SSIS PUGLIA

Scuola Regionale Interateneo di Specializzazione per la Formazione degli Insegnanti della Scuola Secondaria

Relazione Finale Sull'attività Di Tirocinio

Indirizzo: Fisico-Informatico-Matematico

Classe di abilitazione: A049 (Matematica e Fisica)

Supervisore: Prof. Lucio Vernich
Tutor: Prof. Domenico Masella

Specializzanda: Maria Spagnulo

Biennio Accademico 2004/06

Indice

Unità didattica di Matematica: Le Trasformazioni Geometriche del Piano

INTRODUZIONE

Con la presente unità didattica si vuole delineare un percorso che consenta allo studente di comprendere il concetto di Trasformazione Geometrica e classificarne le varie tipologie sia dal punto di vista grafico che dal punto di vista analitico. L'attività si è svolta fondamentalmente in laboratorio d'Informatica tramite l'utilizzo di slide e del programma Cabri che sono stati presentati in parallelo per dare la possibilità allo studente di verificare immediatamente le proprietà che di volta in volta vengono enunciate e di costruire egli stesso alcune trasformazioni particolari che si possono ottenere dalla composizione di altre viste in precedenza.

All'inizio di ogni lezione ho riassunto gli argomenti della lezione precedente tramite un rapido scambio di battute con il gruppo classe e tramite l'utilizzo di mappe concettuali, così come al termine di ogni lezione sempre tramite l'utilizzo di mappe concettuali ho tracciato un breve riassunto evidenziando le parti più significative. Ho esplicitato le conoscenze e competenze richieste per ogni porzione di contenuto. Al termine del percorso ho proposto un test finale da me redatto con scopo di verifica sommativa sul raggiungimento degli obiettivi dichiarati; ho comunicato anche la percentuale per cui ogni esercizio concorre alla valutazione totale. Il compito, corretto e valutato, è stato riconsegnato in classe con una correzione collettiva e un commento individualizzato per ogni alunno.

COLLOCAZIONE NEL CURRICOLO

L'argomento va inserito o nel secondo bimestre di una III liceo scientifico PNI o nell'ultimo modulo della programmazione curriculare di una III liceo scientifico tradizionale.

TEMPO RICHIESTO: 14 ORE

PREREQUISITI

- ✓ Conoscenza degli elementi fondamentali della geometria euclidea;
- ✓ Conoscenza degli elementi fondamentali del piano cartesiano;
- ✓ Eventuale conoscenza di elementi di Geometria dello spazio
- ✓ Conoscenza degli elementi fondamentali dell'algebra delle matrici;
- ✓ Conoscenza degli elementi fondamentali delle funzioni trigonometriche e delle loro proprietà;
- ✓ Risoluzione di equazioni, sistemi e disequazioni.

- ✓ Concetto di congruenza
- ✓ Perpendicolarità e parallelismo fra rette
- ✓ Concetto di relazione e funzione
- ✓ Elementi di calcolo matriciale
- ✓ Concetto di vettore e le operazioni relative

OBIETTIVI COGNITIVI

- ✓ Conoscere le definizioni delle trasformazioni geometriche presentate e le relative equazioni
- ✓ Acquisire il concetto di trasformazione del piano
- ✓ Acquisire dimestichezza con i vari tipi di trasformazioni
- ✓ Saper enunciare i teoremi relativi

OBIETTIVI OPERATIVI

- ✓ Saper ricavare le equazioni di una trasformazione
- ✓ Saper ricavare l'espressione analitica dalla curva trasformata
- ✓ Riconoscere il tipo di trasformazione e classificarle
- ✓ Applicare i teoremi relativi
- ✓ Saperle applicare alla Fisica (moti relativi)
- ✓ Costruire la figura trasformata di una data
- ✓ Costruire ingrandimenti e riduzioni in scala di una figura piana
- ✓ Individuare gli invarianti di una trasformazione
- ✓ Riconoscere figure simmetriche
- ✓ Classificare i poligoni in base alle loro proprietà di simmetria
- ✓ Riconoscere figure omotetiche e disegnare la corrispondente in una omotetia di una figura
- ✓ Effettuare la traslazione di una figura
- ✓ Effettuare la rotazione di una figura
- ✓ Trovare il vettore che caratterizza una traslazione
- ✓ Eseguire una trasformazione con Cabri

OBIETTIVI FORMATIVI

- ✓ Uso di un linguaggio pertinente e appropriato
- ✓ Saper scegliere la migliore strategia tra quelle proposte (sintetica, analitica o grafica) per la risoluzione di problemi
- ✓ Sviluppare la capacità di rilevare la presenza di isometrie in natura e nelle opere artistiche

- ✓ Sviluppare capacità intuitive, logiche, analitiche e sintetiche
- ✓ Acquisire l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente quanto viene via via appreso
- ✓ Acquisire l'attitudine a studiare ogni questione attraverso l'analisi di tutti i suoi fattori.

MEZZI

- ✓ Libro di testo
- ✓ Lavagna e gesso
- ✓ Fotocopie
- ✓ Lucidi
- ✓ Presentazione con MS-Power Point
- ✓ Laboratorio d'Informatica

CONTENUTI

SUDDIVISIONE MACROSCOPICA:

- ✓ **Contenuto A: 3 ore**
  - Introduzione all'argomento delle trasformazioni;
  - Esempi di figure trasformate mediante trasformazioni geometriche di vario tipo (ombre, foglio di gomma, movimento della giostra, specchi, caleidoscopio);
  - Definizione di affinità;
  - Proprietà delle affinità;
  - Equazioni delle affinità;
  - Classificazione delle affinità
- ✓ **Contenuto B: 3 ore**
  - Definizione di isometria
  - Proprietà delle isometrie
  - Classificazione delle isometrie
  - Definizione di simmetrie
  - Classificazione delle simmetrie:
    - simmetrie assiali
    - simmetrie centrali
  - Proprietà delle simmetrie
  - Equazioni delle simmetrie
  - Figure dotate di un asse di simmetria
- ✓ **Contenuto C: 3 ore**

- Composizione di simmetrie:
  - Traslazione
  - Rotazione
  - Simmetria centrale

✓ **Contenuto D: 3 ore**

- Definizione, Proprietà, Equazioni e Classificazione di omotetie con cenni di richiamo a uguaglianza e similitudine (k = 1, k diverso da 1)
- Nota storica: Le Trasformazioni e la Musica
- Un esempio applicativo: Il Biliardo

✓ **Contenuto E: 1 ora**

- Verifica formativa/sommativa

METODOLOGIE

✓ "Problem-solving"

✓ Intergruppo

✓ Lezione frontale

✓ Lezione in laboratorio d'Informatica: utilizzo di Cabri; volte alla scoperta di nessi, relazioni e leggi

✓ Esercitazioni guidate.

✓ Esercizi a casa

VERIFICA E VALUTAZIONE.

Le verifiche saranno di due tipi in itinere e sommativa, la valutazione seguirà la griglia di valutazione del POF.

- Tipo di verifica: orale, scritta (tramite prova strutturata).

ATTIVITÀ DI RECUPERO

Ripetizione, tramite mappe concettuali e applicazione degli argomenti alla geometria descrittiva, dei contenuti fondamentali e delle proprietà fondamentali sia tramite lezione frontale sia tramite approfondimenti in laboratorio.

VERIFICA DI RECUPERO

- Tramite prova orale e scritta.

SUDDIVISIONE DETTAGLIATA DEI CONTENUTI

CONTENUTO A

INTRODUZIONE ALL'ARGOMENTO DELLE TRASFORMAZIONI

Idea intuitiva

Per introdurre le trasformazioni geometriche sono partita direttamente dalla figura seguente: Ho posto i ragazzi dinanzi all'osservazione delle figure A, B, C, D, F per cercare di farli capire intuitivamente quale nesso poteva legarle.

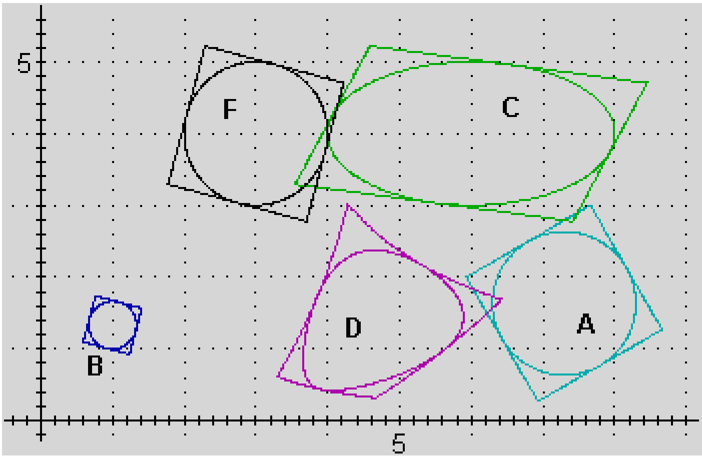


Figura 1: Alcune trasformazioni della figura F

Ho quindi osservato che, due *figure* piane (rappresentate su un sistema monometrico) sono *uguali* se sono completamente sovrapponibili (questo si può ottenere ricalcando una figura qualsiasi (originale) su un supporto trasparente come un foglio lucido o una lastra di vetro

? Domanda stimolo: che cosa succederebbe se invece di ricalcare semplicemente, proiettassimo tramite una lampada, la figura origine su un foglio inclinato, oppure ricalcassimo su un supporto ondulato, cioè non piano?

Potremmo osservare le trasformazioni proposte in Figura.

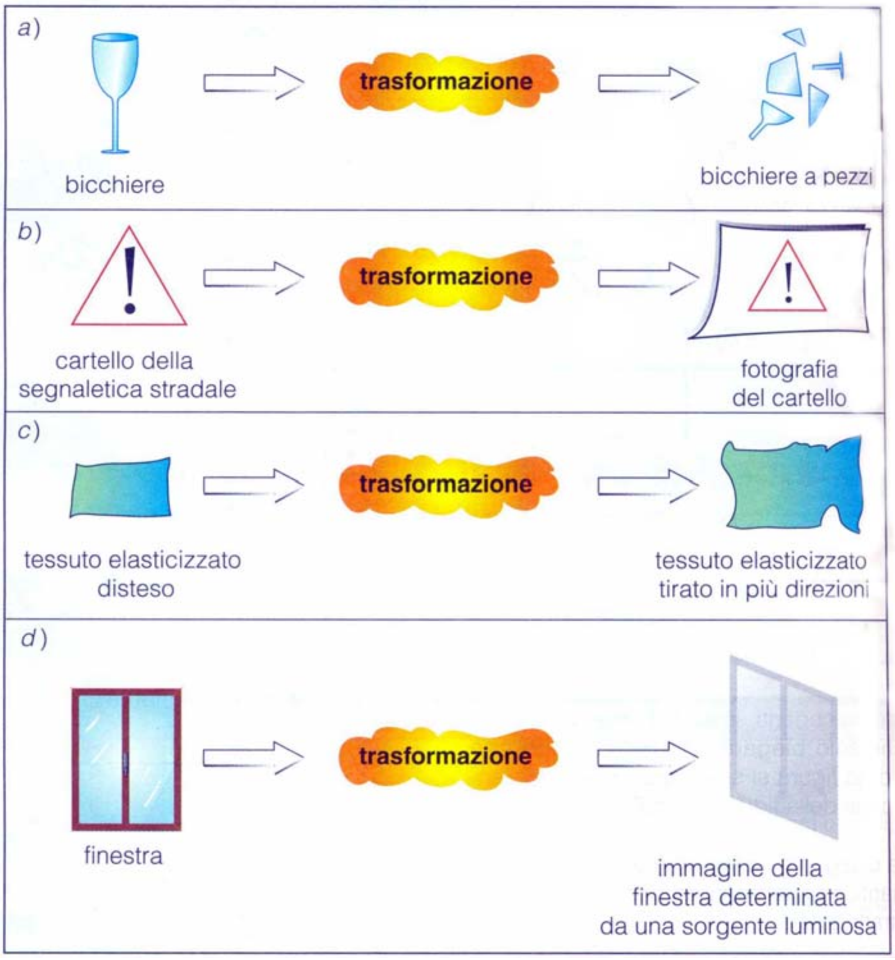
In particolare, possiamo costruire una funzione che trasforma le coordinate (x,y) di ogni punto della figura originale nelle coordinate (x',y') di ogni punto corrispondente della figura trasformata.

