto passivo influisce positivamente sulla sua attenzione, sulla qualità dell'apprendimento e sulla sua motivazione. L'insegnante che affida la risoluzione di un problema o di un gioco ai suoi allievi in realtà consegna loro una responsabilità che consente la devoluzione della situazione (situazione a-didattica):

> *«In una situazione a-didattica l'insegnante, attraverso un insieme di condizioni che permettono all'allievo di appropriarsi della situazione, permette una **devoluzione** della situazione. La devoluzione consiste non soltanto nel presentare all'allievo il gioco al quale l'insegnante vuole che egli partecipi, ma anche nel fare in modo che l'allievo si senta responsabile, nel senso della conoscenza e non della colpevolezza, del risultato che egli deve cercare. La devoluzione fa appello alle*

motivazioni dell'allievo, il quale […] deve ricercare le strategie migliori che gli permettono di vincere. In conclusione la devoluzione è l'atto attraverso il quale l'insegnante fa accettare all'allievo la ***responsabilità*** *di una* ***situazione di apprendimento (a-didattica)*** *o di un problema e accetta lui stesso le conseguenze di questo transfert». [Spagnolo F., 1998]*

Mentre di solito l'unica responsabilità che un allievo ha è quella di utilizzare accuratamente formule ed algoritmi predefiniti, in una situazione a-didattica il responsabile del processo è l'alunno stesso, infatti la principale caratteristica del problem solving e del gioco è proprio la mancanza di un algoritmo definito o di uno schema di comportamento; in questo caso lo scopo è quello di trovare non tanto la soluzione, quanto il procedimento risolutivo che deve essere poi formalizzato in un secondo tempo.

Una situazione di questo genere però, può far sì che l'alunno si trovi quasi disorientato da tanta "libertà d'azione"; spesso la classica lezione frontale o una dimostrazione da imparare risultano più rassicuranti.

In realtà tutto ciò dipende dallo stile cognitivo che ogni singolo allievo ha: alcuni prediligono la scoperta, il poter spaziare e scoprire cose nuove, altri invece sono alla costante ricerca di uno schema predefinito che si limitano a seguire pedissequamente. In questo contesto assume un ruolo fondamentale la figura del docente che deve cercare di preparare gli studenti ad affrontare situazioni diverse, rispettando però il più possibile quella che è la natura del singolo studente.

2.3 Apprendimento formale ed apprendimento informale

Al giorno d'oggi si tende a distinguere l'apprendimento scolastico da quello non scolastico in modo molto netto; si è cominciato a definire

informale tutto ciò che non si apprende a scuola e, per contrasto, la parola formale sta diventando sempre più sinonimo di scolastico.
In particolare Pietro Cerreta li distingue elencandone una serie di proprietà:

Informale	**Formale**
Volontario	Obbligatorio
Casuale, non strutturato, non sequenziale	Strutturato e sequenziale
Non valutato e non certificato	Valutato e certificato
Senza restrizioni di tempo	Delimitato
Guidato da chi apprende	Guidato da chi insegna
Centrato su chi apprende	Centrato su chi insegna
Extrascolastico	Basato sulla classe e sul tipo di scuola
Non programmato	Programmato
Molti risultati non previsti (risultati più difficili da valutare)	Pochi risultati non previsti
Aspetto sociale centrale (ad es. apprendimento cooperativo)	Aspetto sociale marginale
Non diretto e senza legislazione	Istituzionalizzato e diretto (controllato)

Nell'apprendimento informale si vanno a collocare tutte quelle iniziative come musei delle scienze, mostre di giochi, festival della matematica e moltissime altre a me tanto care proprio per il contenuto altamente divulgativo. Onestamente però non credo si possa dire che una delle due metodologie sia meglio dell'altra ma ritengo che sia importante che un ragazzo possa acquisire il suo bagaglio personale attraverso entrambi i tipi di formazione: l'apprendimento formale può sembrare rigido ed obsoleto ma è fondamentale per un conoscenza chiara, completa e che funga poi da base per costruire nuove conoscenze, competenze e

capacità; dall'altro lato l'apprendimento informale, che appare dispersivo, incompleto e confusionale, riesce molto spesso dove la struttura classica fallisce perché ha dalla sua la capacità di suscitare curiosità e passione facendo sentire il ragazzo autore del proprio apprendimento, una apprendimento che diventa attivo e non più passivo.
La domanda che viene spontanea allora è: la scuola è capace di fare apprendimento informale? Se si come?
La risposta alla prima domanda è sicuramente "si" come mi è capitato di sperimentare più volte proprio con le iniziative del progetto lauree scientifiche o semplicemente assistendo alle lezioni della mia tutor; per quando riguarda la seconda domanda credo che il gioco ed il problem solving possono essere tra gli strumenti più validi per questo scopo, almeno nell'insegnamento della matematica.

2.4 Il gioco ed il problem solving nella didattica

Tutto il discorso fatto fin qui dunque può riassumersi nel dire che la scuola non può più essere il portabandiera solo dell'apprendimento formale ma deve farsi espressione di un superamento di queste distinzioni realizzando iniziative che abbiano come obiettivo l'apprendimento informale e soprattutto, cosa più difficile, sviluppando la capacità di fare da sintesi tra tutte le esperienze che i ragazzi fanno mirando a formare persone a 360°.

La didattica guarda al gioco ed al problem solving essenzialmente da due punti di vista:

1. **Il problema come mezzo**: utilizzare il problema per arrivare alla conoscenza attuando una "didattica per problemi", creando di volta in volta situazioni problematiche, anche sotto forma di gioco, da cui far scaturire le idee; in questo caso allora il problem solving è un mezzo,

uno strumento metodologico di cui avvalersi per perseguire gli obiettivi didattici.

2. **Il problema come obiettivo**: una didattica che sviluppi negli allievi l'attitudine alla risoluzione dei problemi; il problem solving diventa così un fine, è cioè, esso stesso obiettivo dell'intervento didattico. In relazione a ciò acquista particolare importanza sia imparare ad applicare ed adattare strategie risolutive a problemi diversi che monitorare il processo utilizzato nella risoluzione di un problema e riflettere su di esso.

2.4.1 Gioco e problem solving come metodo

Il problema e il gioco possono essere utilizzati come sorgente da cui far nascere idee per introdurre concetti teorici; si tratta di porre una questione a partire dalla quale possa nascere una congettura.

Piuttosto che seguire il tradizionale ordine didattico *top-down* tipico delle dimostrazioni, che lascia in ombra il modo in cui nascono i concetti, si può partire dal basso, da un caso problematico, risalendo via via ad un'idea rigorosa: in questo modo si attua un approccio costruttivo all'apprendimento della matematica.

Il percorso *bottom-up* è quello dell'analisi ed è il percorso che tipicamente si segue quando si è alla ricerca della soluzione di un problema; una volta definiti i passi di questo percorso, esso può essere codificato o eseguito nel senso *top-down* (sintesi).

Il metodo di analisi è importante dal punto di vista didattico in quanto sviluppa la logica e la capacità di problem solving, più che un sapere è un saper fare, un modo radicalmente diverso di procedere e di ragionare.

Vi sono anche altri aspetti per cui il gioco e il problem solving costituiscono una risorsa didattica:

- **La funzione positiva dell'errore**. La risoluzione di un problema consente all'alunno di trarre maggiore profitto dagli errori commessi, in quanto è curioso di scoprire cosa non ha funzionato nel suo ragionamento; a muoverlo c'è una sfida che aveva lanciato a se stesso nel cercare la soluzione.
- **La possibilità di intervenire sui modelli spontanei dei ragazzi**. I problemi ed i giochi possono essere impiegati per far emergere i modelli spontanei e i misconcetti degli allievi; possono cioè essere strutturati in modo da evidenziare e nello stesso tempo mettere in crisi i vari misconcetti per poter così intervenire su di essi.
- **L'opportunità di stimolare l'interesse per il pensiero matematico**. Come già detto anche sopra, si possono presentare sotto forma di gioco anche questioni di interesse storico, filosofico, ecc; uno tra gli esempi più celebri è senza dubbio quello della torre di Hanoi e del principio di induzione.

2.4.2 Problem solving come obiettivo

Risolvere i problemi è un'abilità vera e propria e, come tale, può essere acquisita con l'esercizio. E' necessario allora osservare ed imitare come vi riescono altre persone, ma si impara a risolvere i problemi soprattutto risolvendoli.

L'approccio ad un problema può essere di varia natura: intuitivo, sistematico, algoritmico, parziale per tentativi, per esclusione, ecc. Ogni allievo può rispondere meglio ad un approccio che ad un altro e, se si considera un problema nello specifico, alcuni metodi si rivelano migliori di altri; è importante però che gli studenti conoscano le varie alternative così che, posti di fronte ad un problema, abbiano una certa flessibilità che consente loro di scegliere lo strumento più adatto da utilizzare. Questa flessibilità di approccio si rivela molto utile anche in certi casi quando,

durante la risoluzione di un problema, può essere necessario cambiare il proprio punto di vista in quanto ci si accorge che la strada intrapresa inizialmente non ci sta conducendo alla soluzione.
Questa visione multiapproccio a giochi e problemi favorisce l'utilizzo e lo sviluppo di caratteristiche diverse e complementari quali intuito e progettualità, in netta contrapposizione alla tradizione logica dell'algoritmo e della "ricetta" predefiniti.
A livello didattico, quindi, è importante aiutare gli alunni a conoscere e a saper utilizzare quanti più tipi di approcci possibili, senza per questo mancare di valorizzare quelle che sono le caratteristiche peculiari dei singoli individui.
Partendo quindi dal presupposto che gli obiettivi del proporre un problema sono due:

1. aiutare lo studente a risolvere il problema proposto;
2. sviluppare l'abilità dello studente in modo che egli sia in grado di risolvere i problemi che dovrà affrontare successivamente;

diventa spontaneo chiedersi quanto e come un docente deve suggerire agli studenti i metodi risolutivi. Infatti da un lato lo studente lasciato da solo davanti ad un problema potrebbe bloccarsi e non fare progressi, d'altro canto se il docente è troppo prodigo di suggerimenti l'alunno potrebbe non sviluppare alcuna capacità. L'insegnante, quindi, dovrebbe intervenire nella giusta misura e aiutare il ragazzo in modo opportuno, fornendogli l'input necessario a procedere autonomamente nella ricerca della soluzione facendo in modo che impari a porsi le domande "giuste" nei problemi che affronterà in seguito.
Un possibile schema di domande-guida per fornire l'aiuto necessario è quello proposto da George Polya in *Come risolvere i problemi di matematica*:

> *«Per raggruppare opportunamente le domande ed i suggerimenti del nostro schema, distingueremo quattro fasi nello sviluppo del lavoro. Prima: si deve*

comprendere il problema; è necessario conoscere chiaramente cosa sia richiesto. Seconda: si devono scoprire i legami che intercedono fra le varie informazioni, fra ciò che si cerca e i dati, per rendersi conto del tipo di risoluzione e compilare un piano conveniente. Terza: si procede allo sviluppo del piano. Quarta: bisogna esaminare attentamente il risultato ottenuto e procedere alla sua verifica ed alla sua discussione», [Polya G., 1967:25].

Le domande indicate da G. Polya seguono questa classificazione in fasi:

1. **Comprensione del problema:** Quali sono i dati? Qual è l'incognita? Ci sono dati superflui? Ci sono dati nascosti? La condizione è sufficiente a determinare l'incognita? Non è sufficiente? È sovrabbondante? È contraddittoria?
2. **Compilazione di un piano:** Questo problema è noto? Si è già presentato sotto un aspetto diverso? È noto un problema connesso con questo? Si conosce un teorema che potrebbe essere utile? È possibile sfruttarlo? Si è fatto uso di tutti i dati? È possibile individuare problemi ausiliari necessari alla soluzione dell'intero problema? Si può scomporre il problema in sottoproblemi?
3. **Sviluppo del piano:** Sviluppando il piano si verifichi ogni passaggio. Si può dimostrarne l'esattezza?
4. **Verifica del piano:** Si può verificare il risultato? Si può ottenere il risultato in un altro modo? Lo si può vedere a colpo d'occhio?

«[…] tutto ciò che possono fare tali domande e suggerimenti è procurare all'investigazione un'elasticità sempre scattante. A chi è sul punto di darsi per vinto e di abbandonare ogni ulteriore tentativo di scoperta, essi dovrebbero essere in grado di suggerire un nuovo artificio, un nuovo aspetto ed una nuova variazione del problema, un nuovo incentivo». [Polya G., 1967: 163]

L'elenco di domande proposto non è utile soltanto a risolvere il problema, ma anche a riflettere sulla possibilità di sfruttare procedimenti noti, eventualmente adattandoli al problema proposto ed a monitorare il processo risolutivo riflettendo su di esso. Per sviluppare capacità di problem solving, infatti, bisogna non solo cercare di trovare la soluzione dei problemi, ma indagare ed esplicitare i motivi che hanno condotto alla scelta della strategia adoperata.

2.5 Intuizione e deduzione

E' inoltre importante, a mio parere, porre l'accento sull'importanza dell'equilibrio tra i vari metodi che un docente può utilizzare, in particolar modo tra intuizione e deduzione.