? Domanda stimolo: Di che tipo è questa particolare funzione?

Non può essere una funzione qualunque. Ad es.: l'applicazione $(x,y) \to (x',y') = (2x,y)$ raddoppia le x, per cui i punti della figura **F** verrebbero trasformati nei punti della figura **C**, che è alta come **F** ma più larga; l'applicazione $(x,y) \to (x',y') = (x/3,y/3)$ trasforma **F** in **B**, con la stessa forma ma più piccola (il fattore di scala è 1/3); mentre la figura **D** è stata ottenuta trasformando i punti di **F** con una funzione $(x,y) \to (x',y')$ più complicata; **D** ha un'evidente "parentela" con **F** (anch'essa è formata da una curva con 4 "punti angolosi" che ha al suo interno una curva "liscia", …), ma è *deformata come se fosse stata tirata in varie direzioni.* Invece la figura **A** sembra essere ottenibile mediante uno scorrimento di un vetro su cui si sia ricalcata **F** (con "far scorrere" il vetro intendo sia trascinarlo che cambiarne l'orientamento, cioè ruotarlo).

In modo del tutto intuitivo li ho portati quindi a capire che esistono in generale vari tipi di trasformazioni: quelle che trasformano una figura in una congruente, quelle che la trasformano in una simile e infine quelle che la deformano.

D'altra parte la vita quotidiana ci presenta una molteplicità di esempi di trasformazioni che noi osserviamo, anche se la nostra attenzione è spesso più rivolta a cogliere gli aspetti e le caratteristiche dell'oggetto trasformato piuttosto che al procedimento che ha determinato la trasformazione stessa. Nella figura seguente sono mostrati alcuni esempi di trasformazione:



Il caso a) è un esempio di trasformazione che non conserva alcuna delle caratteristiche geometriche della figura iniziale.

Il caso *b)* è un esempio di trasformazione in cui il disegno del cartello e la sua fotografia presentano a stessa forma.

Il caso *c)* è un esempio di trasformazione in cui ogni punto interno o esterno al tessuto disteso rimane interno o esterno al tessuto tirato in più direzioni. In generale esempi comunissimi sono costituiti dalle deformazioni che subiscono i *corpi elastici*: si pensi alla deformazione che subisce una gomma per cancellare quando viene piegata o ad un taglio di stoffa "stretch" che viene deformato senza che si verifichino lacerazioni o sovrapposizioni.

Il caso *d)* è un esempio di trasformazione che conserva i punti interni ed esterni e mantiene l'allineament dei punti.

La cosa interessante è che una figura può essere trasformata mediante delle relazioni che saranno rappresentate da equazioni matematiche.

Attività stimolo

Per far visualizzare agli studenti le caratteristiche delle trasformazioni si può fare una semplice esperienza utilizzando una tela elastica su cui viene disegnato un rettangolo e facendo osservare la figura ottenuta dilatando la tela. Le domande che si possono porre agli studenti sono le seguenti:

- la figura ha ancora gli angoli retti?
- la figura ha mantenuto i lati della stessa lunghezza?
- la figura ha ancora i lati paralleli?
- la figura ha ancora i lati rettilinei?
- se disegnassi il rettangolo con i lati paralleli al "bordo della tela", che figura otterrei? Disegnare la figura prevista.

La stessa esperienza può essere ripetuta disegnando un cerchio e ponendo le seguenti domande:

- la figura è ancora un cerchio?
- la figura ha mantenuto tutti i raggi della stessa lunghezza?
- i diametri rimangono rettilinei?

Il concetto di trasformazione geometrica è poi essenziale in tutti i processi di rappresentazione piana di un oggetto tridimensionale.

Semplici esempi sono forniti al riguardo dal *disegno "dal vero"* o dalla *fotografia* che costituiscono la rappresentazione in due dimensioni di un oggetto tridimensionale.

Altro esempio è dato dalle *carte geografiche* la cui realizzazione è legata al problema di rappresentare su un piano una parte di superficie sferica. La parte di superficie terrestre che si rappresenta viene trasformata poiché ogni suo punto dovrà essere *proiettato* sul foglio di carta.

Un altro esempio comune di trasformazione dovuta alla rappresentazione su una superficie di oggetti tridimensionali è *l'immagine riflessa in uno specchio*: si ottengono trasformazioni

diverse a seconda che lo specchio sia piano, convesso con curvatura in orizzontale oppure convesso con curvatura in verticale.
Altri comunissimi esempi di trasformazioni geometriche nella vita quotidiana sono gli *ingrandimenti fotografici* e le *ombre* prodotte da sorgenti luminose puntiformi o estese come il sole.
Esempi analoghi sono costituiti dalla *proiezione di diapositive* con il proiettore disposto secondo diverse inclinazioni rispetto alla parete su cui avviene la proiezione.
Esempi curiosi, meno comuni ma interessanti dal punto di vista artistico, sono costituiti dalle trasformazioni anamorfiche , dette anche *anamorfosi*. In particolare, il termine anamorfosi indica una trasformazione in cui le figure vengono deformate al punto da apparire comprensibili solo se osservate di sbieco. Il termine deriva dal greco *anà* (di nuovo) e *morfè* (forma) e sta appunto a significare che l'immagine distorta può essere "formata di nuovo" guardandola da un particolare punto di vista.
I soggetti delle composizioni anamorfiche, decifrabili solo da chi era a conoscenza dei trucchi di questo particolare linguaggio iconografico, sono i più vari, andando dalle scene licenziose e grottesche, ai ritratti e alle immagini sacre.
Un significativo esempio di anamorfismo è contenuto nel famoso quadro *Gli ambasciatori* di Hans Holbein il Giovine (*figura 2*). In esso il nobiluomo Jean de Dinteville e il vescovo Georges de Selves, messi di Francesco I di Francia alla corte inglese, appaiono sontuosamente vestiti contro uno sfondo zeppo di strumenti, riguardanti l'aritmetica e la geometria,

Figura 1: Gli ambasciatori di Hans Holbein il Giovine

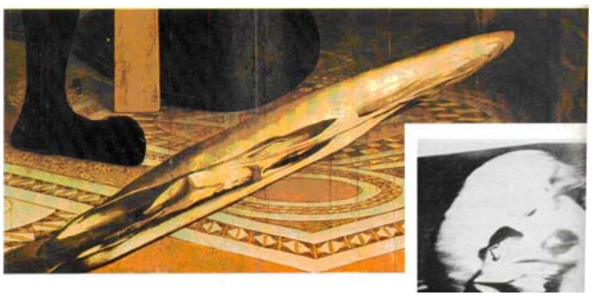
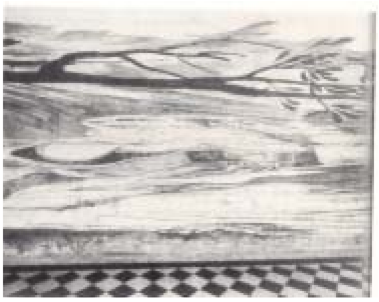


Figura 3: Rettifica ottica del teschio ottenuta fotogra fondo obliquamente la superficie del dipinto

l'astronomia e la musica, denotativi, tutti, delle attività e degli interessi culturali dei due personaggi ritratti, vicendevolmente legati dalla passione per la musica e per le scienze matematiche. Parrebbe insomma una pacata celebrazione dell'ingegno umano, se una singolare apparizione, un'inquietante forma oblunga, non fosse sospesa davanti a loro sfiorando appena il pavimento. Che cos'è? E l'anamorfosi di un teschio umano, emblema di caducità. Il quadro è in effetti un *memento mori,* tema molto comune nella pittura dell'area tedesca e fiamminga dal Cinquecento in poi. Sono rappresentate, qui, due persone all'apice del successo; ma in primo piano c'è quell'oggetto ammonitore, un segno per ricordare che anch'essi dovranno morire. In origine il quadro era probabilmente collocato su di una parete, a sinistra della quale si trovava la porta d'uscita. Passando di lì, e rigirandosi per dare un ultimo sguardo al dipinto, i visitatori scoprivano la figura segreta rimasta indecifrabile nella visione frontale. Nelle nostre riproduzioni, per vedere il teschio, si deve chiudere un occhio e guardare la pagina tenendola molto inclinata a una distanza di circa 5 centimetri dall'occhio aperto, con l'angolo sinistro girato verso voi. Un altro modo di osservare il teschio è quello di usare uno specchio, inclinandolo opportunamente così da vedere di scorcio, e quindi ridimensionata, la figura anamorfica.

Un altro esempio di figura anamorfica . si trova in un affresco del XVII sec.: *S. Francesco di Paola* (1642), di J.Francois Niceron, Convento della Trinità dei Monti, Roma (*figura 4*).



Nella prima delle figure si può osservare la visione prospettica che si ha all'inizio del corridoio: appare l'immagine del Santo che prega. L'immagine muta via via che si percorre il corridoio e, nella visione frontale, che si osserva nella seconda foto, si trasforma in un paesaggio della costa calabra.