Da un lato ci sono la fantasia e l'idea e dall'altro il rigore logico e la formalizzazione, ma entrambi sono fondamentali*:*

> *La formalizzazione non uccide l'intuizione, ma la esprime*. *[Professore Alessandro Benedetti]*

E' dunque indispensabile che un professore trasmetta ai ragazzi, oltre ai metodi per affrontare un problema, gli strumenti necessari a formalizzarlo. Se in una prima fase può essere importante lavorare con il linguaggio extramatematico e lasciare briglia sciolta alle idee, successivamente diventa basilare trasmettere e pretendere il rigore in quanto si rischia che l'alunno, pur procedendo in modo corretto, non si curi di spiegare in termini precisi il ragionamento che ha seguito, considerando il fatto che molto probabilmente il più delle volte non detto che sia in grado di farlo.

E' necessario invece che i ragazzi imparino ad usare il linguaggio matematico ed i suoi modelli per esprimersi:

- Nel caso di un teorema lo studente deve esplicitare le ipotesi e la tesi, in seguito deve saper esporre la sequenza di passaggi, o di deduzioni logiche, che partendo dalle ipotesi conducono alla tesi.
- Nel caso di un problema il ragazzo deve saper individuare ed esprimere correttamente i dati eliminando eventualmente quelli superflui, deve poi individuare ed esplicitare l'incognita (o le

incognite) e le relative limitazioni; a questo punto si deve esporre la sequenza di passaggi matematici che portano alla soluzione.

- In entrambi i casi è bene che gli alunni sappiano anche esplicitare il metodo utilizzato; ad esempio una dimostrazione può essere per assurdo, diretta, ecc; un problema può essere affrontato con una tecnica top-down, bottom-up, ecc.

A seconda della situazione si può anche portare gli studenti verso una maggiore formalizzazione facendo loro elaborare un processo di sintesi che porti dalla soluzione del problema al modello secondo i seguenti passaggi:

- individuazione dello scopo,
- simbolizzazione dei dati,
- individuazione ed esplicitazione dello stato iniziale,
- individuazione ed esplicitazione dello stato finale,
- individuazione ed esplicitazione dei vincoli (stati possibili e stati impossibili),
- individuazione degli operatori di trasformazione che mi permettono di passare da uno stato all'altro,
- esplicitazione della sequenza di stati-operatori che porta dallo stato iniziale a quello finale,
- eventuale ricerca della soluzione ottimale.

Per esercitare gli allievi a fare queste operazioni di automonitoraggio è opportuno che l'insegnante, risolvendo un problema in classe, rivolga a se stesso a voce alta le stesse domande che pone ai ragazzi esplicitando tutti i passaggi ed i ragionamenti e sia lui stesso a guidarli gradualmente verso un linguaggio specifico ed una capacità di formalizzazione.

Non dimentichiamo che Archimede intuiva i suoi risultati non immergendosi nella vasca da bagno, ma tramite un "metodo" comunque formalizzato, anche se non accettabile all'epoca come valido; una volta trovato un risultato lo formalizzava e lo dimostrava usando il ragionamento deduttivo tipico delle dimostrazioni.

La risoluzione di un problema richiede tutte e tre le fasi compiute dal grande matematico e non possiamo accettare di fermarci alla prima solo perché ci ha fatto intuire il risultato.

3. L’esperienza della SSIS

Ho scelto di effettuare le ore di tirocinio diretto presso il liceo scientifico principalmente per tre motivi:

- La preparazione notevole della docente: in passato ho avuto modo di collaborare con la professoressa per la realizzazione di alcuni laboratori all’interno del progetto “Lauree Scientifiche”; durante questo periodo ho potuto apprezzare la sua preparazione e soprattutto la sua voglia di sperimentare nuove idee e proposte senza mai rinunciare a mettersi in discussione per migliorare continuamente.
- Il livello delle classi: la docente insegna in un triennio ad indirizzo PNI (Piano Nazionale di Informatica) per cui ha a disposizione cinque ore settimanali in ciascuna classe; gli studenti hanno una preparazione piuttosto elevata e si dimostrano attenti ed interessati alle lezioni. L’insieme di questi due fattori consente di svolgere un programma di matematica e fisica molto ampio e soprattutto di trattare i vari argomenti in modo approfondito e completo.
- La qualità dell’Istituto: all’interno della scuola, oltre a diversi laboratori di fisica e di matematica, è presente anche il “museo della matematica”, uno strumento estremamente valido per un insegnamento non banale della materia.

  Inoltre la scuola è resa viva e pulsante, anche grazie all’attuazione di numerosi progetti extrascolastici che contribuiscono ad aumentare l’interesse degli studenti nei confronti di varie discipline.

3.1 Gioco e problem solving nel liceo scientifico PNI

Il tirocinio diretto prevede una prima fase di osservazione delle strutture e degli organi scolastici e poi un’analisi dei curricoli delle classi in cui si effettua il tirocinio; in questa fase ho avuto modo di constatare che tra le finalità e gli obiettivi di apprendimento indicati dal P.N.I. per il triennio ci sono alcuni punti che risultano particolarmente interessanti in quanto inerenti i concetti di gioco e di problem solving.

Una delle **finalità** suggerite dal P.N.I. è:

> *«la capacità di utilizzare metodi, strumenti e modelli matematici in situazioni diverse».*

Mettere in pratica questa cosa implica che gli allievi sappiano disporre autonomamente degli strumenti matematici appresi, in modo da applicarli ai contesti più vari e che il docente sia capace di contestualizzare gli argomenti di insegnamento in ambiti applicativi estesi e diversificati.

E' inoltre richiesto un continuo passaggio dal modello al contesto e viceversa.

Tra gli **obiettivi di apprendimento** illustrati dal P.N.I. è interessante porre l'accento sui seguenti:

1. *«Sviluppare dimostrazioni all'interno di sistemi assiomatici proposti o liberamente costruiti».*

Un'abilità del genere non si può certo ottenere imparando a memoria le dimostrazioni di alcuni teoremi, è necessario invece l'utilizzo consapevole degli strumenti logici e matematici necessari così che lo studente acquisisca un'autonomia nello sviluppo di semplici dimostrazioni. A tal fine può essere utile lo svolgimento di esercizi in cui si procede a ritroso, ossia dalla conclusione del teorema alle premesse, passando attraverso lo studio della necessità dei vari passaggi (processo di analisi); una volta acquisita una certa abilità in questo tipo di procedimento ci si può cimentare nella risoluzione di qualche problema di dimostrazione.

4. *«Affrontare situazioni problematiche di varia natura avvalendosi di modelli matematici atti alla loro rappresentazione».*

L'*«affrontare situazioni problematiche»* attribuisce all'insegnamento della matematica il compito di insegnare a pensare *per uno scopo,* in contrapposizione ad un insegnare a ragionare che rimane confinato alle sfere dell'astrazione e degli aspetti formali; d'altro canto, evidenziare il fatto che le problematiche da affrontare siano *«di varia natura»* mette in luce l'importanza di mostrare ai ragazzi applicazioni degli strumenti matematici e fisici appresi che non siano banali esercizi inventati, ma reali contestualizzazioni.

In questo modo la matematica cessa di sembrare una disciplina sterile che ha ragione di esistere in sé e solo in sé e che si occupa esclusivamente di oggetti astratti senza alcun legame (apparente) con i problemi concreti della realtà.

> *5. «Costruire procedure di risoluzione di un problema e, ove sia il caso, tradurle in programmi per il calcolatore».*

Uno degli aspetti concernenti il problem solving su cui si sta ponendo sempre più l'accento è quello di capire in quale modo si possa rendere la risoluzione di un problema automatica e trasferibile sul computer.

Chiaramente una simile riflessione implica un legame maggiore tra l'insegnamento della matematica e quello dell'informatica, ma presuppone anche un esame attento dell'approccio al problema che consenta, sia all'alunno che al docente, di scegliere un metodo risolutivo che sia il più possibile semplice, economico, generalizzabile, efficiente ed efficace.

Questo processo privilegia la cosiddetta attività metacognitiva.

E' chiaro che, in un'ottica del genere, il gioco ed il problem solving diventano strumenti didattici di grande importanza, grazie ai quali gli studenti non si limitano più a ripetere definizioni e teoremi o ad eseguire meccanicamente degli esercizi predefiniti; diventano invece menti in grado di utilizzare sì gli strumenti matematici classici, ma con notevole flessibilità e creatività.

Questi due nuovi mezzi consentono inoltre di aumentare il bagaglio di conoscenze degli alunni e di arrivare a risultati che forse non sarebbe possibile raggiungere attraverso la didattica classica.

3.2 Analisi di una situazione problematica e scelta dell'intervento

Come esposto in precedenza il contesto in cui ho svolto il tirocinio diretto è un triennio di liceo scientifico ad indirizzo PNI; la docente ha cinque ore settimanali in ciascuna classe, la preparazione degli studenti è abbastanza elevata ed essi sono per lo più attenti ed interessati alla materia.

Grazie alle condizioni piuttosto favorevoli in cui ho potuto svolgere il mio tirocinio e che ho illustrato in precedenza, in aula abbiamo avuto la possibilità di spaziare molto all'interno del programma, di approfondire gli argomenti e di fare collegamenti con la storia e la filosofia.

Durante i primi due semestri di tirocinio ho avuto modo di osservare che nell'introdurre un argomento la professoressa cerca sempre di partire dalla realtà, da problemi concreti che i ragazzi possono incontrare.

Un'altro metodo che utilizza consiste nel passare da un argomento all'altro seguendone l'evoluzione storica e ponendo i ragazzi di fronte agli ostacoli che incontrarono i matematici del passato in modo da far cimentare loro stessi nella risoluzione del problema.

Ho potuto constatare che entrambi questi metodi suscitano un grande interesse per la materia, sviluppano il ragionamento, la consapevolezza di ciò che si sta facendo, la coscienza temporale dell'evolversi della matematica e portano a creare legami interdisciplinari, oltre che un clima in classe di collaborazione e scambio.

Il problema è che non sempre si riesce a presentare gli argomenti in questo modo: se da una parte con la matematica del quinto anno la cosa riesce piuttosto bene (così come, ad esempio, con il calcolo della probabilità), dall'altra ci sono dei moduli nei programmi che si fa fatica a collegare con la realtà, in quanto presuppongono che gli studenti abbiano conoscenze più ampie rispetto a quelle che solitamente possiede uno studente liceale; un esempio tipico è quello rappresentato dal modulo sulle matrici ed i sistemi lineari. Questo argomento, che la mia tutor inserisce nel programma del quarto anno, è difficilmente collocabile nella realtà di tutti i giorni, in particolar modo per dei ragazzi di 17-18 anni, per i quali questa parte tende a rimanere piuttosto asettica, astratta e priva di interesse.

3.3 Obiettivi dell'intervento

Alla luce dell'analisi effettuata, io e la tutor abbiamo pensato ad un intervento che avesse come fine lo svolgimento dell'unità didattica sui sistemi lineari e che usasse come mezzi il gioco ed il problem solving.

Proprio la scelta di questi metodi didattici arricchisce l'intervento stesso di una serie di obiettivi importanti tanto quanto l'apprendimento dell'argomento in sé: uno è sicuramente quello di mostrare ai ragazzi un lato interessante, concreto e anche un po' giocoso delle matrici e dei sistemi lineari; un altro obiettivo è quello di aiutarli a scoprire strategie e metodi di lavoro da utilizzare quando si è di fronte ad un problema totalmente nuovo. In questo modo i ragazzi si trovano a dover essere in grado di interpretare il problema in modo matematico e, in un secondo tempo, di cercare tra gli strumenti che hanno a disposizione quello più adatto a rappresentarlo ed a risolverlo.

Il fine diventa dunque, oltre a far acquisire agli studenti conoscenze e capacità nell'ambito dei sistemi lineari, quello di formare ragazzi capaci di affrontare problemi e consapevoli del fatto che la scuola, da questo punto di vista, è una palestra fantastica.

Un ulteriore obiettivo infine è quello di far cambiare totalmente prospettiva agli studenti facendoli porre nei panni di chi deve costruire un problema e deve scegliere la logica migliore per farlo.

3.4 Inquadramento nella classe e nella programmazione

Il mio intervento si colloca in una classe quarta di un liceo scientifico PNI ma resta comunque ampiamente esportabile in altri i contesti.
Nello specifico la classe quarta in cui insegna la professoressa è composta da pochi studenti, in media abbastanza preparati, con la presenza di uno o due elementi di spicco per la materia. I ragazzi sono abituati a lavorare molto ed in modo non superficiale, in classe sono sempre attenti e interagiscono molto; questo contesto mi ha notevolmente aiutato nello svolgimento delle lezioni.