Figura 4: S. Francesco di Paola (1642), di J.Francois Niceron

Un altro esempio è dato dalla figura seguente:

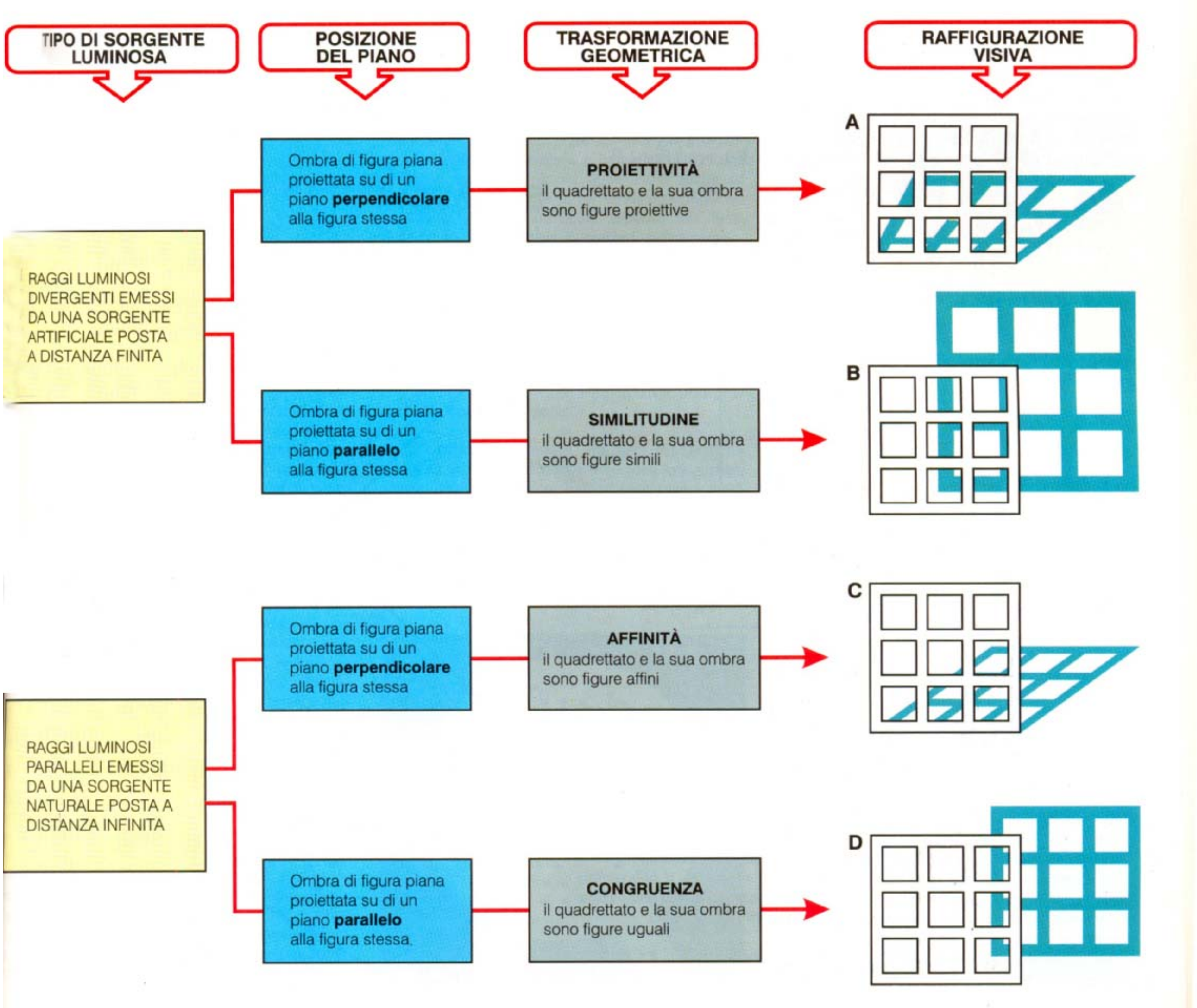
La figura rappresenta un'incisione di M.C.Escher (1898-1972). Essa fornisce un esempio di riflessione sulla sfera; è interessante notare che le linee rette degli spigoli della stanza dove si trova l'artista sono diventate linee curve.

Dagli esempi riportati in precedenza emerge che una *figura geometrica* può essere sottoposta a molte *trasformazioni* , per effetto delle quali alcune caratteristiche ovviamente variano mentre altre rimangono le stesse.

Osservazione: *La nostra attenzione sarà rivolta agli elementi o alle proprietà che rimangono immutate piuttosto che alle caratteristiche che invece cambiano.*

Negli esempi reali sopra proposti è infatti possibile individuare alcune caratteristiche geometriche della figura iniziale che rimangono *invariate* nella trasformazione, nonostante la figura sia mutata. Nel caso stoffa "stretch" che viene tesa è possibile osservare che, nonostante la figura rettangolare della stoffa e gli eventuali disegni su essa vengano deformati, ogni punto interno al disegno rimane interno ed ogni punto esterno rimane esterno.

È interessante notare cosa accade nel caso delle ombre. Lo schema seguente mostra come varia l'ombra di una figura a seconda del tipo di sorgente luminosa e della posizione del piano di proiezione:



Nel caso dell' ombra di una figura piana, questa *non risulta deformata* quando il piano di proiezione è parallelo a quello della figura d'origine. Inoltre, se la sorgente è estesa ed il piano

di proiezione è parallelo a quello della figura d'origine, accade che l'ombra conserva anche la stessa dimensione di quella di partenza.
E' facile intuire che maggiore è il numero delle trasformazioni che una figura subisce, minore è il numero delle caratteristiche che rimangono *invariate*.

☞ ***Formalizzazione***

Si definisce ***invariante*** *ogni caratteristica della figura che in una trasformazione non cambia.*
Gli invarianti di una trasformazione geometrica possono essere:

- *quantità dei punti*
- *distanza*
- *allineamento*
- *parallelismo*
- *direzione*
- *relazione fra punti allineati*
- *ampiezza degli angoli*
- *area*
- *lunghezza dei segmenti*
- *posizione*

Si definisce ***trasformazione geometrica*** *una corrispondenza biunivoca* $(x,y)\rightarrow(x',y')$ *che associa a ogni punto del piano un altro punto del piano.*

Osservazione: quando si effettua una trasformazione, occorre tener fisso il sistema di riferimento. Cioè, gli assi non sono coinvolti dalla trasformazione; se infatti anche gli essi si modificassero, non cambierebbero neppure le coordinate dei punti.

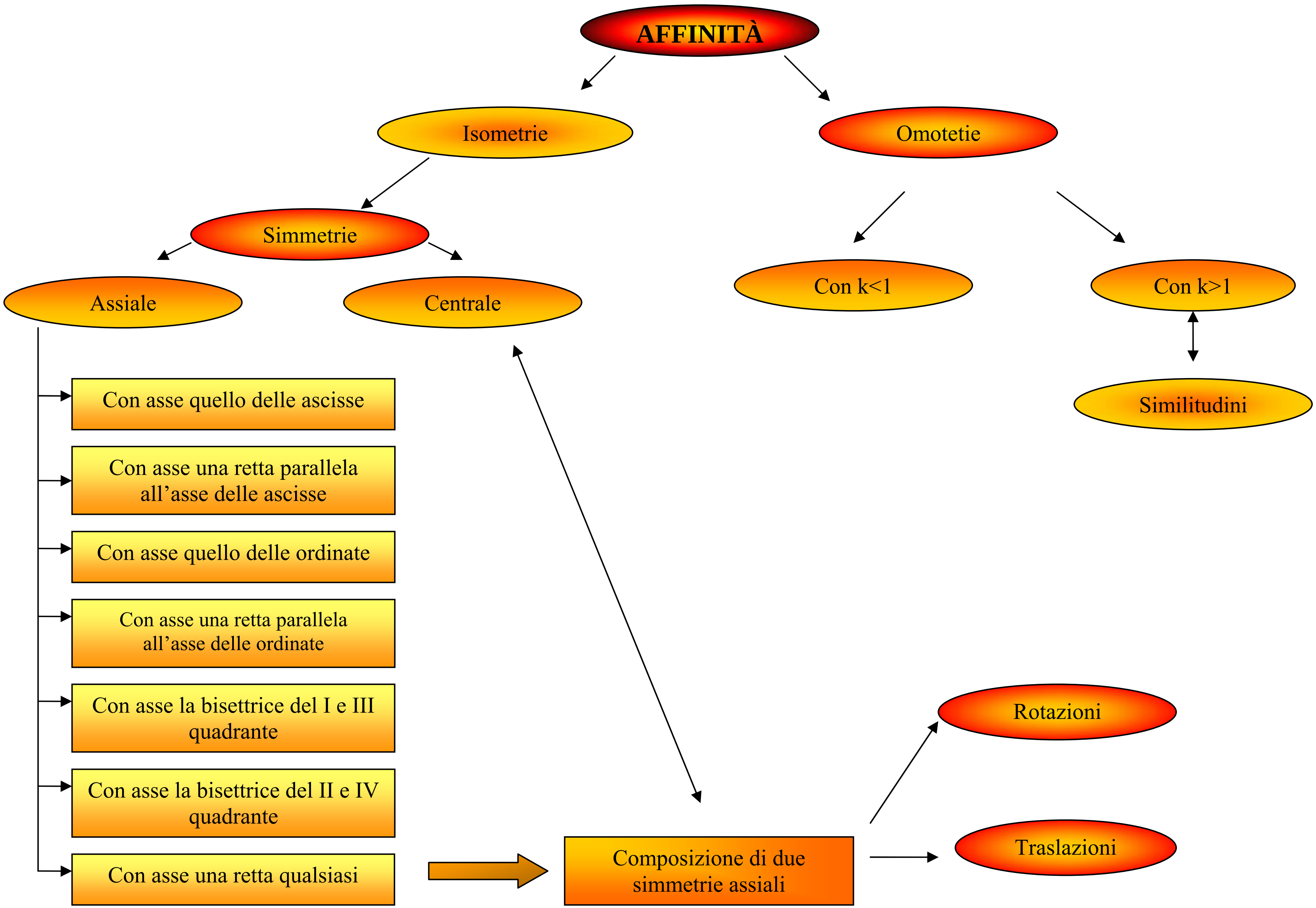
Nel piano *euclideo*, le trasformazioni che corrispondono alla nostra idea di "scorrimento" vengono chiamate ***movimenti.***

Le trasformazioni geometriche si *classificano* in base ai loro invarianti in:

1. trasformazioni topologiche
2. trasformazioni proiettive
3. trasformazioni affini
4. trasformazioni simili
5. trasformazioni isometriche

📖 MAPPA CONCETTUALE

La mappa concettuale della pagina seguente schematizza i vari tipi di trasformazione ed è stata mostrata agli studenti sia in questa prima fase, al fine di avere una visione globale di ciò che si voleva fare, sia al termine dell'intervento didattico per riepilogare quanto visto durante le lezioni.


AFFINITÀ
Isometrie
Omotetie
Simmetrie
Assiale
Centrale
Con k<1
Con k>1
Similitudini
Con asse quello delle ascisse
Con asse una retta parallela all’asse delle ascisse
Con asse quello delle ordinate
Con asse una retta parallela all’asse delle ordinate
Con asse la bisettrice del I e III quadrante
Con asse la bisettrice del II e IV quadrante
Con asse una retta qualsiasi
Composizione di due simmetrie assiali
Rotazioni
Traslazioni

🕮 LE AFFINITÀ

Approccio intuitivo

Considerando l'ombra proiettata dai raggi del Sole o la proiezione parallela di un piano su un altro otteniamo esempi di trasformazioni affini (*figura 1*).

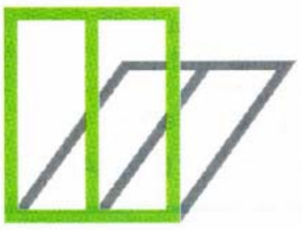


Figura 1

Una **affinità** è, infatti, una corrispondenza biunivoca fra punti del piano che ha come invarianti l'allineamento dei punti ed il parallelismo. Ad una affinità si richiede quindi solo di trasformare rette in rette e rette parallele in rette parallele.
Le ombre proiettate da una lampada, invece, mantengono l'allineamento dei punti ma non conservano il parallelismo *(figura 2);* le immagini riflesse da uno specchio concavo non mantengono nè l'allineamento dei punti, nè il parallelismo *(figura 3).*

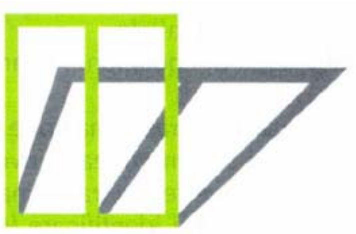


Figura 2

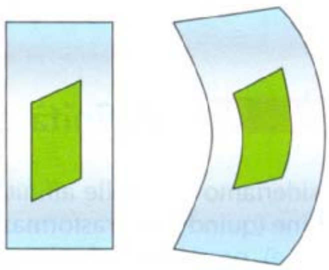


Figura 2

Questi ultimi non sono quindi esempi di trasformazioni affini.

? Domanda stimolo: da quali equazioni è descritta una trasformazione affine?

☞ ***Formalizzazione***

Un'*affinità* è una trasformazione del piano che trasforma rette in rette. Per tale motivo le sue equazioni devono trasformare un'equazione di primo grado nelle variabili x ed y in un'altra equazione di primo grado. Ne segue che le equazioni di una generica affinità sono:

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases} \text{ con } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1)$$

Dove la matrice $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ è detta matrice dei coefficienti.

Proprietà

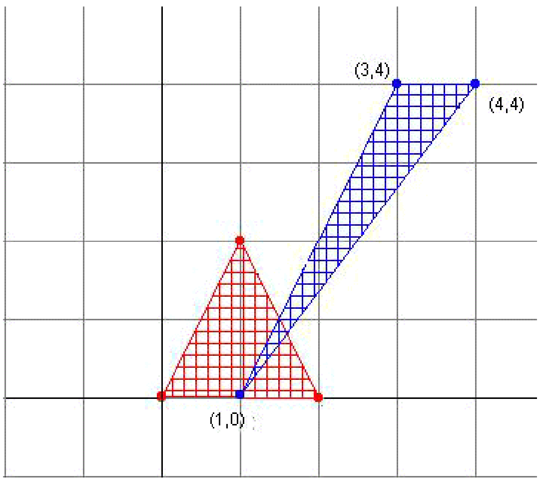
a) Un'affinità trasforma *rette parallele* in *rette parallele*;
b) Un'affinità trasforma *poligoni di n lati* in *poligoni di n lati*;
c) Un'affinità trasforma *iperboli* in *iperboli*;
d) Un'affinità trasforma *ellissi* in *ellissi*; (caso particolare circonferenza in ellisse)
e) Un'affinità trasforma *parabole* in *parabole*;
f) Un'affinità trasforma *parallelogrammi* in *parallelogrammi*;
g) Un'affinità conserva il parallelismo ma non la perpendicolarità;
h) Il gruppo delle affinità è un gruppo non commutativo.

Osservazione: se nelle equazioni (1) mancano i termini noti, cioè se e ed f sono uguali a 0, l'affinità lascia fissa l'origine.

Esempio 1

Consideriamo la seguente affinità ***T***: $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = 2x + y \end{cases}$

Si tratta di un'affinità poiché det(A)=-1. Per capire come agisce ***T***, vediamo come viene trasformato da ***T*** il triangolo isoscele **ABC** (in figura rappresentato in rosso) di vertici **A**(0,0),



B(2,0), **C**(1,2). Il punto **A** ha come immagine il punto **A'**(1,0). Il punto **B** ha come immagine il punto **B'**(3,4). Il punto **C** ha come immagine il punto **C'**(4,4).

Notiamo che la figura trasformata (nel disegno il triangolo in blu) è un triangolo scaleno.

Esempio 2

Consideriamo la seguente affinità ***T***:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 1{,}5x + 1{,}5y \end{cases}$$

Si tratta di un'affinità poiché det(A)=3. Per capire come agisce ***T***, vediamo come viene trasformato da ***T*** la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 (fig. 1). La figura trasformata è un'ellisse (fig.2).

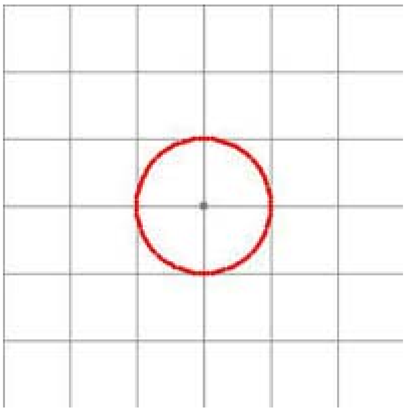


Figura 1

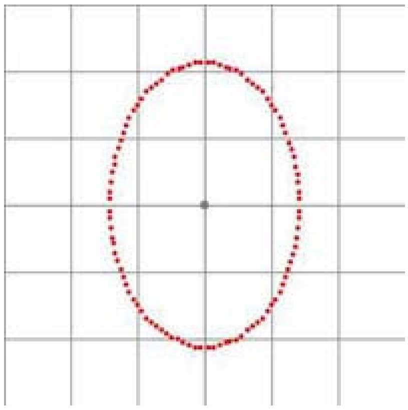


Figura 2

🕮 TIPI PARTICOLARI DI AFFINITÀ.

Le affinità si possono classificare in vari tipi a seconda delle proprietà di cui godono o meglio dei loro invarianti. Una affinità si dice una ***similitudine*** se conserva l'ampiezza degli angoli. In particolare le similitudini conservano il parallelismo fra le rette e trasformano una figura in un'altra simile a quella data. Fra le similitudini una particolare importanza hanno le ***omotetie***. Una affinità si chiama ***isometria*** quando fa corrispondere a due punti qualsiasi **A** e **B** due punti **A'** e **B'** in modo tale che il segmento **AB** sia congruente al segmento **A'B'**. Possiamo quindi dire che un'isometria è un'affinità che conserva le distanze e la forma e la grandezza delle figure. Fra le isometrie possiamo distinguere ulteriormente ***le rotazioni***, ***le traslazioni***. Una isometria è ovviamente una similitudine.

Laboratorio d'Informatica:

Allo scopo di dare un idea intuitiva e di introdurre gli studenti le proprietà delle affinità si può mostrare un videoclip sulle varie trasformazioni affini a cui può essere sottoposto un parallelogramma:

CONTENUTO B: *Le isometrie piane*

Le *isometrie* (dal greco *ìsos* "uguale" e *métron* "misura") sono le trasformazioni del piano che conservano la distanza.

La *distanza* tra due qualsiasi punti P e Q del piano (*che indichiamo con d(P;Q)*) verifica le seguenti proprietà:

1. È sempre positiva o al più nulla (*in simboli*: $\forall P,Q \in \wp : d(P;Q) \geq 0$);
2. È uguale a zero solo se il punto P coincide col punto Q (*in simboli*: $d(P;Q) = 0 \Leftrightarrow P=Q$);
3. Verifica la disuguaglianza triangolare, cioè la distanza tra il punto P e il punto Q è minore o uguale della somma delle distanze di un altro punto R dai punti P e Q (*in simboli*: $d(P;Q) \leq d(P;R) + d(R;Q)$).

Quindi un'isometria è una corrispondenza biunivoca del piano $\mathscr{P}$ in se stesso che a due punti qualsiasi P e Q del piano associa due punti P' e Q' dello stesso piano tali che la distanza del punto P' dal .punto Q' è uguale alla distanza del punto P dal punto Q.

In simboli:

f *è un'**isometria*** $\Leftrightarrow$ $\quad f: \mathscr{P} \rightarrow \mathscr{P}$

$$P \rightarrow f(P) = P'$$

tale che $d(P;Q)=d(f(P);f(Q))=d(P';Q')$

Proprietà:

- Ogni isometria trasforma una retta in una retta
- In ogni isometria a rette parallele corrispondono rette parallele e a rette incidenti corrispondono rette incidenti
- Ogni isometria trasforma un angolo in un angolo ad esso congruente
- L'insieme delle isometrie è un gruppo di trasformazioni del piano (o dello spazio) non commutativo.

📖 SIMMETRIE ASSIALI O RIBALTAMENTI O RIFLESSIONI

☞*Approccio intuitivo*

Osservando da una posizione opportuna un oggetto posto di fronte ad uno specchio, i nostri occhi rilevano la figura reale e la sua *immagine riflessa*. Parliamo allora di "immagine speculare" e diciamo che questa è la ***simmetrica*** di quella reale.

Alcuni esempi di simmetria assiale sono rappresentati da oggetti della realtà quotidiana e possono essere tratti dalla natura e dall'arte. Ne vediamo alcuni nelle figure seguenti:

Figura 1
Il caduceo è simmetrico rispetto ad una retta verticale.

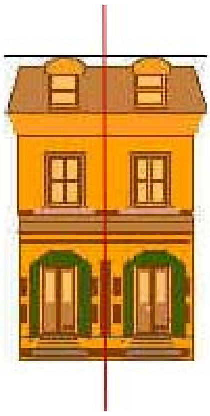
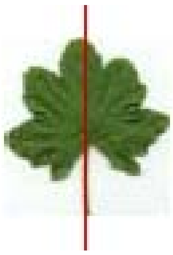


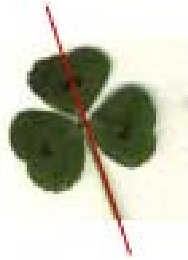
Figura 2
La facciata di una casa di stile vittoriano presenta un asse di simmetria verticale.

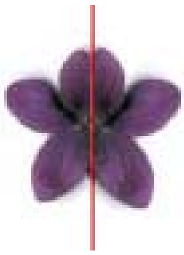
Figura 3:
I fregi del portale sono simmetrici rispetto ad un asse verticale

Figura 4
La piazza del Campidoglio a Roma presenta diversi assi di simmetria

Molte foglie e fiori in natura presentano un asse di simmetria: nelle figure seguenti osserviamo una foglia di malva, il trifoglio e la delicata viola del pensiero:







Anche il viso umano, se pur non perfettamente, può essere considerato un esempio di simmetria assiale con asse verticale, come si osserva nella figura seguente:

Si chiama *simmetria assiale* o *ribaltamento assiale* o *riflessione* rispetto ad una retta r (detta *asse della simmetria* o della riflessione), l'applicazione che ad un punto P associa un punto P' tale che la distanza di P' da r sia uguale alla distanza di P da r. In particolare, se il punto P si trova sulla retta r il suo trasformato P' coinciderà con lo stesso P, cioè in una simmetria assiale sono **uniti**[1] tutti e soli i punti che appartengono all'asse di simmetria.