L'intervento copre l' unità didattica dei sistemi lineari all'interno del modulo *Matrici e sistemi lineari*. Tale modulo è stato così strutturato:
Obiettivi fondamentali:

- Saper operare con matrici
- Saper risolvere sistemi lineari

Prerequisiti: insiemi numerici
Tempi previsti: un mese
Suddivisione in unità didattiche:

	Contenuti	**Obiettivi**
Unità 1	• Insiemi dotati di operazioni e relative strutture algebriche	• Saper associare agli insiemi dotati di operazioni la corrispondente struttura algebrica

Unità 2	• Matrici e vettori; operazioni tra matrici e proprietà relative • Determinante di una matrice quadrata e proprietà relative • Spazi vettoriali di vettori e di matrici su $\mathbb{R}$ • L'insieme delle matrici quadrate e la relativa struttura algebrica	• Saper operare con le matrici • Saper riconoscere situazioni o problemi interpretabili in forma matriciale • Saper utilizzare le proprietà per calcolare determinanti
Unità 3	• Sistemi lineari $n \times n$ e risoluzione con il metodo di Cramer • Rango di una matrice • Teorema di Rouché-Capelli e analisi di sistemi $m \times n$ • Sistemi omogenei	• Saper riconoscere le tipologie dei sistemi e valutarne la risolubilità • Saper riconoscere ed applicare i metodi risolutivi più opportuni • Saper analizzare sistemi con parametri • Saper applicare le conoscenze acquisite a situazioni di vario tipo

Metodologie: lezione frontale, lezione dialogata, laboratorio, lavori di gruppo e discussioni guidate.

Strumenti: libro di testo, appunti dell'insegnante, software didattico.

Verifiche: sono previste una verifica scritta al termine di ogni unità didattica ed un'altra scritta al termine del modulo. Le verifiche orali vengono effettuate lungo tutto il corso del modulo in modo da poter monitorare l'andamento e la comprensione e si svolgono principalmente sotto forma di dialogo dal posto, interventi durante la lezione ed interrogazioni alla lavagna.

3.5 L'intervento attivo

3.5.1 Struttura

L'intervento attivo si è svolto nel mese di dicembre, inizialmente era stato pensato della durata di otto ore così suddivise:

1 ora Presentazione di un gioco tratto da una rivista enigmistica, tentativi spontanei di risoluzione da parte dei ragazzi, scelta della strategia migliore per affrontare il problema, analisi degli strumenti matematici utilizzati.

2 ore Formalizzazione del problema visto in precedenza; analisi e ripasso delle conoscenze pregresse dei ragazzi sui Sistemi lineari e sui vari metodi risolutivi. Focalizzazione sul metodo di Cramer, generalizzazione del metodo e dimostrazione della sua validità. Riconsiderazione del problema iniziale alla luce dei nuovi metodi risolutivi. Generalizzazione ed estensione del metodo risolutivo a problemi simili.

1 ora Presentazione di due problemi all'apparenza analoghi ai precedenti ma la cui analisi e risoluzione con i metodi sopra elencati è lunga ed insoddisfacente in modo da aprire la strada alla ricerca di nuovi metodi e nuovi concetti.

1 ora Definizione del Rango di una matrice e metodi di calcolo.
Teorema di Rouché-Capelli.

1 ora Applicazioni del teorema Rouché-Capelli al problema in analisi sia nella sua forma iniziale che nelle varianti presentate in seguito.

1 ora Verifica formativa scritta strutturata sui sistemi lineari, il metodo di Cramer ed il teorema di Rouché-Capelli.

1 ora Discussione sulla verifica e sulle conoscenze, competenze e capacità acquisite.

Purtroppo però gli studenti hanno perso moltissimi giorni di scuola all'inizio dell'anno tra scioperi e problemi interni, la professoressa si è trovata indietro con il programma e abbiamo dovuto ripensare la programmazione dell'intervento. Prima di tutto abbiamo deciso di eliminare la verifica formativa e la relativa discussione accorpandole nella verifica sommativa di fine modulo e relativa discussione. Le restanti sei ore sono state ripensate in modo da essere concentrate in quattro ore lasciando da svolgere a casa una parte del lavoro; questo è stato possibile grazie alla buona preparazione della classe.

Il nuovo schema di lavoro è stato il seguente:

1 ora Presentazione di un gioco tratto da una rivista enigmistica, tentativi spontanei di risoluzione da parte dei ragazzi, scelta della strategia migliore per affrontare il problema, analisi degli strumenti matematici utilizzati. Formalizzazione del problema utilizzando i sistemi lineari. Si è lasciato come compito per casa la risoluzione del sistema ed il ripasso dei metodi noti per la risoluzione di sistemi lineari.

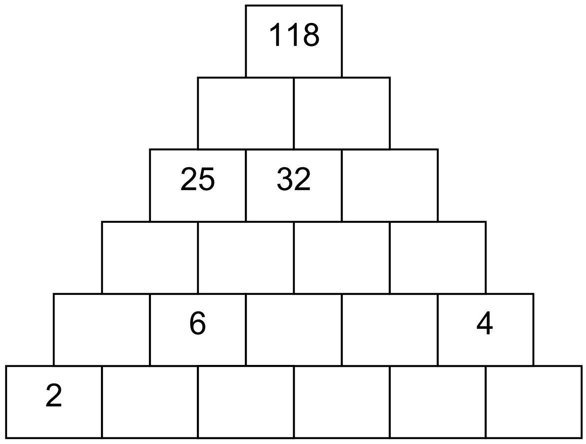
1 ora Il metodo di Cramer, generalizzazione del metodo e dimostrazione della sua validità. Riconsiderazione del problema iniziale alla luce dei nuovi metodi risolutivi.

2 ore Presentazione di due problemi all'apparenza analoghi ai precedenti ma la cui analisi e risoluzione con i metodi sopra elencati è lunga ed insoddisfacente in modo da aprire la strada alla ricerca di nuovi metodi e nuovi concetti. Introduzione del concetto di rango di una matrice e calcolo del rango nei problemi presentati. Il teorema di Rouché-Capelli. La triangolarizzazione delle matrici.

3.5.2 Svolgimento

Tutte le lezioni dell'intervento sono state svolte in laboratorio in modo da poter utilizzare sia la lavagna che il proiettore, per ogni lezione ho infatti preparato una o più presentazioni da proiettare per coinvolgere al meglio i ragazzi.

La **prima lezione** è iniziata dunque con la presentazione di un gioco tratto da una rivista di giochi enigmistici, logici e matematici (BrainTrainer): la “sommiramide”



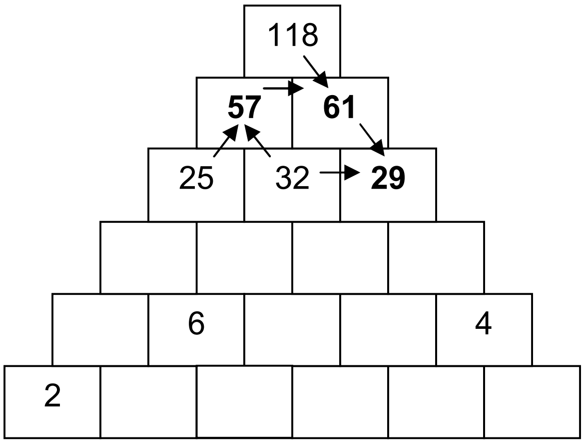
consistente in un piramide con una base di sei caselle sormontata da una fila di cinque e così via fino alla cima composta da un’unica casella. Nelle caselle sono inseriti dei numeri e l’unica regola è che il valore presente in ognuna sia la somma dei due numeri sottostanti. Lo scopo del gioco è completare la piramide inserendo i numeri mancanti.

Ho distribuito ad i ragazzi un foglietto a testa contenente il gioco ed ho lasciato loro 10 minuti per risolverlo procedendo con tentativi spontanei, intanto io e la tutor giravamo tra i gruppetti per monitorare l’andamento. Questa prima fase è stata molto interessante in quanto mi ha permesso di capire quali strategie mettono in atto i ragazzi davanti ad un problema totalmente nuovo.

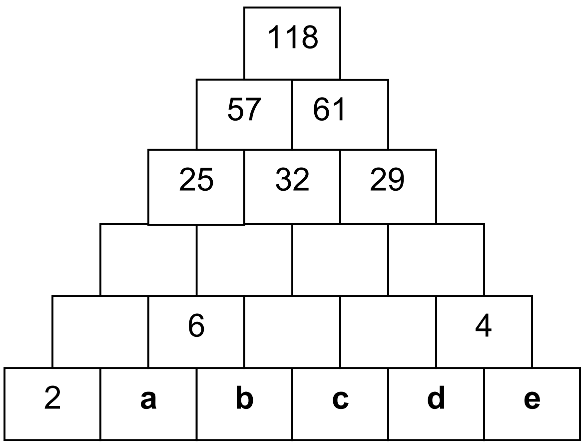
Passati i dieci minuti ho chiesto agli alunni quale fosse la soluzione e come avevano fatto a trovare tale risultato, ho speso i successivi 10 minuti nell’ascoltare i vari metodi risolutivi dei ragazzi. Le idee ed i metodi sono risultati molto brillanti e quasi tutti hanno risolto il problema ma per lo più andando a tentativi o al contrario usando calcoli molto complessi ed inutili.

Qualcuno comunque si è avvicinato all’idea della soluzione ottimale ma restavano delle complicazioni e degli errori; ripartendo da questa proposta

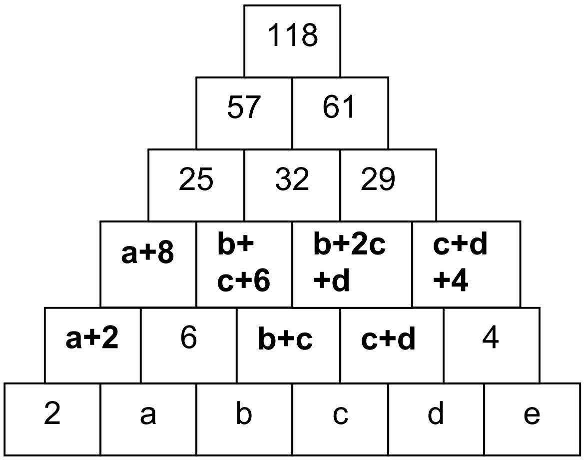
e con l’ausilio delle slide preparate (Allegato Lezione 1) ho mostrato il metodo migliore per affrontare questo specifico problema.
La prima cosa da fare è sempre quella di osservare, si può ora individuare agilmente un punto di partenza che consiste nell’inserire il numero 57, si prosegue con passaggi elementari fino ad arrivare alla seguente situazione



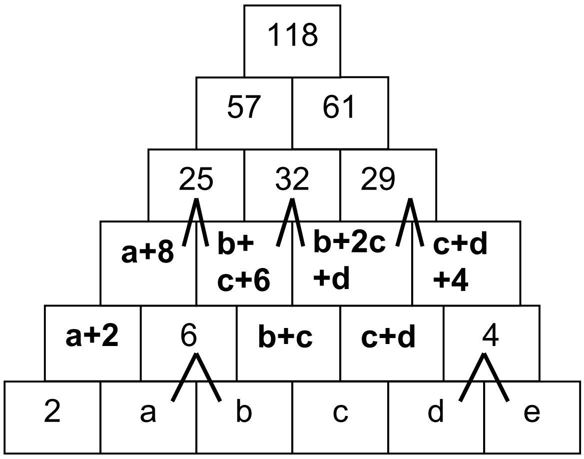
Adesso però la strategia usata fin’ora non basta più, bisogna cercare un nuovo metodo risolutivo; molti ragazzi hanno proposto a questo punto di mettere delle lettere nelle caselle vuote, l’idea è valida ma bisogna scegliere la strategia migliore, quella ottimale; discutendo e facendo un po’ di prove gli alunni stessi hanno concluso che l’idea migliore è quella di posizionare delle lettere nella linea di caselle alla base



e poi “portarle su” tramite la somma ottenendo il seguente schema



Come giustamente pensato dai ragazzi si può ora far corrispondere alla sommiramide il sistema lineare che impone una condizione per ogni casella numerica che poggia su almeno una casella letterale, nel nostro caso il sistema nasce dai seguenti “nodi”



E diventa

$$\begin{cases} a+b=6 \\ d+e=4 \\ 14+a+b+c=25 \\ 2b+3c+d+6=32 \\ b+3c+2d+4=29 \end{cases}$$

La prima lezione si è conclusa qui lasciando ai ragazzi, come compiti a casa la risoluzione del sistema ed il ripasso dei metodi risolutivi per i sistemi lineari studiati al biennio .

Complessivamente questa prima lezione può pensarsi suddivisa in due parti: nella prima la metodologia è quella del lavoro di gruppo, ho visto i ragazzi lavorare bene, con grande entusiasmo forse dovuto alla competizione o alla forma giocosa con cui è stato presentato l'argomento. Nella seconda parte invece il metodo utilizzato è stato quello della lezione dialogata, forse il tipo di lezione che mi si addice maggiormente. Ho cercato di far partire il tutto dai ragazzi stessi, dalle loro proposte e dalle loro domande creando una lezione molto interattiva e poco imposta dall'alto, senza comunque perdere mai di vista il filo logico, lo schema preparato e l'obiettivo finale

La **seconda lezione** si è svolta, come la prima, nel laboratorio di informatica in modo da poter utilizzare il proiettore. La lezione aveva come argomento il teorema di Cramer e la sua dimostrazione, essendo questo argomento un po' difficile e comunque con contenuti importanti ho fornito ai ragazzi una copia cartacea delle slide (allegato Lezione 2) che avrei proiettato in modo che potessero prendere appunti.

Prima di tutto ho però chiesto ai ragazzi se avessero risolto il sistema lasciato per casa e con quale metodo, insieme abbiamo evidenziato che il metodo di gran lunga più usato è sempre quello di sostituzione ma questa tecnica può portare delle volte a calcoli lunghi, complicati e noiosi.

Ho poi richiamato l'attenzione sul metodo di Cramer osservando come fosse stato fino ad allora poco usato e cercando, insieme agli studenti di capirne il perché; le risposte ottenute vertevano intorno al fatto che questo metodo risultasse più complicato di quanto sia in realtà e che comunque è una formula che avevano ricevuto dall'alto senza sapere come mai funzioni e come sia venuta in mente al suo ideatore. Questo è uno dei problemi di cui parlavo al capitolo precedente: sicuramente fornire una regola agli alunni senza far capire loro da dove nasca e perché funzioni aiuta a vedere la matematica come una scienza incomprensibile e fatta per pochi eletti.

A questo punto, tramite le slide preparate, ho riproposto tale formula e proposto loro di capire insieme da dove venisse e come mai funzioni: la formula di Cramer si studia al biennio per i sistemi di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

fornendo la soluzione $x_1 = \dfrac{|B_1|}{|A|}$ e $x_2 = \dfrac{|B_2|}{|A|}$ dove

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \text{ e } B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

ciò è poi generalizzabile ad un sistema di n equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $x_1 = \dfrac{|B_1|}{|A|}, x_2 = \dfrac{|B_2|}{|A|}, ..., x_n = \dfrac{|B_n|}{|A|}$

Per capire la provenienza della formula si può considerare un sistema di tre equazioni in tre incognite e poi generalizzare al caso n-simo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Chiamiamo A la matrice dei coefficienti, x il vettore delle incognite e b il vettore dei termini noti:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Tramite le matrici e le loro proprietà il sistema può essere scritto nella **forma vettoriale Ax=b**. L'algebra delle matrici ci dice che se A è invertibile si può moltiplicare a sinistra per A^{-1}:

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

I ragazzi stessi hanno ricordato la formula per il calcolo della matrice inversa, allora la soluzione del sistema diventa

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{31} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Dove $A_{i,j}$ è il complemento algebrico del termine a_{ij}. Dunque x è il vettore colonna dato da

$$x = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 \end{pmatrix}$$

Ho chiesto ora ai ragazzi di considerare il primo termine

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\left(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3\right)$$

e di fare delle osservazioni, ragionando hanno capito che, a parte una costante moltiplicativa, x_1 è la somma di tre prodotti i cui fattori sono un numero ed un complemento algebrico: questo può essere visto come un determinante. A questo punto non resta che cercare di capire quale è la matrice che ha questo valore come determinante, dopo un breve dibattito ho cercato di portare i ragazzi a fare il seguente ragionamento: sappiamo che A_{11} è il complemento algebrico di a_{11} rispetto alla matrice A; dunque b_1 deve occupare la "posizione" di a_{11} in A; allo stesso modo b_2 deve occupare la "posizione" di a_{21} e b_3 quella di a_{31}. In conclusione la matrice è

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

e la soluzione x_1 è data da $x_1 = \frac{|B_1|}{|A|}$ e allo stesso modo

$$x_2 = \frac{|B_2|}{|A|} \text{ e } x_3 = \frac{|B_3|}{|A|}$$

dove B_2 e B_3 sono le matrici formate da A sostituendo, rispettivamente, alla seconda ed alla terza colonna la colonna dei termini noti.

E questa è proprio la formula di Cramer per un sistema di tre equazioni in tre incognite.

Ho lasciato come compito a casa quello di risolvere nuovamente il sistema del gioco di partenza utilizzando però il metodo di Cramer.

Tranne una breve parte introduttiva più dialogata la lezione si è svolta principalmente con il metodo della lezione frontale.

Inerentemente alla dimostrazione del teorema ho scelto di svolgere tutti i passaggi, anche i più banali, senza dare niente per scontato e cercando in ogni nuovo elemento il riscontro da parte della classe sulla comprensione di quanto detto. I ragazzi, dal canto loro, sono stati attenti ed hanno interagito abbastanza, soprattutto se stimolati con domande e provocazioni. Ho notato soprattutto che prendevano appunti negli spazi appositamente lasciati nella dispensa.

Infine devo ammettere che effettuare una lezione frontale, in cui il docente spiega seguendo un suo filo logico, è un po' più semplice rispetto alla lezione dialogata: quest'ultima infatti comporta una certa maestria nel non perdere la rotta a seguito degli stimoli prodotti dai ragazzi.

Anche la **terza lezione** si è svolta totalmente in laboratorio, la possibilità di svolgere questa parte in due ore consecutive mi ha permesso di trattare l'ultimo argomento, il più importante, in modo completo ed omogeneo, senza doverlo interrompere e riprendere in seguito con il rischio di perdere il filo logico del discorso.

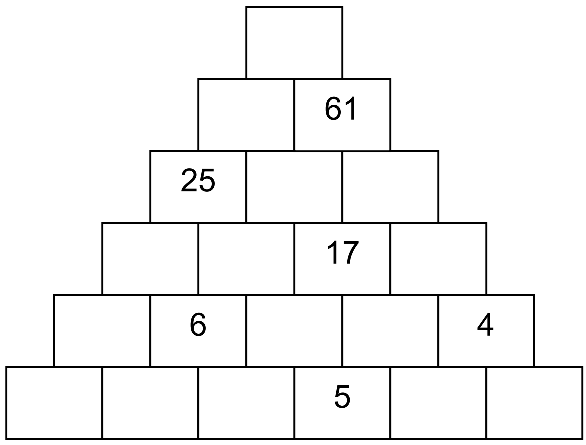
Sempre in riferimento alla quantità di tempo a disposizione ho deciso di alternare momenti di lezione dialogata a momenti di lezione frontale inserendo all'inizio un piccolo laboratorio in cui i ragazzi potessero lavorare ancora una volta in gruppi.

Come prima cosa ho chiesto un riscontro sull'esercizio lasciato per casa e sulla lezione precedente in modo che se ci fossero dubbi ed incomprensioni si potessero chiarire prima di andare avanti; poi ho proposto ai ragazzi una serie di domande:

- come si crea una sommiramide?
  in realtà le incognite sono sei, cioè i valori delle caselle che sono alla base, le condizioni consistono semplicemente nel mettere delle cifre nelle caselle (alla base e non),
- allora basterebbe mettere sei valori?
  no!! Innanzitutto anche se il sistema è univocamente determinato in $\mathbb{R}$ abbiamo visto che non è detto che lo sia in $\mathbb{N}$

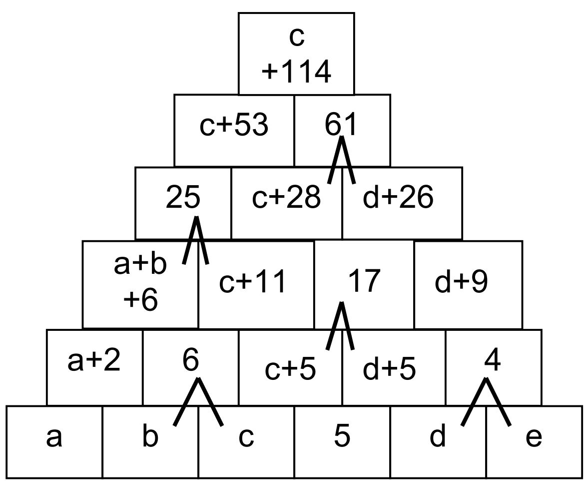
- allora invece di partire da una piramide vuota e mettere qualche valore qua e là partiamo da una piramide già completa e scegliamo di mostrare soltanto qualche valore?
- va già meglio ma anche qui si possono creare dei problemi, come nei casi seguenti, in cui si parte dalla sommiramide dell'esercizio precedente e si sceglie di "rendere noti" solo alcuni valori, ad esempio consideriamo la seguente disposizione

Ho distribuito dunque loro un foglio con nuovo problema, all'apparenza identico alla sommiramide iniziale



ed ho chiesto loro di risolverlo lavorando in gruppi.

Quasi subito i ragazzi hanno incontrato delle difficoltà in quanto il problema non era univocamente determinato. A questo punto ho formalizzato la situazione tramite le slide (allegato Lezione 3), infatti usando il metodo della prima lezione si ha



il cui corrispondente sistema è

$$\begin{cases} b+c=6 \\ d+e=4 \\ c+d+10=17 \\ a+b+c+17=25 \\ c+d+54=61 \end{cases}$$

che riordinato diventa

$$\begin{cases} b+c=6 \\ d+e=4 \\ c+d=7 \\ a+b+c=8 \\ c+d=7 \end{cases}$$

Si vede subito che ci sono due equazioni identiche, i ragazzi hanno fatto molti interventi a questo punto della lezione dichiarando il sistema come indeterminato: ci sono infinite soluzioni e possiamo risolverlo tramite l'inserimento di un parametro, infatti ponendo c=k si ha a=2, b=6-k, c=k, d=7-k, e=k-3.

Ho fatto però notare loro che il sistema ha infinite soluzioni in $\mathbb{R}$ ma il gioco fa riferimento a numeri naturali, allora quante saranno le soluzioni?

Bisogna imporre che in ogni casella ci sia un numero naturale cioè

$$\begin{cases} 6-k \geq 0 \\ k \geq 0 \\ 7-k \geq 0 \\ k-3 \geq 0 \end{cases} \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

da cui si ottengono quattro diverse soluzioni per k = 3; 4; 5; 6.

Ma, alla luce di tutto ciò, sappiamo creare una sommiramide impossibile? Di fronte a questa domanda i ragazzi sono stati molto veloci nel rispondere trovando la soluzione nel creare un sistema impossibile e procedere a ritroso. Sempre tramite le slide ho mostrato loro come in realtà per fare ciò bastasse cambiare una cifra nel sistema risolutivo passando

da $\begin{cases} b+c=6 \\ d+e=4 \\ c+d=7 \\ a+b+c=8 \\ c+d=7 \end{cases}$ a $\begin{cases} b+c=6 \\ d+e=4 \\ c+d=7 \\ a+b+c=8 \\ c+d=8 \quad \longleftarrow \end{cases}$

si vede subito che usando il metodo di riduzione tra la terza e la quinta riga si ha 0 = -1 e dunque il sistema è impossibile; per ottenere questo sistema basta mettere 62 al posto di 61 nella sommiramide.

Una sommiramide, così come un sistema, può essere dunque determinata, indeterminata o impossibile ma potrei accorgemene solo alla fine, dopo svariati calcoli; non c'è un modo per capirlo prima? Esiste un metodo per capire la natura di un sistema senza andare a risolverlo?

Da qui in poi la lezione è passata da dialogata a frontale, effettuata comunque cercando di stimolare l'attenzione e l'intervento dei ragazzi, sempre con l'ausilio delle slide (allegato Lezione 4).

Come prima cosa ho introdotto il concetto di rango: data una matrice A nxm, si chiama **sottomatrice di A** ogni matrice quadrata ottenuta selezionando p righe e p colonne di A, con $p \leq \min(m, n)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{23} & a_{25} & a_{26} \\ a_{33} & a_{35} & a_{36} \\ a_{53} & a_{55} & a_{56} \end{pmatrix}$$

Data una sottomatrice di A pxp, il suo determinante si chiama **minore di ordine p della matrice A**.

Si dice **rango di una matrice A, r(A),** il massimo ordine dei minori non nulli che si possono estrarre da A.

Ho scelto di dare prima la definizione formale e poi di far capire il concetto in modo più intuitivo, con esempi e ragionamenti; ritengo molto importante far lavorare i ragazzi sia in modo intuitivo ed informale sia con ragionamenti di tipo deduttivo o usando un linguaggio e delle strutture formali. Gli studenti devono sviluppare l'elasticità mentale per passare da una forma di ragionamento all'altra, devono intuire una soluzione, legge, definizione ma devono imparare a formalizzarla usando il linguaggio specifico.

Proseguendo con la lezione ho proposto ai ragazzi di calcolare il rango delle matrici corrispondenti ai sistemi delle sommiramidi partendo dalla prima

$$\begin{cases} a+b=6 \\ d+e=4 \\ a+b+c=11 \\ 2b+3c+d=26 \\ b+3c+2d=25 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Se una matrice A è quadrata il suo rango può essere al massimo il suo ordine, la prima cosa da fare in questo caso è calcolare det(A): se è diverso da zero allora il rango è massimo. Nel nostro caso det(A) = -3 e dunque il rango è 5.

Con analogo ragionamento i ragazzi hanno calcolato il rango di A nel caso del sistema indeterminato ed impossibile: in entrambi il rango è 4, si osserva infatti che la matrice dei coefficienti è identica mentre ciò che varia è la colonna dei termini noti; sempre tramite il dibattito è nata l'idea di affiancare la colonna dei termini noti alla matrice dei coefficienti e calcolare il rango di questa nuova matrice ottenendo la seguente situazione

Determinato	Indeterminato	Impossibile
r(A)=5	r(A)=4	r(A)=4
r(Ab)=5	r(Ab)=4	r(Ab)=5

Guidati da me, ragionando sul numero delle incognite e sui risultati ottenuti i ragazzi sono praticamente arrivati ad una formulazione del teorema di Rouché-Capelli nel caso specifico in analisi.