In simboli:

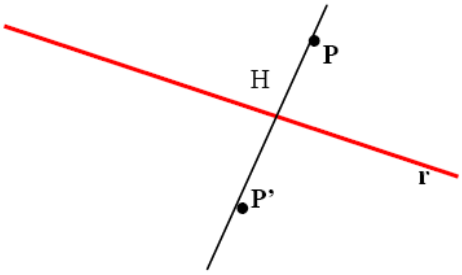
σ_r** è una **simmetria assiale di asse la retta r $\Leftrightarrow$ $\sigma_r : \mathscr{P} \rightarrow \mathscr{P}$

$$P \rightarrow \sigma_r(P) = P'$$

tale che:

a) $P' = P$ se $P \in r$

b) Se $P \notin r$, allora P' è il punto posto sulla perpendicolare per P ad r dalla parte, rispetto ad r, non contenente P e tale che $d(P;r) = d(P';r)$.



Proprietà:

- ✓ Ogni simmetria assiale è un'isometria
- ✓ L'asse r di una simmetria assiale σ_r è una retta luogo di punti uniti
- ✓ Tutte le rette perpendicolari all'asse r sono unite (ma non sono luogo di punti uniti)
- ✓ Se s è una retta parallela ad r, allora la trasformata di s mediante la simmetria assiale di asse la retta r è una retta ancora parallela all'asse r, cioè $\sigma_r(s)$ è parallela all'asse r.
- ✓ Applicando due volte una simmetria assiale si ottiene nuovamente la figura di partenza, cioè ogni simmetria assiale è *involutoria*: $\sigma_r \circ \sigma_r = I_d$
- ✓ Presi due punti qualsiasi del piano, P e P', esiste un'unica simmetria assiale che trasforma P in P'.
- ✓ Ogni punto dell'asse di simmetria è equidistante da ogni coppia di punti corrispondenti.
- ✓ La composizione di due simmetrie assiali con assi diversi non è una simmetria assiale (e quindi l'insieme delle simmetrie assiali non è un gruppo)

[1] Si dice **unito** ogni punto che ha per corrispondente se stesso.

- ✓ In generale per la composizione di due simmetrie assiali ad assi diversi non vale la proprietà commutativa. Ossia, in simboli: $\sigma_r \circ \sigma_s \neq \sigma_r \circ \sigma_s$
- ✓ Se una figura viene trasformata in se stessa da una simmetria assiale si dice che possiede un asse di simmetria.

Attività sperimentale

Tramite una semplice esperienza con l'utilizzo di materiale "povero", cioè di un ca*rtoncino bianco, pennarelli e forbici* ho fatto costruire facilmente una figura simmetrica: si piega il cartoncino in due parti uguali e si disegna il contorno di una figura; si ritaglia il contorno disegnato e si apre il cartoncino. Ho fatto osservare che, relativamente alla piegatura del foglio le due mezze *figure* sono *simmetriche* rispetto alla linea corrispondente alla piegatura del foglio e tale linea costituisce l'*asse* di simmetria.

Problemi stimolo

Le attività che seguono sono state lasciate da svolgere autonomamente agli alunni con lo scopo di far acquisire loro il concetto di simmetrica di una figura qualsiasi quale applicazione del procedimento sopra descritto per un singolo punto. In particolare, gli ho fatto notare che per costruire la simmetrica di una figura si dovrebbe costruire il simmetrico di ogni suo punto, essendo ciò materialmente impossibile, in virtù del fatto che la simmetria assiale è una collineazione, si procede costruendo i simmetrici di punti significativi.

1. Costruire il simmetrico di un segmento rispetto ad una retta.
2. Costruire il simmetrico di un poligono rispetto ad una retta.

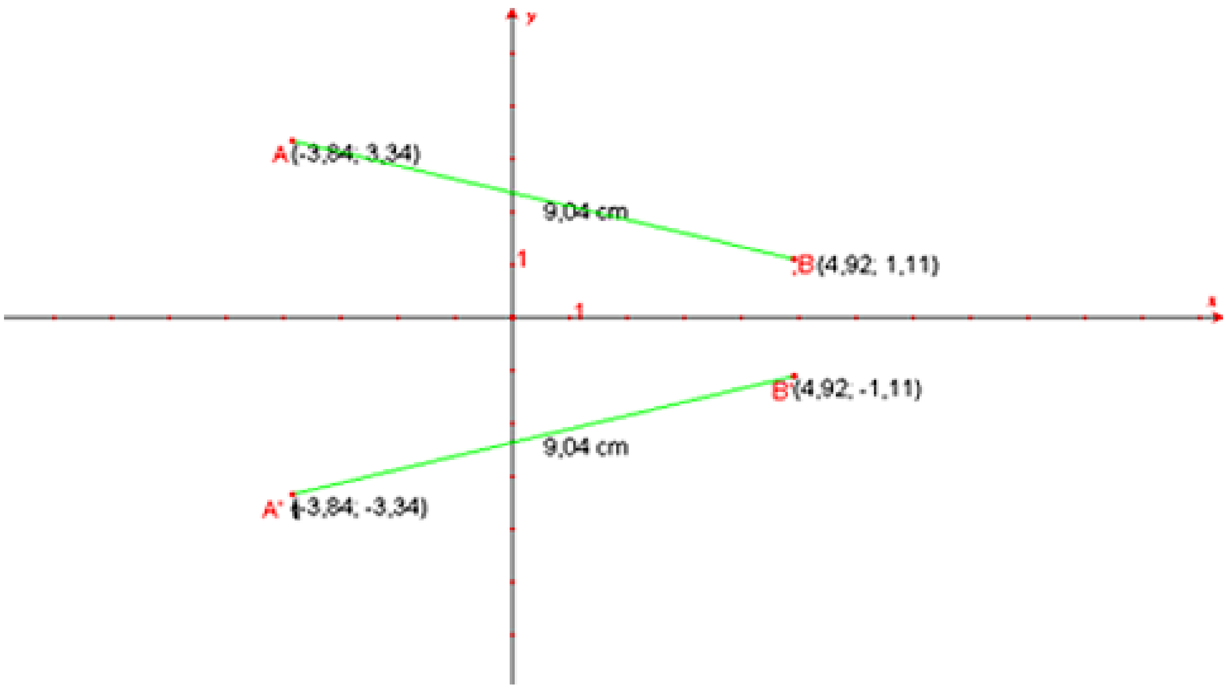
Laboratorio d'Informatica:

Utilizzando il laboratorio d'Informatica e, in particolare il software "Cabri Géometre II Plus" si da la possibilità agli studenti di vedere "dal vivo" le proprietà delle trasformazioni. Essi hanno scoperto il concetto di invariante e sono stati invogliati alla ricerca dei motivi per cui alcuni elementi della figura risultano immutati rispetto ad una certa trasformazione. Cabri è stato utilizzato in parallelo con lo svolgimento della teoria, infatti esso è molto utile per effettuare esplorazioni sulle proprietà delle figure, osservare relazioni, pervenire autonomamente alla definizione di alcuni concetti e di alcune proprietà, formulare delle congetture e validare teoremi**.** In particolare, la possibilità offerta da Cabri di modificare in modo continuo una figura fornisce l'occasione di uno studio efficace ed immediato delle trasformazioni geometriche. Ricordo che nel programma Cabri la barra degli strumenti contiene una collezione di pulsanti che consentono la creazione di varie costruzioni geometriche. In particolare, l'icona degli strumenti *Trasforma* contiene gli strumenti che consentono di eseguirei principali tipi di trasformazioni geometriche.

Cliccando su tale icona e tenendo premuto il mouse compare l'elenco delle trasformazioni disponibili. Il primo strumento associato all'icona *Trasforma* è *Simmetria assiale*; esso consente di costruire l'immagine di un qualsiasi oggetto simmetrica rispetto ad una retta. In conformità al criterio metodologico di cui sopra, la trattazione delle particolari simmetrie assiali può iniziare proprio nel laboratorio di Informatica.

Costruzione n.1:

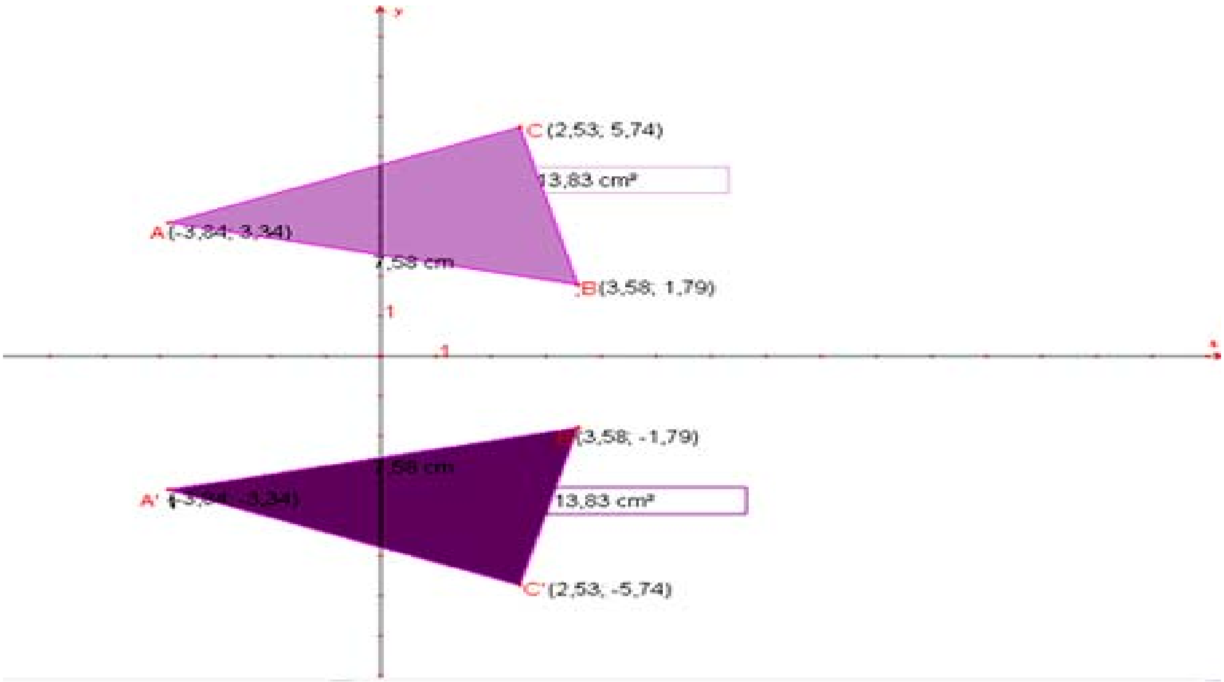
- Prendere due punti *A* e *B* e visualizzarne le coordinate;
- Tracciare un segmento *AB*;
- Farne il trasformato *A'B'* rispetto all'asse *x*;
- Osservare la relazione esistente tra le coordinate dei punti di partenza e dei punti trasformati;
- Calcolare la lunghezza dei segmenti *AB* ed *A'B'* e verificarne la congruenza



Costruzione n.2:

- Prendere tre punti *A* e *B* e visualizzarne le coordinate;
- Tracciare il triangolo *ABC*;
- Farne il trasformato *A'B'C'* rispetto all'asse *x*;
- Osservare la relazione esistente tra le coordinate dei punti di partenza e dei punti trasformati;
- Calcolare le lunghezza dei segmenti *AB*, *BC*, *AC* ed *A'B'*, *B'C'* ed *A'C'* e verificare la congruenza dei segmenti omologhi;

- Calcolare i perimetri dei triangoli *ABC* ed *A'B'C'* e verificarne la congruenza
- Calcolare le aree dei triangoli *ABC* ed *A'B'C'* e verificarne l'equivalenza;

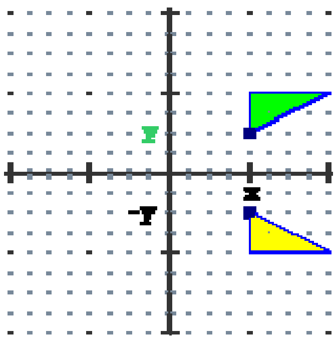


Formalizzazione:

⇨ *Simmetria assiale di asse quello delle ascisse*

L'asse delle ascisse ha equazione $y = 0$ ed è l'asse del segmento *PP'* congiungente un punto $P(x, y)$ con il suo trasformato $P'(x', y')$.