Il passo successivo è stato quello di passare da una intuizione ad una formalizzazione generalizzando il teorema fino ad arrivare alla sua formulazione generale:

Dato un sistema di n equazioni in m incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Se **r(A) < r(Ab)** il sistema non ammette soluzioni, è **impossibile**.

Se r(A) = r(Ab) il sistema ammette soluzioni.

In particolare

Se **r(A) = r(Ab) = m** il sistema è **determinato**.

Se **r(A) = r(Ab) = r < m** il sistema è **indeterminato**

ed ammette ∞^{m-r} soluzioni, cioè la soluzione dipende da m-r parametri.

Con la tutor abbiamo deciso di presentare questo teorema senza dimostrazione; per far comunque comprendere ai ragazzi la sua veridicità e avere un'idea di come sia nato il risultato ho deciso di mostrare loro il processo di triangolarizzazione delle matrici; oltretutto alcuni procedimenti di base li conoscevano già. Prendendo ad esempio un sistema di 3 equazioni in 3 incognite si ha

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ -x-z=0 \end{cases} \Rightarrow Ab=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

triangola rizzando la matrice Ab si ottiene

$$Ab=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

dopo aver osservato che in una matrice triangolare il determinante coincide con il prodotto dei valori sulla diagonale principale si deduce che il rango di una tale matrice è il numero di righe non nulle; ora il teorema di Rouché-Capelli diventa immediato o sicuramente di più semplice comprensione.

In questa ultima lezione ho notato che una parte della classe mi seguiva benissimo mentre una parte faceva un po' più di fatica; in varie occasioni mi sono dovuta fermare per approfondire e spiegare meglio alcuni passaggi.

Penso che la differenza sia data da due fattori, da un lato alcuni alunni sono in generale più intuitivi e veloci nel "vedere" alcuni passaggi e soluzioni, d'altra parte la lezione era basata sulle due precedenti, sulle nozioni pregresse acquisite con le precedenti unità e richiedeva una certa dimestichezza con gli strumenti presentati: chi aveva lavorato molto a casa sulle precedenti lezioni ora aveva le basi per ragionare meglio al contrario di chi non aveva pratica con l'argomento e gli strumenti presentati.

3.5.3 Verifiche

L'intervento, per come è stato pensato, ha permesso una continua verifica in itinere della comprensione e dell'assimilazione dei concetti da parte dei ragazzi; dai riscontri ricevuti ho capito fin da subito che i ragazzi avevano fatto proprie le idee principali esposte nelle lezioni.

Penso che un modo di far lezione in cui i ragazzi possano provare, sperimentare, maneggiare aiuti a prendere confidenza con gli strumenti presentati e questo intervento in aula me ne ha dato conferma.

Il feedback è stato dunque molto positivo soprattutto in un primo tempo, il discorso è un po' diverso per quel che riguarda le verifiche vere e proprie in quanto ci sono stati 15 giorni di festa subito dopo le mie lezioni in aula: comunque una volta tornati a scuola sono iniziate le verifiche orali (sia alla lavagna che con dei flash dal posto), a questo punto la maggior parte della classe ha mostrato di aver fatto propri i concetti e di essere pronta ad andar avanti mentre alcuni ragazzi non hanno lavorato tanto durante le vacanze ed al ritorno erano meno in grado di affrontare una verifica sugli argomenti trattati.

Come esposto in precedenza il mio intervento prevedeva anche una verifica ed un'ora di discussione sulla verifica e di risistemazione di tutti gli argomenti trattati. Purtroppo però l'intervento è avvenuto a cavallo delle vacanze di Natale e dopo un periodo di scioperi rendendo le cose un po' più complicate.

La verifica è stata svolta all'interno di una verifica sommativa di tutta l'unità, il compito è stato preparato dalla docente che ha però inserito gli esercizi proposti da me per la parte relativa al mio intervento.
Anche la discussione e la sistemazione è avvenuta all'interno di un discorso più globale mostrando comunque una comprensione degli argomenti più che sufficiente
In allegato riporto sia la verifica formativa che avevo preparato (Allegato Verifica Formativa) che la verifica sommativa che i ragazzi hanno svolto a gennaio (Allegato Verifica Sommativa); per entrambe sono stati esplicitati gli obiettivi e i criteri di valutazione, sono state inoltre effettuate delle simulazioni per valutare la correttezza del sistema utilizzato.

3.5.4 Valutazione dell'intervento

Personalmente sono stata davvero molto soddisfatta di come si è svolto il mio intervento in aula nel suo complesso.
Inerentemente agli obiettivi che si proponeva l'intervento posso dire che, nonostante il ridimensionamento delle ore, sono stati raggiunti in modo più che soddisfacente. La verifica scritta ha riscontrato una comprensione piena dell'argomento per l'80% circa della classe ed una comprensione comunque sufficiente per il restante 20%.
Le successive verifiche orali hanno riportato un pieno raggiungimento degli obiettivi più complessi, come quello di abituare i ragazzi ad avere un metodo di fronte ad un nuovo problema o a porsi domande per andare sempre oltre cambiando le "regole del gioco".
Per quanto riguarda il rendere più divertente e giocosa la matematica, credo che l'obiettivo sia stato centrato, convinzione che deriva da un riscontro diretto. I ragazzi infatti si sono sempre dimostrati attivi, facendo domande e chiedendo che venissero proposti loro altri problemi del genere.

Le cose che ritengo siano state più importanti nell'intervento sono:

- L'idea di base del gioco come filo conduttore.
- Far sì che i ragazzi, analizzando un caso particolare, siano in grado di estrapolare il teorema e poi di generalizzarlo.
- Mostrare la validità del teorema di Rouché-Capelli, purtroppo presentato senza dimostrazione, trattando la "triangolarizzazione delle matrici".

Soprattutto su questi tre elementi infatti il riscontro della classe è stato molto positivo:

- i ragazzi sono stati sempre molto attenti ed hanno fatto interventi intelligenti ed appropriati.
- hanno lavorato bene sia in classe che a casa.
- sono stati entusiasti di svolgere lavori di gruppo che li mettessero anche un po' in competizione tra loro.
- hanno compreso e metabolizzato bene l'argomento.

Complessivamente dunque sono stata davvero molto contenta di come si è svolto l'intero intervento, della reazione della classe, della collaborazione e del sostegno della mia tutor e di come ho tenuto le lezioni.
Ritengo che in una classe non troppo differente per caratteristiche si possa riproporre lo stesso metodo.

5. Conclusioni

Penso che l'intero tirocinio diretto sia stato molto importante per la mia formazione umana e professionale:

- prima di tutto mi ha permesso di confrontarmi per la prima volta con una classe in una situazione scolastica standard, fino ad ora infatti avevo lavorato solo con studenti universitari o nelle scuole superiori, ma solo con laboratori extrascolastici. Questa esperienza mi ha dunque insegnato moltissimo sulla relazione docente-studenti, su come si gestisce una classe, sul modo in cui si organizza e si realizza una lezione e sulla gestione delle problematiche che possono nascere.
- In secondo luogo lavorare con quelle specifiche classi e con la mia tutor d'aula ha fatto sì che si creasse un clima molto stimolante di dialogo e confronto. La professoressa, in particolare, è stata un esempio molto significativo: sempre pronta a confrontarsi con me, ad aiutarmi ed a spiegarmi cosa è meglio fare a seconda della situazione.
- Infine è stato un momento importante di verifica personale delle mie idee sull'insegnamento: la forte passione per questo lavoro deve essere affiancata dalle capacità per svolgerlo; l'intervento attivo mi ha dato un buon feedback, sia dalla docente che dai ragazzi ed ho capito che in questo ruolo sono davvero a mio agio.

Anche il tirocinio indiretto e le lezioni della SSIS mi hanno maturato molto a livello professionale: il primo mi ha fatto fermare a riflettere sulla burocrazia scolastica fatta di leggi, organi collegiali e verbali per poi farmi soffermare sulla programmazione scolastica, sugli strumenti didattici, sulla progettazione delle lezioni. Le lezioni mi hanno dato invece moltissimi spunti didattici e idee da approfondire mostrandomi diversi possibili approcci agli argomenti trattati nell'insegnamento della matematica e della fisica.

In conclusione, alla luce dei due anni di scuola di specializzazione, dell'intervento attivo svolto in aula e dei risultati di tale intervento posso concludere che un insegnamento della matematica diverso è possibile: è un insegnamento che usa il gioco ed il problem solving come strumenti e come finalità didattiche, che riesce ad alternare nei ragazzi momenti di apprendimento formale con quelli di apprendimento informale facendo sintesi tra le diverse esperienze ed i diversi metodi.
Credo nello sviluppo di una didattica che parta dalla conoscenze pregresse dei ragazzi, basata soprattutto sulla lezione dialogata e che cerchi sempre un apprendimento attivo da parte degli alunni, una didattica che sappia sviluppare nei ragazzi il ragionamento e l'immaginazione per far sì che di fronte ad un problema essi abbiano capacità di analisi, intuizione e che sappiano formalizzare e sintetizzare i loro risultati usando il linguaggio specifico della materia.

Bibliografia e Sitografia

Testi

Apprendimento formale e apprendimento informale delle scienze, *Pietro Cerreta*

Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico, *George Polya*

Come vincere la paura della matematica, *S Tobias*

Cominciamo da Zero, *Vinicio Villani*

Donna o Tigre, *Raymond M. Sullivan*

Enigmi e giochi matematici, *Martin Gardner*

Esperienza A-AH!, *Martin Gardner*

Il riso di Talete, *Gabriele Lolli*

Insegnare le matematiche nella scuola secondaria, *F Spagnolo*

La matematica nella scuola di base, *Giorgio Bolondi*

La scoperta matematica. Capire, imparare ed insegnare a risolvere i problemi, *George Polya*

Matematica Controluce (libro di testo), *Andreini, Manara, Prestipino*

Una la sorgente: il pensiero matematico!, *Liliana Curcio*

Siti web

bobcarr.wordpress.com

borel.mat.uniroma2.it

www.galileo.it

www.gravita-zero.org

www.matefitness.it

www.matematica.blogscuola.it

www.math.it

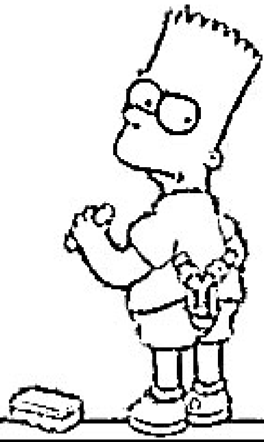
www.scuolanet.pd.it

www.wikipedia.it

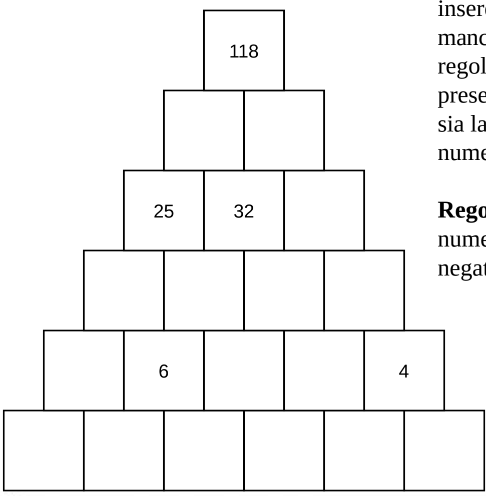
Allegato Lezione 1

Sommiramide

La matematica nella
risoluzione dei giochi



Sommiramide



Lo scopo del gioco è completare la piramide inserendo i numeri mancanti con l'unica regola che il valore presente in ogni casella sia la somma dei due numeri sottostanti.

Regola implicita: i numeri sono interi non negativi.

2

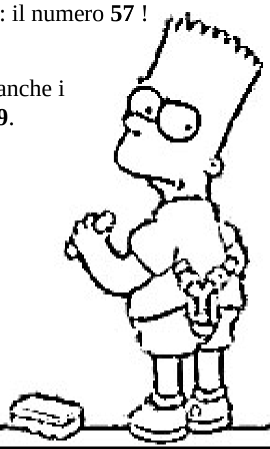
Sommiramide

La prima cosa da fare è sempre quella di **osservare**.

Individuare poi un punto di partenza: il numero **57** !

Da cui si trovano anche i valori **61** e **29**.

118					
57	**61**				
25	32	**29**			
	6			4	
2					



Sommiramide

Ora il metodo precedente non basta, bisogna trovare un’idea diversa.

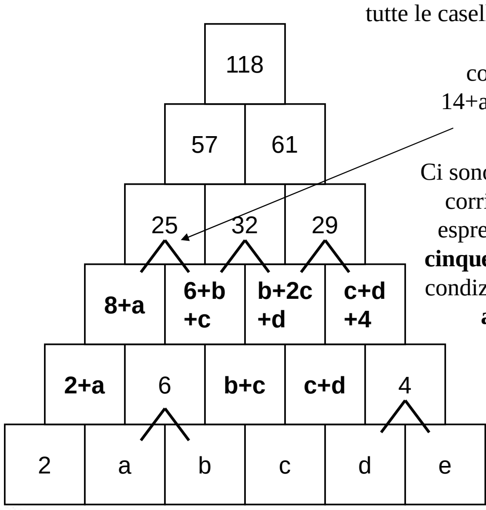
Potrei provare mettendo delle lettere nelle caselle vuote.

Tra tutte le possibili strategie la migliore consiste nel mettere delle **lettere** nelle caselle alla base della piramide.

118					
57	61				
25	32	29			
	6			4	
2	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**

Sommiramide

Ora seguendo le regole del gioco si possono riempire tutte le caselle.



Vediamo che il 25 corrisponde in realtà a 14+a+b+c e 32 corrisponde a 6 +2b+3c+d ...

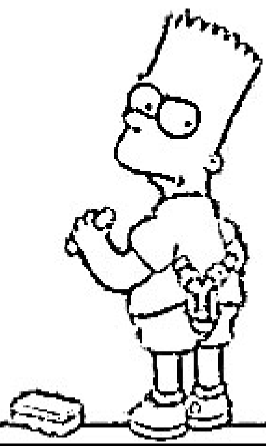
Ci sono cinque numeri che corrispondono a delle espressioni letterali: ho **cinque equazioni**, cinque condizioni sulle incognite **a**, **b**, **c**, **d** ed **e**.

Sommiramide

Dalle cinque equazioni viene fuori il seguente sistema:

$$\begin{cases} a+b=6 \\ d+e=4 \\ 14+a+b+c= \\ 2b+3c+d+6= \\ b+3c+2d+4= \end{cases}$$

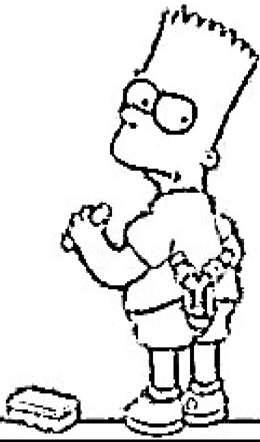
Che dovrete risolvere per casa!!!



Allegato Lezione 2

Il teorema di Cramer

Da dove viene e
perché funziona?



Cramer, la formula

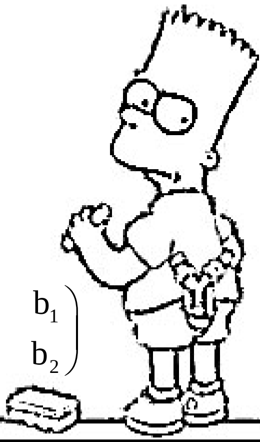
Consideriamo un sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

La formula di Cramer ci dice che la soluzione è data da

$$x_1 = \frac{|B_1|}{|A|} \quad e \quad x_2 = \frac{|B_2|}{|A|} \qquad \text{dove}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \text{ e } B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$



Cramer, la formula

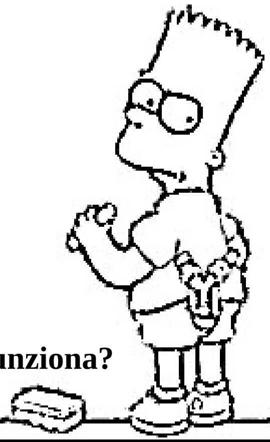
Consideriamo un sistema di n equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

La formula di Cramer può essere generalizzata:

$$x_1 = \frac{|B_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|B_2|}{|A|}, \ldots,\ x_n = \frac{|B_n|}{|A|}$$

Ma questa regola da dove viene e perché funziona?



Cramer, il perchè

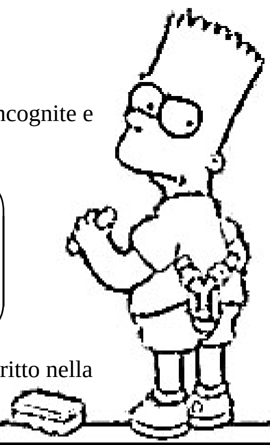
Consideriamo per semplicità un sistema di tre equazioni in tre incognite, il discorso può essere generalizzato poi al caso n-simo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Chiamiamo A la matrice dei coefficienti, x il vettore delle incognite e b il vettore dei termini noti:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Tramite le matrici e le loro proprietà il sistema può essere scritto nella **forma vettoriale Ax=b**

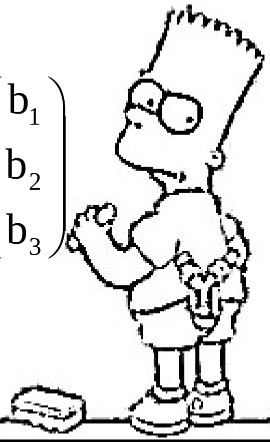


Cramer, il perchè

L'algebra delle matrici ci dice che se A è invertibile si può moltiplicare a sinistra per A^{-1}:

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

La soluzione del sistema allora è data da



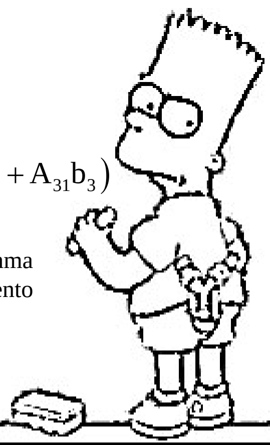
$$x = A^{-1}b = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{31} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Dove $A_{i,j}$ è il complemento algebrico del termine a_{ij}

Cramer, il perchè

Dunque x è il vettore colonna dato da

$$x = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 \end{pmatrix}$$



Considerando il primo termine $x_1 = \frac{1}{|A|}\left(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3\right)$

Si nota che, a parte una costante moltiplicativa, x_1 è la somma di tre prodotti i cui fattori sono un numero ed un complemento algebrico: questo può essere visto come un determinante!!!

Ma di quale matrice?

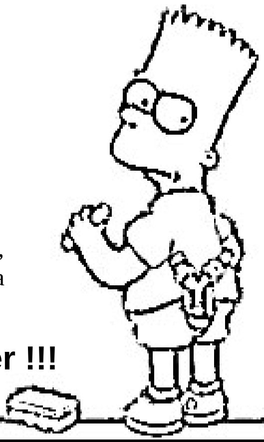
Cramer, il perchè

Sappiamo che A_{11} è il complemento algebrico di a_{11} rispetto alla matrice A; dunque b_1 deve occupare la "posizione" di a_{11} in A; allo stesso modo b_2 deve occupare la "posizione" di a_{21} e b_3 quella di a_{31}

Abbiamo così la matrice $B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Allora $x_1 = \frac{|B_1|}{|A|}$ e allo stesso modo $x_2 = \frac{|B_2|}{|A|}$ e $x_3 = \frac{|B_3|}{|A|}$

dove B_2 e B_3 sono le matrici formate da A sostituendo, rispettivamente, alla seconda ed alla terza colonna la colonna dei termini noti.

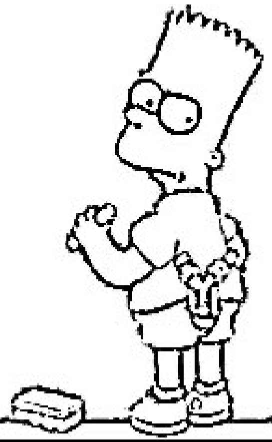


Questa è proprio la formula di Cramer !!!

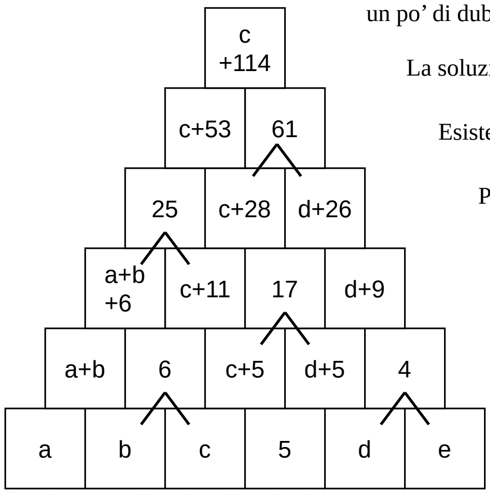
Allegato Lezione 3

Un’altra sommiramide

Quante soluzioni?



Una nuova sommiramide



Noto il metodo risolutivo
delle sommiramidi nascono
un po’ di dubbi:

La soluzione è unica?

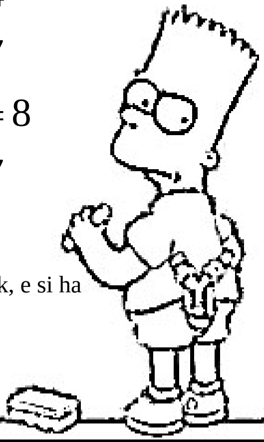
Esiste sempre?

Proviamo a risolvere !

Una nuova sommiramide

Osserviamo il sistema corrispondente

$$\begin{cases} b+c=6 \\ d+e=4 \\ c+d+10=17 \\ a+b+c+17=25 \\ c+d+54=61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=6 \\ d+e=4 \\ c+d=7 \\ a+b+c=8 \\ c+d=7 \end{cases}$$



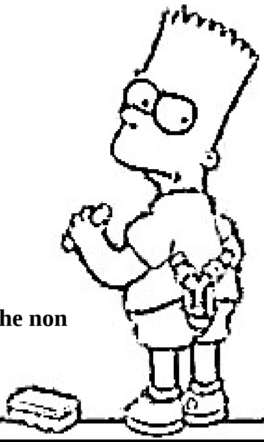
Ci sono due equazioni identiche!!
Posso risolvere solo in funzione di un parametro...pongo c=k, e si ha
a=2, b=6-k, c=k, d=7-k; e=k-3

Quante sono le soluzioni in questo caso?

Una nuova sommiramide

Le soluzioni sono **infinite** se facciamo variare k tra i numeri reali, ma il gioco pone delle limitazioni: in ogni casella deve esserci un numero intero non negativo

Devo imporre che $\begin{cases} 6-k \geq 0 \\ k \geq 0 \\ 7-k \geq 0 \\ k-3 \geq 0 \end{cases}$ con k intero



Le soluzioni allora sono **quattro**: quelle per k = 3; 4; 5; 6

Alla luce di tutto ciò sapreste creare una sommiramide che non ha soluzioni?

Una nuova sommiramide

Partiamo dal sistema corrispondente alla sommiramide precedente, ho due equazioni identiche e ciò rende il sistema indeterminato...e se cambiassi il termine noto di una delle due?

$$\begin{cases} b+c=6 \\ d+e=4 \\ c+d=7 \\ a+b+c=8 \\ c+d=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b+c=6 \\ d+e=4 \\ c+d=7 \\ a+b+c=8 \\ c+d=8 \end{cases}$$

Usando la riduzione tra la terza e la quinta equazione si ha **0 = -1** e si vede che il sistema è **impossibile**.
Per ottenere questa situazione basta che nella sommiramide di partenza mettiamo **62** a posto di 61

Una nuova sommiramide

A volte però i calcoli risultano molto macchinosi...

Esiste un metodo più rapido per sapere se la sommiramide ha soluzioni e quante ne ha? Esiste un metodo per conoscere la natura di un sistema senza andarlo a risolvere?

Allegato Lezione 4

IL Teorema di Rouchè Capelli

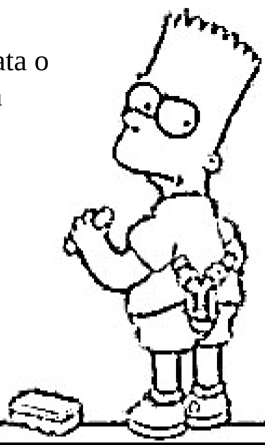
Dal rango della matrice al numero di soluzioni del sistema

Rango

Abbiamo già visto come ad una matrice quadrata si possa associare un numero, detto determinante, che ne caratterizza alcuni aspetti come l'invertibilità.

Ora andremo ad associare ad ogni matrice, quadrata o rettangolare, un numero naturale che ne identifica un'ulteriore caratteristica: **il rango**

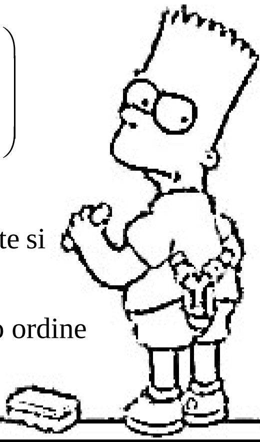
Vedremo poi come questo possa tornare utile al nostro problema di determinare le soluzioni di un sistema lineare



Rango, definizione

Data una matrice A nxm, si chiama **sottomatrice di A** ogni matrice quadrata ottenuta selezionando p righe e p colonne di A,
con $p \le \min(m, n)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{23} & a_{25} & a_{26} \\ a_{33} & a_{35} & a_{36} \\ a_{53} & a_{55} & a_{56} \end{pmatrix}$$



Data una sottomatrice di A pxp, il suo determinante si chiama **minore di ordine p della matrice A**

Si dice **rango di una matrice A, r(A),** il massimo ordine dei minori non nulli che si possono estrarre da A

Rango, calcolo

Tornando alle sommiramidi proviamo a calcolare il rango della matrice dei coefficienti. Partiamo con la prima

$$\begin{cases} a + b = 6 \\ d + e = 4 \\ a + b + c = 11 \\ 2b + 3c + d = 26 \\ b + 3c + 2d = 25 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Se A è quadrata il suo rango può essere al massimo il suo ordine, la prima cosa da fare in questo caso è calcolare det(A): se è diverso da zero allora il rango è massimo

Det(A)=-3 allora r(A)= 5

Rango, calcolo

Consideriamo ora la sommiramide indeterminata, cosa mi aspetto dal suo rango? Può essere 5?

$$\begin{cases} b+c=6 \\ d+e=4 \\ c+d=7 \\ a+b+c=8 \\ c+d=7 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det(A)=0, estraggo un minore di ordine 4 prendendo solo le prime 4 righe e le prime 4 colonne: ho scelto a caso?