Ne segue che le formule analitiche di tale simmetria sono: $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$



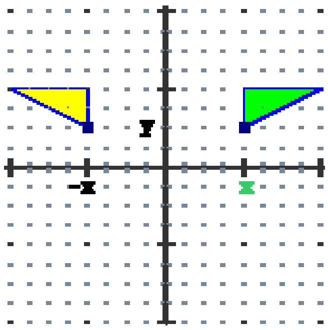
Laboratorio d'Informatica:

Le costruzioni 1 e 2 fatte in precedenza sono state ripetute applicando rispettivamente le simmetrie di asse l'asse delle ordinate, di asse una retta parallela all'asse delle ascisse, di asse una retta parallela all'asse delle ordinate, di asse la bisettrice del 1° e del 3° quadrante, di asse la bisettrice del 2° e 4° quadrante e di asse una retta qualsiasi.

✍ *Formalizzazione:*

⇨ *Simmetria assiale di asse quello delle ordinate*

Analogamente al caso della simmetria di asse l'asse delle ascisse si ottiene: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$



⇨ *Simmetria assiale di asse una retta parallela all'asse delle ascisse*

Sia $y = h$ l'equazione di una retta r parallela all'asse delle ascisse, consideriamo un punto $P(x, y)$ e il suo corrispondente $P'(x, y)$. Indicato con H il piede della perpendicolare condotta da P alla retta r, risulta $H(x, h)$. Il punto H è il punto medio del segmento PP', quindi si ottiene:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2h - y \end{cases}$$

⇨ *Simmetria assiale di asse una retta parallela all'asse delle ordinate*

Analogamente al caso precedente le equazioni della simmetria assiale di asse una retta di equazione $x = k$ sono:

$$\begin{cases} x' = 2k - x \\ y' = y \end{cases}$$

⇨ *Simmetria assiale di asse la bisettrice del 1° e 3° quadrante di equazione $y = x$*

Consideriamo il punto Q intersezione della retta per P parallela all'asse delle ascisse con la bisettrice r e uniamo Q con P'. Risulta : $PQ = P'Q$ (perché Q appartiene all'asse del segmento PP') ed inoltre la retta per P' e Q è parallela all'asse delle ordinate. Indicate con (x_Q, y_Q) le coordinate di Q (e quindi: $y_Q = x_Q$), risulta:

$$PQ = x - x_Q \text{ e } P'Q = y' - y_Q$$

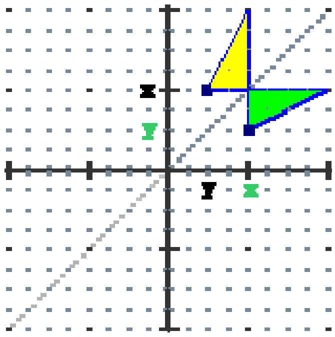
e quindi:

$$y' - y_Q = x - x_Q \Rightarrow y' = x.$$

Inoltre:

$$x' = x_Q \text{ e } y = y_Q \Rightarrow x' = y.)$$

Ne segue che le equazioni di tale simmetria sono: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$



⇨ *Simmetria assiale di asse la bisettrice del 2° e 4° quadrante di equazione y = - x*

Analogamente al caso precedente si ottiene che le equazioni di tale simmetria sono: $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$

⇨ *Simmetria assiale di asse una retta non parallela agli assi coordinati*

Considerando una retta *r* non parallela agli assi coordinati e detta $y = mx+q$ la sua equazione, allora le equazioni della simmetria di asse la retta *r* sono:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-x(m^2-1)+2my-2qm}{1+m^2} \\ y' = \dfrac{y(m^2-1)+2mx+2q}{1+m^2} \end{cases}$$

CONTENUTO C: *Composizione di simmetrie*

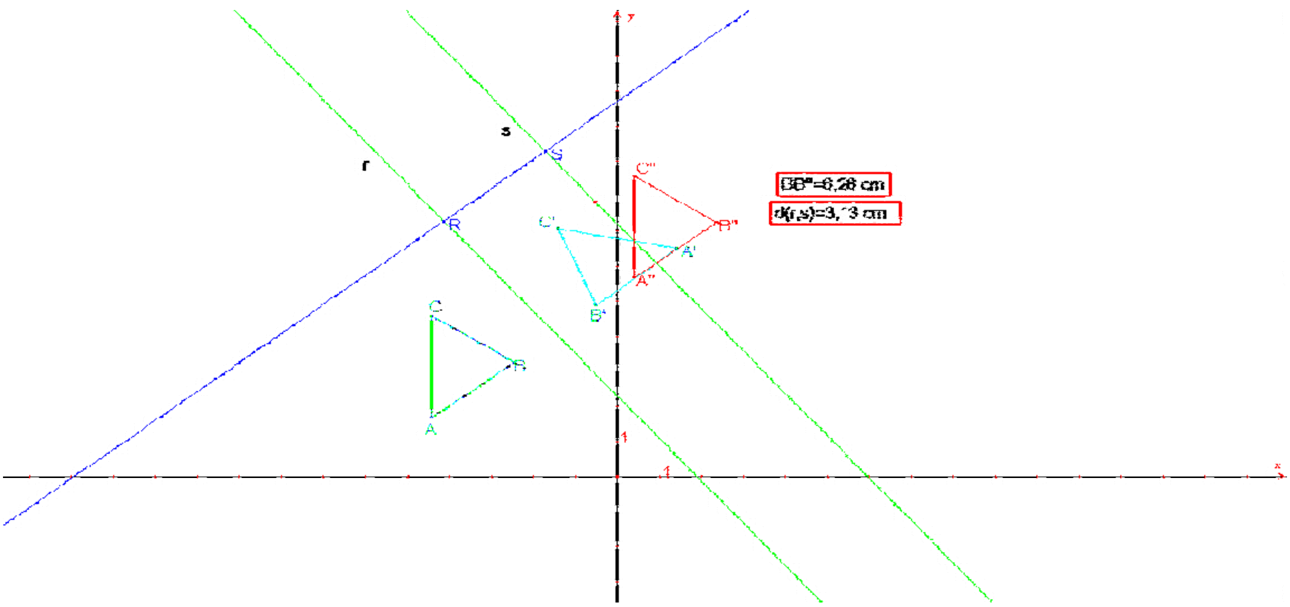
LE TRASLAZIONI

Problema stimolo in Laboratorio d'Informatica:

Cosa succede componendo due simmetrie assiali ad assi paralleli?

- Prendere tre punti *A*, *B* e *C*;
- Tracciare il triangolo *ABC*;
- Prendere un punto *R* e tracciare una retta *r* passante per *R*;
- Costruire il simmetrico *A'B'C'* del triangolo *ABC* rispetto alla retta *r*;
- Prendere un altro punto e tracciare una retta *s* passante per questo punto e parallela alla retta *r*;
- Costruire il simmetrico *A"B"C"* del triangolo *A'B'C'* rispetto alla retta *s*;
- Che relazione esiste tra il primo triangolo *ABC* e l'ultimo *A"B"C"*?
- Calcolare la distanza tra un generico punto del primo triangolo e l'ultimo trasformato, per esempio la distanza tra *B* e *B" BB"*);
- Calcolare la distanza tra le due rette *r* ed *s:* tracciando una retta passante per *R* e perpendicolare ad *r*, questa incontra la retta *s* in un punto *S*; la distanza tra *R* ed *S* coincide con la distanza tra le due rette *r* ed *s (d(r,s))*
- Che relazione esiste tra la distanza *BB"* e la distanza tra le due rette *r* ed *s?*

Osservazione: gli studenti hanno risposto immediatamente che la distanza *BB"* è il doppio della distanza tra le due rette *r* ed *s*.



Formalizzazione:

Si chiama *Traslazione* la composizione di due simmetrie assiali ad assi paralleli.

Proprietà:

Se $\boldsymbol{T}$ è una traslazione ottenuta componendo due simmetrie assiali ad assi paralleli r ed s, allora la distanza tra un generico punto P ed il suo trasformato tramite $\boldsymbol{T}$ è un valore costante pari al doppio della distanza tra le due rette r ed s.

In simboli:

Se $\boldsymbol{T}$ è una traslazione , $\boldsymbol{T} = \sigma_r \circ \sigma_s$, allora:

$$\forall P \in \mathscr{P}: d(P;\boldsymbol{T}(P)) = \text{costante} = 2\, d(r;s))$$

Ne segue che per assegnare una traslazione basta assegnare un segmento orientato che individua quindi una direzione, un verso e una distanza, ma poiché non ha importanza il punto di applicazione del segmento orientato, se ne deduce che una traslazione è individuata da un vettore $\vec{v}$[2].

In particolare, dato nel piano un vettore $\vec{v}$, la traslazione di vettore $\vec{v}$ è quella trasformazione geometrica che ad ogni punto P fa corrispondere il punto P' tale che $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$

Indicato il vettore $\vec{v}$ mediante le sue componenti cartesiane a e b, cioe con $\vec{v}(a, b)$, si trova che la traslazione $\boldsymbol{T}$ individuata dal vettore $\vec{v}$ ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Se $a = b = 0$ le equazioni precedenti si riducono a: $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$; pertanto si trova che: la traslazione definita dal vettore nullo è l'identità $\boldsymbol{I}$, in cui tutti i punti sono uniti.

Osservazione: Si dimostra che l'insieme delle traslazioni è un gruppo commutativo.

Proprietà:

- ✓ Una traslazione, diversa dall'identità $\boldsymbol{I}$ non ha alcun punto unito.
- ✓ Ogni retta viene trasformata in una retta parallela sulla quale si conserva il verso.