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det(A_4)=1 allora r(A)= 4

Rango, calcolo

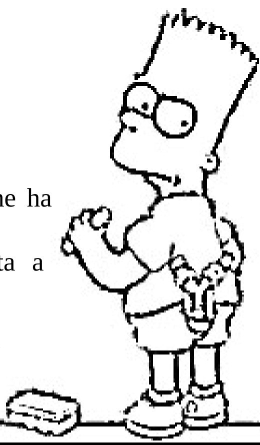
Consideriamo ora la sommiramide impossibile, cosa mi aspetto dal suo rango? Può essere 5?

$$\begin{cases} b+c=6 \\ d+e=4 \\ c+d=7 \\ a+b+c=8 \\ c+d=9 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma la matrice dei coefficienti è la stessa!! So già che ha rango 4...
Cosa avevamo cambiato per andare da determinata a impossibile??

La colonna dei termini noti!!! Ma da sola il rango è 1...

Potrei affiancarla ad A...

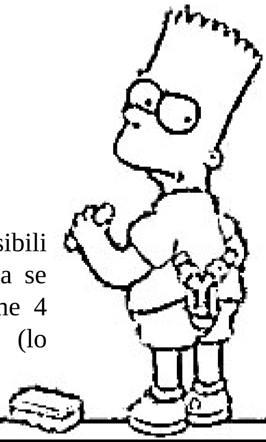


Rango, calcolo

Torniamo a quella indeterminata e consideriamo la matrice Ab, il suo rango sarà sempre maggiore o uguale a quello di A

$$\begin{cases} b+c=6 \\ d+e=4 \\ c+d=7 \\ a+b+c=8 \\ c+d=7 \end{cases} \Rightarrow Ab = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Anche il rango di Ab è 4 in quanto tutte le possibili sottomatrici di ordine 5 hanno due righe uguali ma se prendo la sottomatrice di ordine 4 fatta dalla prime 4 colonne e 4 righe ho il determinante non nullo (lo avevamo già calcolato)



Rango, calcolo

Ora quella impossibile, che mi aspetto dal suo rango?

$$\begin{cases} b+c=6 \\ d+e=4 \\ c+d=7 \\ a+b+c=8 \\ c+d=9 \end{cases} \Rightarrow Ab = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Se estraggo una sottomatrice di ordine 5 in cui comprendo l'ultima colonna non ho più due righe uguali...potrei aspettarmi che il determinante non si annulli (anche se non è detto).

Effettivamente trovo almeno un minore di ordine 5 non nullo: r(Ab)=5

Rango, calcolo

Ma cosa accade nel caso determinato ad Ab??

$$\begin{cases} a+b=6 \\ d+e=4 \\ a+b+c=11 \\ 2b+3c+d=26 \\ b+3c+2d=25 \end{cases} \Rightarrow Ab = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 26 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Come sottomatrice quale mi conviene tentare?

Come sottomatrice di ordine 5 prendo A, che so essere di grado 5.

Allora r(Ab)=5

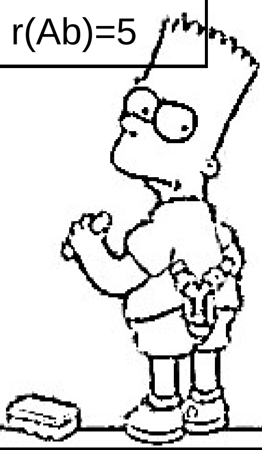
Rango, ricapitoliamo

Determinato	Indeterminato	Impossibile
r(A)=5	r(A)=4	r(A)=4
r(Ab)=5	r(Ab)=4	r(Ab)=5

Che ne dite?

Le incognite erano 5, secondo voi questo influisce?

Proviamo a generalizzare



Teorema di Rouchè-Capelli

Dato un sistema di n equazioni in m incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

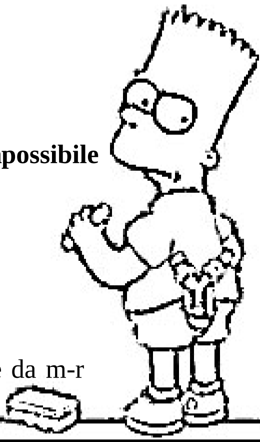
Se **r(A)<r(Ab)** il sistema non ammette soluzioni, è **impossibile**

Se r(A)=r(Ab) il sistema ammette soluzioni.

in particolare:

Se **r(A)=r(Ab)=m** il sistema è **determinato**

Se **r(A)=r(Ab)=r<m** il sistema è **indeterminato** ed ammette ∞^{m-r} soluzioni, cioè la soluzione dipende da m-r parametri



Triangolarizzazione

Non dimostriamo questo teorema, c'è però un modo interessante per convincersi della sua validità:

Prendiamo ad esempio un sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ -x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow Ab = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Triangolarizzo la matrice Ab

$$Ab = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Se la matrice è triangolare inferiore il rango corrisponde al numero di righe non nulle

Che possiamo osservare?

Allegato Verifica Formativa

Obiettivi minimi

La seguente verifica ha lo scopo di valutare gli studenti sul raggiungimento o meno dei seguenti obiettivi

- Conoscere le nozioni di sistema, matrice, rango, determinante, minore, soluzione
- Saper operare con le matrici
- Sapere e saper utilizzare le proprietà per calcolare determinanti
- Conoscere il Teorema di Cramer e la sua dimostrazione
- Sapere e saper utilizzare le proprietà per calcolare ranghi
- Conoscere il Teorema di Rouchè-Capelli
- Saper riconoscere le tipologie dei sistemi e valutarne la risolubilità
- Saper analizzare sistemi con parametri

Sono considerati obiettivi minimi o essenziali:

- Saper operare con le matrici
- Saper calcolare il determinante di una matrice
- Saper calcolare il rango di una matrice
- Saper risolvere un sistema lineare
- Conoscere il Teorema di Rouchè-Capelli
- Saper riconoscere le tipologie dei sistemi e valutarne la risolubilità

Tempi

Il tempo richiesto per la prova è stimato sui 40 minuti, essendo le ore di lezione di 50 minuti, considerati i tempi di consegna e lettura del compito direi che si può considerare un compito da svolgere in “un’ora”

Verifica

1) La somma dei prodotti degli elementi di una riga di un determinante per i complementi algebrici di un’altra riga è:
a) uguale al valore del determinante
b) uguale a 1
c) uguale a zero
d) uguale al valore del determinante cambiato di segno

2) Se si scambiano fra di loro due righe di un determinante, il valore del determinante ottenuto è:
a) nullo
b) l’opposto dell’altro
c) uguale a 1
d) uguale all’altro

3) Quanto vale il determinante della matrice unitaria 4x4?
a) 0
b) 1
c) 4
d) -1

4) Il sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \\ 4x+2y-2z=6 \end{cases}$
a) ha due soluzioni
b) è impossibile
c) è indeterminato
d) ha una sola soluzione

5) Il rango di una matrice nxm è:
a) l’ordine massimo dei suoi minori
b) il minore fra m ed n
c) l’ordine massimo dei suoi minori non nulli
d) il valore massimo dei suoi minori

6) Un minore di una matrice A è:
a) un determinante
b) una sottomatrice quadrata di A
c) una sottomatrice quadrata di A a determinante non nullo
d) nessuna delle risposte precedenti

7) Quale fra le seguenti terne è soluzione del sistema $\begin{cases} x+2y+z=-6 \\ x+y+z=-4 \\ 3x-y+3z=-4 \end{cases}$

a) (-2,-1,-2)
b) (-1,-2,-1)
c) (1,1, 9)
d) (-1,-2,1)

8) Una matrice è triangolare superiore quando:
a) ha nulli gli elementi al di sotto della diagonale
b) ha nulli gli elementi al di sopra della diagonale
c) ha nulli gli elementi della diagonale
d) ha tutti gli elementi nulli

9) Un sistema omogeneo può avere:
a) solo la soluzione nulla
b) la soluzione nulla o un'altra soluzione qualsiasi
c) la soluzione nulla o infinite soluzioni
d) la soluzione nulla, nessuna o infinite soluzioni

10) Un sistema di m equazioni ed m incognite può avere :
a) una o infinite soluzioni
b) due o infinite soluzioni
c) una, nessuna o infinite soluzioni
d) tante soluzioni quante sono le incognite.

11) Sia Ax = b un sistema lineare di n equazioni in k incognite avente una sola soluzione. Allora:
a) il rango di A è n
b) il rango di A è k
c) n = k e detA=0
d) n = k e detA $\neq 0$

12) Sia A una matrice 4x5 e B una sottomatrice di A di ordine 3. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
a) se det B = 0 allora il rango di A è 2
b) se det B $\neq 0$ allora il rango di A è 3
c) se det B = 0 allora il rango di A è ≥ 2
d) se det B $\neq 0$ allora il rango di A è ≥ 3

13) Affinché una matrice di tipo 3x4 abbia rango 2,
a) è necessario che ogni sua sottomatrice di ordine 3 abbia determinante nullo
b) è sufficiente che ogni sua sottomatrice di ordine 3 abbia determinante nullo

c) è necessario che una sua sottomatrice di ordine 3 abbia determinante nullo
d) è sufficiente che una sua sottomatrice di ordine 2 abbia determinante non nullo

14) Sia Ax = b un sistema lineare di 5 equazioni in 7 incognite.
a) Se la matrice A ha rango 5, il sistema non ha mai soluzione
b) Se il sistema ammette soluzione, tale soluzione è unica
c) Se la matrice A ha rango minore di 5, il sistema non ha mai soluzione
d) Se il sistema ammette soluzione, tale soluzione dipende da 2 parametri

15) Un sistema di equazioni lineari è:
a) una n-upla di numeri
b) l'intersezione delle soluzioni delle equazioni
c) l'unione delle soluzioni delle equazioni
d) un numero

16) Sia M una matrice quadrata di ordine n ad elementi reali e sia k un numero reale non nullo; quale proposizione è vera?
a) det(kM) = k detM
b) det(kM) = k^n detM
c) det(kM) = k^2 detM
d) det(kM) = $\frac{(-1)^n}{k}$ detM

17)La formula di Cramer
a) si dimostra partendo da Ax=b
b) è un postulato
c) è sempre applicabile
d) si ricava dal metodo del confronto

18) Il sistema lineare $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}$
a) non ha soluzioni
b) ha ∞^1 soluzioni perché rangoA = rangoA/B = 2
c) ha una sola soluzione perché rangoA = rangoA/B =2
d) ha (1;-1) tra le sue soluzioni

19) Il rango di una matrice non cambia se:
a) si moltiplica la matrice per un'altra a determinante non nullo
b) si eliminano due righe, se una delle due è multipla dell'altra
c). si scambiano tra loro la prima e l'ultima colonna

d) si sostituisce una colonna con una combinazione lineare delle altre

20) Data la matrice A = $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ **si ha che:**

a) A non è invertibile
b) A è invertibile e la sua inversa è $-A^t$
c) A è invertibile e la sua inversa è A^t
d) ogni sistema lineare del tipo Ax = b ha ∞^1 soluzioni

Analisi degli obiettivi per esercizio

Gli Item 1, 2, 3, 5, 6, 8, 13, 15, 17, 19 hanno come obiettivo valutare la conoscenza teorica dell'unità dei sistemi lineari e dell'unità precedente sulle matrici.
Gli Item 4, 7, 18, 20 sono brevi esercizi risolvibili per ragionamento o svolgendo comunque semplici calcoli; valutano oltre alla conoscenza la competenza acquisita dal ragazzo.
Gli Item 9, 10, 11, 12, 14, 16 sono un po' più difficili; chiamano in causa, oltre alla conoscenza e alla competenza, anche la capacità di ragionamento dello studente e riguardano principalmente il teorema di Rouchè-Capelli

Criteri di valutazione

Nello scegliere i criteri di valutazione di questa verifica ho deciso di scoraggiare i ragazzi nel tentare di dare una risposta a caso e premiare chi sa valutare le proprie conoscenze; ho dunque deciso di assegnare ad ogni domanda

- 3 punti per la risposta esatta
- 0 punti per la risposta non data
- -1 punto per la risposta errata

Ottenendo un punteggio grezzo massimo (PGM) di 60 e minimo di -15 (punteggio altamente improbabile).

Il punteggio grezzo viene poi trasformato in voti grezzi, in decimi, tramite la parabola y=-0,2x^2+9,2x+1 ottenuta usando come punti base:

- 1 corrispondente allo 0% del PGM

- 6 corrispondente al 55% del PGM
- 10 corrispondente al 100% del PGM

A questo punto viene assegnato comunque 1 a chi ha preso un voto grezzo <1.
Gli altri voti grezzi si approssimano al “mezzo voto” e si ottengono i voti finali.

Simulazione

Nel file Excel allegato si trovano delle simulazioni di valutazione di 10 alunni così distribuite:

1- Compito perfetto
2- Compito in bianco
3, 4- Compito sufficiente
5, 6, 7- Compito generico
8, 9,10- Compito svolto rispondendo a caso (usando la funzione di Excel *casuale()*)

In particolare si può notare che

- per avere la sufficienza bastano 11 risposte esatte e le altre in bianco
- chi lascia il compito in bianco e chi prova a caso ottengono mediamente lo stesso voto, cioè il minimo

Il file Excel è composto da due fogli, in uno si trovano le risposte di ogni studente a confronto con quelle esatte e una statistica *Orizzontale*, cioè svolta per singola domanda; nel secondo foglio si trovano invece i punti assegnati ad ogni domanda, i punteggi grezzi, i voti grezzi ed i voti finali.

Risposte esatte

N° Dom	Risp esatte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		n° risposte esatte	n° non risposte	n° sbagli	% risposte esatte
1	**c**	c		c	c	c	c	c	c	c	c		9	1	0	90
2	**b**	b		c	b	b	b	a	d	d	b		5	1	4	50
3	**b**	b		b	b	b	b	a	d	d	b		6	1	3	60
4	**c**	c			c	c	c	a	d	d	d		4	2	4	40
5	**c**	c		c	c	c	c	a	c	a	d		6	1	3	60
6	**a**	a		a	a	a	a	a	b	d	a		7	1	2	70
7	**b**	b		b	b	b	b	b	d	c	d		6	1	3	60
8	**a**	a			a	a	a	b	d	c	d		4	2	4	40
9	**d**	d		d	d	d	d	b	d	d	d		8	1	1	80
10	**c**	c		c	c	c	a	b	c	d	a		5	1	4	50
11	**d**	d		d	d	c	d	b	d	c	d		6	1	3	60
12	**d**	d		d			d	b	d	a	c		4	3	3	40
13	**a**	a				a	a	a	a	d	d		5	3	2	50
14	**d**	d		b		b	d	d	d	a	d		5	2	3	50
15	**b**	b		c		c	b		d	a	b		3	3	4	30
16	**b**	b				b	c		d	d	a		2	4	4	20
17	**a**	a		a		a	a		c	d	a		5	3	2	50
18	**c**	c		c		c	c		c	d	b		5	3	2	50
19	**c**	c		c		d	c		c	c	b		5	3	2	50
20	**c**	c				d	a		d	d	d		1	4	5	10
	n° V	0	20	5	9	1	0	6	0	0	0					

Punteggi

N° Dom	Risp esatte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	c	3	0	3	3	3	3	3	3	3	3
2	b	3	0	-1	3	3	3	-1	-1	-1	3
3	b	3	0	3	3	3	3	-1	-1	-1	3
4	c	3	0	0	3	3	3	-1	-1	-1	-1
5	c	3	0	3	3	3	3	-1	3	-1	-1
6	a	3	0	3	3	3	3	3	-1	-1	3
7	b	3	0	3	3	3	3	3	-1	-1	-1
8	a	3	0	0	3	3	3	-1	-1	-1	-1
9	d	3	0	3	3	3	3	-1	3	3	3
10	c	3	0	3	3	3	-1	-1	3	-1	-1
11	d	3	0	3	3	-1	3	-1	3	-1	3
12	d	3	0	3	0	0	3	-1	3	-1	-1
13	a	3	0	0	0	3	3	3	3	-1	-1
14	d	3	0	-1	0	-1	3	3	3	-1	3
15	b	3	0	-1	0	-1	3	0	-1	-1	3
16	b	3	0	0	0	3	-1	0	-1	-1	-1
17	a	3	0	3	0	3	3	0	-1	-1	3
18	c	3	0	3	0	3	3	0	3	-1	-1
19	c	3	0	3	0	-1	3	0	3	3	-1
20	c	3	0	0	0	-1	-1	0	-1	-1	-1
	PG	60	0	33	33	37	48	6	20	-8	16
	%MPG	100,0	0,0	55,0	55,0	61,7	80,0	10,0	33,3	-13,3	26,7
	Voto	10,0	1,0	6,0	6,0	6,6	8,2	1,9	4,0	-0,2	3,4
	V Fin	**10,0**	**1,0**	**6,0**	**6,0**	**6,5**	**8,0**	**2,0**	**4,0**	**1,0**	**3,5**

Allagato Verifica Sommativa

Obiettivi minimi

La seguente verifica ha lo scopo di valutare gli studenti sul raggiungimento o meno dei seguenti obiettivi

- Saper associare agli insiemi dotati di operazioni la corrispondente struttura algebrica
- Saper operare con le matrici
- Saper riconoscere situazioni o problemi interpretabili in forma matriciale
- Saper utilizzare le proprietà per calcolare determinanti
- Saper riconoscere le tipologie dei sistemi e valutarne la risolubilità
- Saper riconoscere ed applicare i metodi risolutivi più opportuni
- Saper analizzare sistemi con parametri
- Saper applicare le conoscenze acquisite a situazioni di vario tipo

Sono considerati obiettivi minimi o essenziali:

- Saper operare con le matrici
- Saper calcolare il determinante di una matrice
- Saper calcolare il rango di una matrice
- Saper risolvere un sistema lineare
- Saper riconoscere le tipologie dei sistemi e valutarne la risolubilità

Tempi

Il tempo richiesto per la prova è stimato sui 90 minuti, essendo le ore di lezione di 50 minuti, considerati i tempi di consegna e lettura del compito direi che si può considerare un compito da svolgere in “due ore”

Verifica

1) Se A e B sono due matrici quadrate invertibili vale la seguente proprietà:

$$(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B})^{-1} = \mathrm{B}^{-1} \cdot \mathrm{A}^{-1}$$

Commentare la seguente dimostrazione della proprietà in esame motivando ogni passaggio:

$$(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) \cdot \mathrm{B}^{-1} \cdot \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A} \cdot (\mathrm{B} \cdot \mathrm{B}^{-1}) \cdot \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{I} \cdot \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}$$

2) Data le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ mostrare che A non è un divisore dello zero, mentre B lo è. (*Una matrice M si dice divisore dello zero se esiste una matrice non nulla N tale che il prodotto MxN da la matrice nulla*)

Quale proprietà si può ipotizzare a partire da questo esercizio?

3) Risolvere l'equazione: $\det \begin{vmatrix} x & a & d & e \\ x & x & b & f \\ x & x & x & c \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = 0$

4) Discutere il rango di una delle seguenti matrici al variare del parametro:

$$\begin{pmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & t \\ 2 & -t & 0 & -t \\ 0 & 0 & t(t-1) & t(t-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & -1 \\ 1 & \sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

5) Analizzare la risolubilità di uno dei seguenti sistemi e, se esistono, trovare le soluzioni:

$$\begin{cases} ax + 3y - 9z = 1 \\ x - 2y + az = 2 \\ x - y + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax - y = -1 \\ y = a + 1 \\ 2ax - y = a - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y + 3z + t = 2 \\ 2x - 5y + 9z = 5 \\ x - y + 3t = 1 \end{cases}$$

6) Dato il sistema $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ 2y + 3 = z - x \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$ aggiungere una terza equazione in modo che il sistema sia Determinato, Indeterminato, Impossibile

7) Trovare, al variare di k, le X soluzioni dell'equazione:

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & -1 \\ k & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per avere la sufficienza bisogna svolgere correttamente e completamente: gli esercizi **1**, **4**, **6, 7** oppure **2**, **3**, **5 e un'altro a scelta**

Analisi degli obiettivi per esercizio

I numeri dell'elenco fanno riferimento all'esercizio specifico

1) Avere consapevolezza delle dimostrazioni studiate, saper esporre in modo sintetico e con il linguaggio specifico adatto

2) Saper operare con le matrici, saper applicare le conoscenze acquisite sulle strutture algebriche

3) Saper usare le proprietà per calcolare i determinanti, saper trovare strategie per ottimizzare il lavoro

4) Saper calcolare il rango di una matrice al variare di un parametro, saper ottimizzare le procedure

5) Saper riconoscere le tipologie dei sistemi e valutarne la risolubilità, saper riconoscere ed applicare i metodi risolutivi più opportuni

6) Aver raggiunto una buona padronanza del teorema di Rouchè-Capelli e sapersi porre dalla parte di chi "crea il problema"

7) Saper riconoscere il problema e ricondurre ad una forma nota per la risoluzione, saper discutere sistemi parametrici sovradeterminati

Criteri di valutazione

Per la valutazione della verifica ho scelto di utilizzare quattro indicatori :

- **Conoscenza**: sapere formule e definizioni relative al problema in esame
- **Competenza**: saper applicare le conoscenze al problema in esame
- **Chiarezza e correttezza**: saper eseguire una serie di passaggi in modo chiaro e corretto, esplicitando ogni passaggio ed utilizzando il linguaggio specifico
- **Capacità**: saper affrontare problemi nuovi o comunque che richiedono un punto di vista differente da quelli affrontati in classe, saper ottimizzare o scegliere strategie convenienti a seconda della situazione

Ogni esercizio può andare a verificare uno o più indicatori, in modo più o meno predominante: il peso dell'esercizio è la somma dei valori assegnati ad ogni singolo indicatori, tali valori possono essere

- 0: indicatore non influente nell'esercizio
- 1: indicatore presente nell'esercizio
- 2: indicatore predominante nell'esercizio

Ho così realizzato in un foglio excel (allegato) per gestire i pesi degli esercizi tramite la seguente tabella

	Ind 1	Ind 2	Ind 3	Ind 4	Peso
Es 1	2	0	2	0	4
Es 2	1	1	1	1	4
Es 3	1	1	0	2	4
Es 4	1	2	0	0	3
Es 5	1	2	0	0	3
Es 6	1	0	1	2	4
Es 7	1	2	0	0	3

Ad ogni esercizio svolto dallo studente viene poi assegnato un punteggio che va da 1 a 5 secondo la seguente scala

Punteggi
1 : gravemente insufficiente
2 : insufficiente
3 : sufficiente
4 : discreto/buono
5 : buono/ottimo

per un massimo di 125 punti.
Il punteggio grezzo viene poi trasformato in voti in decimi tramite la parabola $y=-0,2x^2+9,2x+1$ ottenuta usando come punti base:

- 1 corrispondente allo 0% del PG
- 6 corrispondente al 55% del PG
- 10 corrispondente al 100% del PG

Simulazione

Nel fogli excel allegato si trovano anche delle simulazioni di valutazione di qualche alunno, tali simulazioni mostrano, in particolare, che le indicazioni per ottenere la sufficienza sono corrette.
Si nota inoltre che svolgendo in modo sufficiente tutti gli esercizi si ottiene 6,5 come voto finale.

Griglia per la valutazione del compito e per il passaggio dal punteggio grezzo al voto. Si può utilizzare in due modi: dando un peso ad ogni esercizio e scrivendo tali pesi nelle caselle D24 e successive oppure usando la griglia gialla e rosa in cui per ogni esercizio si valuta ciascun indicatore e questi vanno poi a formare il peso degli esercizi stessi

VotoMax	**10**	**100% del PG**
VotoSuff	6	55% del PG
VotoMin	1	0% del PG

Punteggi per ogni indicatore:
1 : gravemente insufficiente
2 : insufficiente
3 : sufficiente
4 : discreto/buono
5 : buono/ottimo

Per ogni esercizio l'indicatore può essere 0, 1 o 2 a seconda se c'è, non c'è o è predominante

	Ind 1	Ind 2	Ind 3	Ind 4	Peso
Es 1	2	0	2	0	4
Es 2	1	1	1	1	4
Es 3	1	1	0	2	4
Es 4	1	2	0	0	3
Es 5	1	2	0	0	3
Es 6	1	0	1	2	4
Es 7	1	2	0	0	3

Ind 1	Conoscenza
Ind 2	Competenza
Ind 3	Chiarezza e Correttezza
Ind 4	Capacità

PG = **P**unteggio **G**rezzo

		Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Es 7	PG	PGmax	125,0
	Pesi	4	4	4	3	3	4	3		**VOTO**	% max
Nr.	Studente	Punteggi Grezzi assegnati per ogni Indicatore									
1	Alice	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	75	**6,45**	60
2	Bob	**5**	**0**	**0**	**5**	**0**	**5**	**5**	70	**6,09**	56
3	Carlo	**0**	**5**	**5**	**0**	**5**	**0**	**5**	70	**6,09**	56
4	Dania	**0**	**0**	**1**	**3**	**3**	**4**	**2**	44	**4,21**	35
5	Evandro	**4**	**3**	**3**	**5**	**4**	**4**	**3**	92	**7,66**	74
6	Federica	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	125	**10,00**	100
7	Gianluca	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	100	**8,23**	80
8	Helenè	**1**	**2**	**3**	**2**	**3**	**1**	**3**	52	**4,79**	42
9									0	**1,00**	0