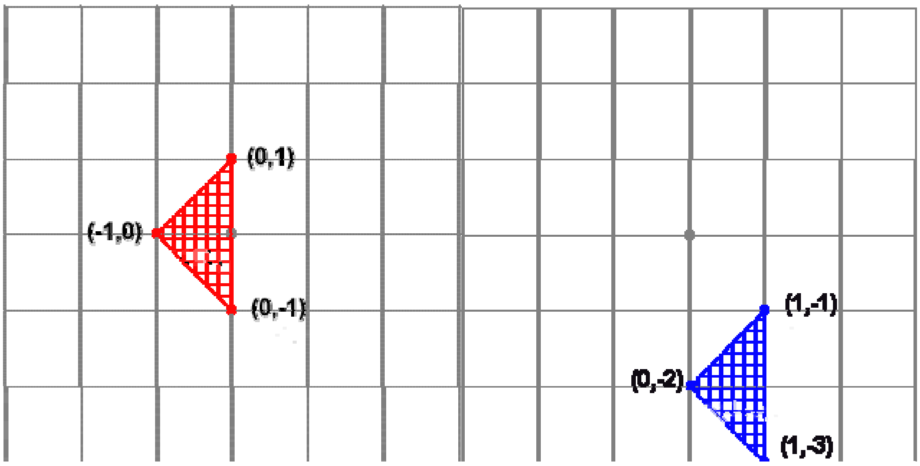
Esempio

Consideriamo la seguente traslazione $\boldsymbol{T}$:.

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

[2] Ricordiamo che un vettore $\vec{v}$ è una classe di equivalenza di segmenti orientati aventi stesso modulo, stessa direzione, stesso verso, cioè equipollenti.

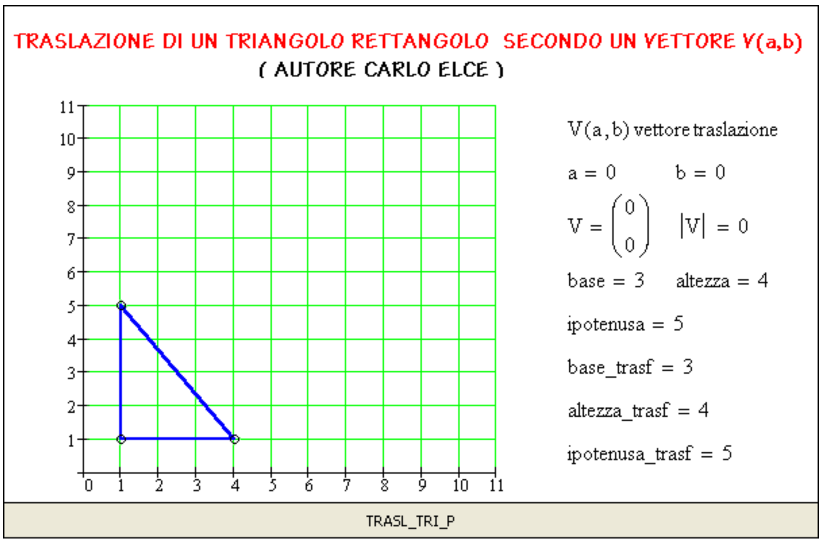
Per capire come agisce ***T***, vediamo come viene trasformato da ***T*** il triangolo isoscele ABC (nelle figura rappresentato in rosso) di vertici A(0,1), B(-1,0), C(0,-1). Il punto A ha come immagine il punto A'(1,2). Il punto B ha come immagine il punto B'(0,-2). Il punto C ha come immagine il punto C'(1,-3).



Notiamo che la figura trasformata (nel disegno il triangolo in blu) è un triangolo congruente a quello di partenza.

Laboratorio d'Informatica:

Allo scopo di mostrare agli studenti come varia un triangolo trasformato tramite una traslazione ho mostrato il seguente videoclip in cui sono esplicitate le componenti del vettore $\vec{v}$ al variare delle quali varia il triangolo trasformato. Inoltre viene messo in evidenza che le dimensioni del triangolo restano invariate al variare del vettore $\vec{v}$:



🕮 LE ROTAZIONI

Problema stimolo in Laboratorio d'Informatica:

Cosa succede componendo due simmetrie assiali ad assi non paralleli?

- Prendere tre punti A, B e C;
- Tracciare il triangolo ABC;
- Prendere un punto generico e tracciare una retta *r* passante per esso;
- Costruire il simmetrico A′B′C′ del triangolo ABC rispetto alla retta *r*;
- Prendere un altro punto e tracciare una retta *s* passante per questo punto ed incidente la retta *r*;
- Costruire il simmetrico A″B″C″ del triangolo A′B′C′ rispetto alla retta *s*;

? Domanda stimolo: Che relazione esiste tra il primo triangolo ABC e l'ultimo A″B″C″?

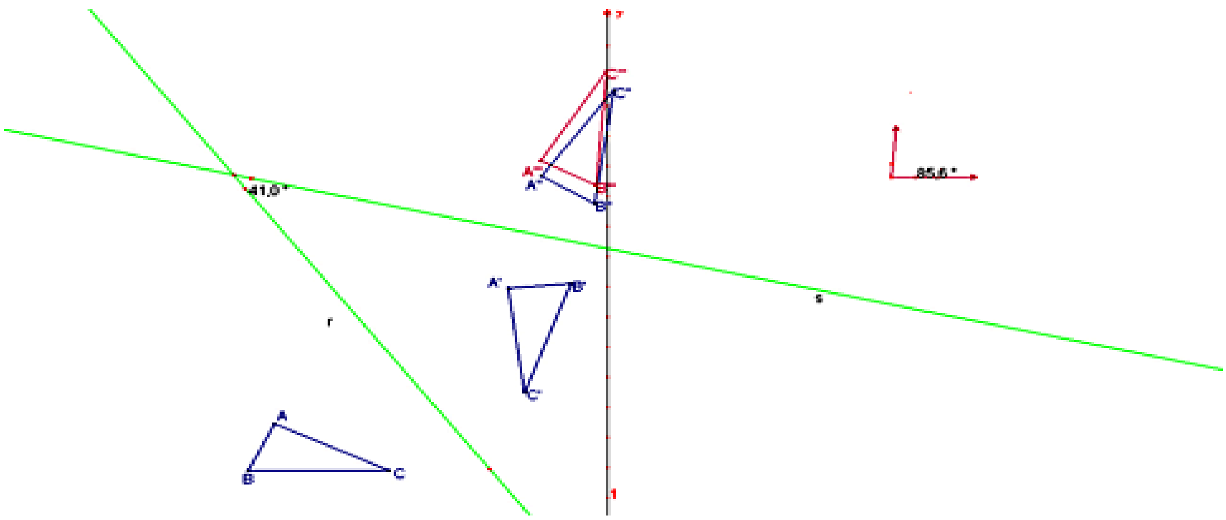
- Tracciare un angolo e visualizzarne la misura;
- Fare la rotazione del triangolo ABC rispetto all'angolo appena tracciato: si ottiene così un nuovo triangolo A‴B‴C‴;

? Domanda stimolo: quando il triangolo ABC tenderà a coincidere col triangolo A‴B‴C‴?

- Misurare l'angolo formato dalle due rette *r* ed *s* visualizzando tale misura

Variando l'angolo di rotazione ho portato gli studenti a capire che i due triangoli tendono a coincidere quando l'angolo di rotazione è il doppio dell'angolo formato dalle due rette *r* ed *s*.

? Domanda stimolo: Ci sono punti uniti?



Formalizzazione:

Si chiama ***rotazione*** la composizione di due simmetrie assiali con assi non paralleli.

Il punto d'intersezione dei due assi si chiama *centro di rotazione* ed è l'unico punto unito.

Troviamo dapprima le equazioni di una rotazione di ampiezza α e avente per centro l'origine O di un riferimento cartesiano ortogonale *Oxy*.

Sia $P'(x', y')$ il corrispondente di $P(x, y)$; ricordando che: $OP = OP'$ e che $x = OP\cos\beta$ e $y = OP\text{sen}\beta$ si ha che:

$x' = OP'\cos(\alpha+\beta) = OP\,(\cos\alpha\cos\beta-\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta) = x\cos\alpha-y\,\text{sen}\alpha$

$y' = OP'\text{sen}(\alpha+\beta) = OP\,(\text{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\beta) = x\,\text{sen}\alpha+y\cos\alpha$

quindi le equazioni della rotazione R di ampiezza α intorno ad O sono:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y sen\alpha \\ y' = x sen\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Generalizzando si trovano le equazioni di una rotazione di ampiezza α intorno ad un punto $C(a,b)$:

$$\begin{cases} x' = (x-a)\cos\alpha - (y-b) sen\alpha + a \\ y' = (x-a) sen\alpha + (y-b)\cos\alpha + b \end{cases}$$

Rotazioni particolari

Problema stimolo in Laboratorio d'Informatica:

Con riferimento alla costruzione precedente fatta nel caso generale ho fatto variare l'angolo di rotazione in casi particolari e così ho portato ancora una volta gli studenti a comprendere le relazioni esistenti tra il triangolo di partenza e il trasformato ipotizzando le possibili equazioni che rappresentano tale trasformazione.

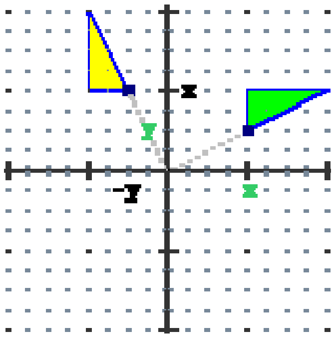
? Domande stimolo:

- *Cosa succede se l'angolo di rotazione è di 90°?*
- *Cosa succede se l'angolo di rotazione è di -90°?*

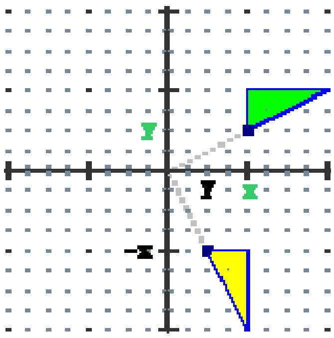
Formalizzazione:

Dalle equazioni viste nel caso generale segue che:

- Le equazioni della rotazione intorno ad O e di ampiezza $\frac{\pi}{2}$ sono: $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$



- Le equazioni della rotazione intorno ad O e di ampiezza $-\frac{\pi}{2}$ sono: $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$



<u>*Proprietà*</u>:

I. In una rotazione è invariante la distanza di un punto generico *P* dal centro della rotazione.

II. In una rotazione l'angolo di rotazione è uguale al doppio dell'angolo formato dai due assi delle simmetrie assiali che compongono la rotazione.

III. L'insieme delle rotazioni aventi lo stesso centro è un gruppo commutativo.

IV. L'insieme delle rotazioni di centro diverso non è necessariamente una rotazione e quindi l'insieme di tutte le rotazioni non è un gruppo.

V. Se l'angolo di rotazione è di 180° (o un multiplo intero di 180°) tutte le rette passanti per O sono fisse, mentre se l'angolo di rotazione è diverso da 180°(o un multiplo intero di 180°) non ci sono rette fisse.

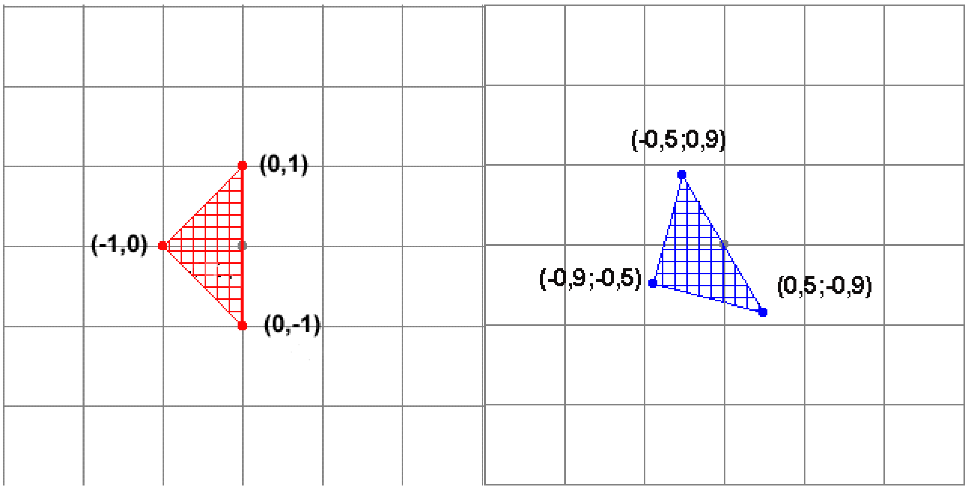
VI. Comunque prendiamo un punto *P*, il centro di rotazione *O* appartiene all'asse del segmento individuato da *P* e dal suo trasformato *P'*.

Esempio

Consideriamo la seguente rotazione ***R*** secondo un angolo di 30 gradi ovvero di $\frac{\pi}{6}$:

$$\begin{cases} x' = x\cos\frac{\pi}{6} - ysen\frac{\pi}{6} \\ y' = -xsen\frac{\pi}{6} + y\cos\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

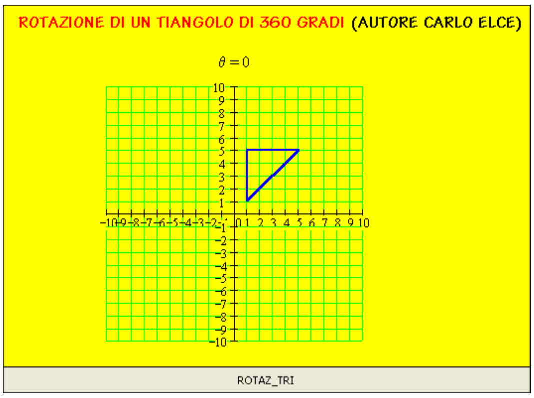
Per capire come agisce ***R***, vediamo come viene trasformato da ***R*** il triangolo isoscele ABC (nelle figura rappresentato in rosso) di vertici A(0,1), B(-1,0), C(0,-1). Il punto A ha come immagine il punto A'(-0.5,0.9). Il punto B ha come immagine il punto B'(-0.9,-0.5). Il punto C ha come immagine il punto C'(0.5,-0.9).

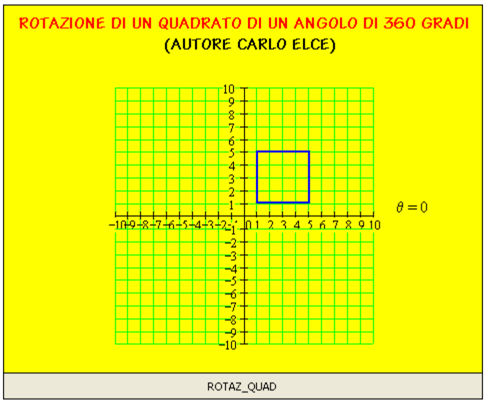


Notiamo che la figura trasformata (nel disegno il triangolo in blu) è un triangolo congruente a quello di partenza.

💻 *Problema stimolo in Laboratorio d'Informatica:*

Allo scopo di mostrare agli studenti come variano un triangolo e un quadrato trasformati tramite una rotazione ho mostrato i seguenti videoclip in cui è evidenziato come variano il triangolo e il quadrato al variare dell'angolo di rotazione:





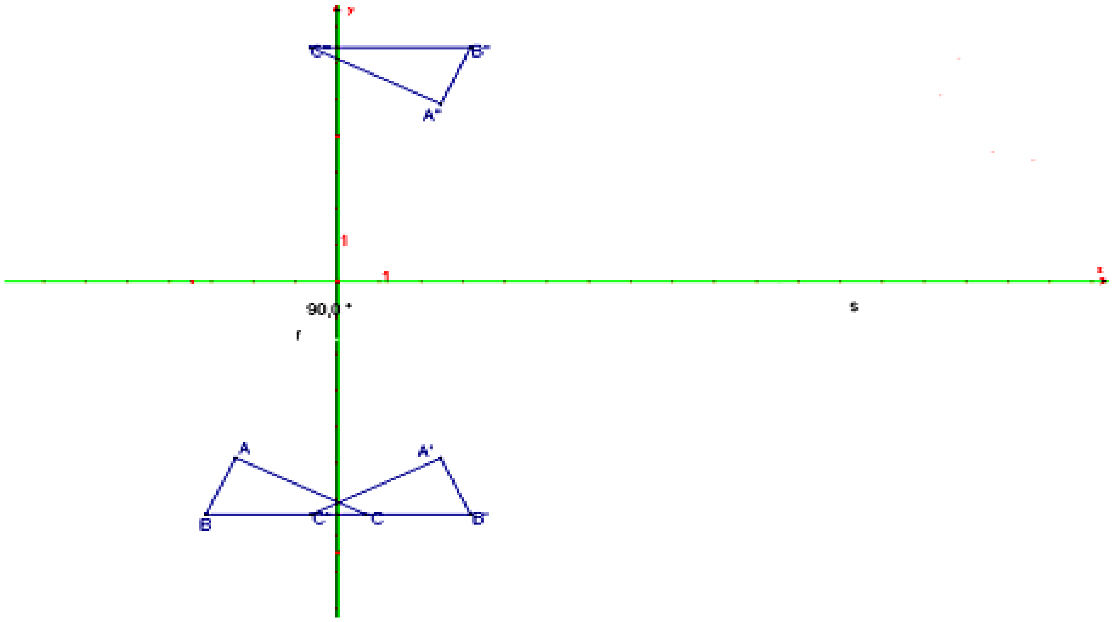
📖 LE SIMMETRIE CENTRALI

💻 *Problema stimolo in Laboratorio d'Informatica:*

? Domande stimolo:

- *Cosa succede se gli assi delle due simmetrie componenti sono perpendicolari?*

Con riferimento alla costruzione fatta nel caso generale ho fatto variare le rette in modo tale da farle diventare perpendicolari e ho fatto osservare la relazione tra il triangolo di partenza e quello trasformato portando gli studenti a costruirsi le equazioni della nuova trasformazione.



✍ *Formalizzazione:*

Si chiama ***simmetria centrale*** la composizione di due simmetrie assiali ad assi perpendicolari.

Siano r ed s due rette perpendicolari e $C(a, b)$ il loro punto d'intersezione, senza perdere di generalità supponiamo r ed s parallele agli assi cartesiani. Si hanno così le seguenti simmetrie:

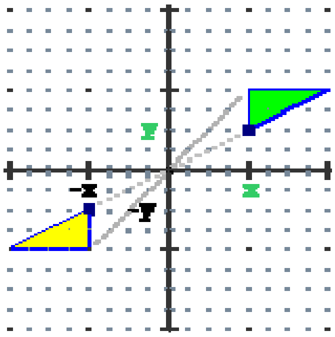
$$S_r: \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$$

$$S_s: \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = 2b - y' \end{cases}$$

Quindi la simmetria centrale ottenuta componendo le precedenti simmetrie assiali ha equazioni:

$$\begin{cases} x'' = 2a - x \\ y'' = 2b - y \end{cases}$$

Una simmetria centrale è quindi una rotazione di angolo π. In particolare possiamo considerare la simmetria centrale di centro l'origine degli assi che coincide con la rotazione di π.



Proprietà:

- ✓ È involutoria
- ✓ Ha C come unico punto unito (C si chiama anche *polo*)
- ✓ Tutte le rette per C sono unite
- ✓ La composizione di due simmetrie centrali, rispetto a poli diversi, è una traslazione.

Una figura si dice simmetrica rispetto al punto O, se è trasformata in sé dalla simmetria centrale di polo O.

Nella tabella seguente si evidenziano le simmetrie assiali e centrali presenti in alcune figure geometriche elementari:

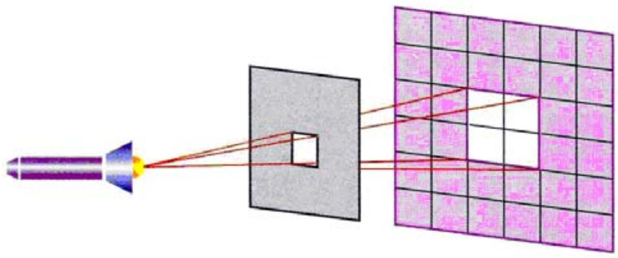
Figura	***Simmetrie assiali***	***Simmetria centrale***
Triangolo equilatero	3	No
Quadrato	4	Si
Cerchio	Infinite	Si
Rettangolo	2	Si
Ellisse	2	Si
Parallelogramma	No	Si
Trapezio isoscele	1	No
Pentagono regolare	5	No
Esagono regolare	6	Si
Ottagono regolare	8	Si
Triangolo isoscele	1	No
Rombo	2	Si

CONTENUTO D: *Le omotetie*

🕮 CONCETTI INTRODUTTIVI E DEFINIZIONE

☞ *Approccio intuitivo*

Ho ricordato il significato del rapporto dì «scala» (rapporto di similitudine) segnato sulle carte geografiche o sulle piantine di una città, che indica di quanto la rappresentazione del territorio è stata ridotta rispetto al territorio reale. Ma un rapporto di scala può indicare anche un ingrandimento. Infatti, con un proiettore, con un microscopio, si producono, ingrandimenti. E evidente che ingrandimenti o riduzioni sono trasformazioni che permettono di rappresentare oggetti o figure senza modificarne la forma. Per renderci conto di questo fatto, possiamo costruire con del cartoncino figure geometriche e, successivamente, usando una lampada, provare a proiettare le ombre su uno schermo come nella seguente figura:

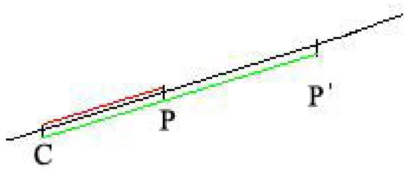


Si osserva che, in base all'ombra proiettata sullo schermo, la figura geometrica non cambia forma ma risulta ingrandita se il cartoncino con cui è stata costruita e lo schermo si trovano su piani paralleli, in caso contrario l'ombra proiettata sullo schermo determina una figura deformata. Ma l'ingrandimento (o la riduzione) di una figura F che si identifica con la figura F' deve essere precisato fissando il rapporto di scala.

✍ *Formalizzazione*

Fissato nel piano un punto C ed un numero reale k, si chiama *omotetia* di centro C e rapporto k, la trasformazione del piano in sé che ad ogni punto P associa il punto P' tale che:

$$\overrightarrow{CP'} = k\overrightarrow{CP}.$$



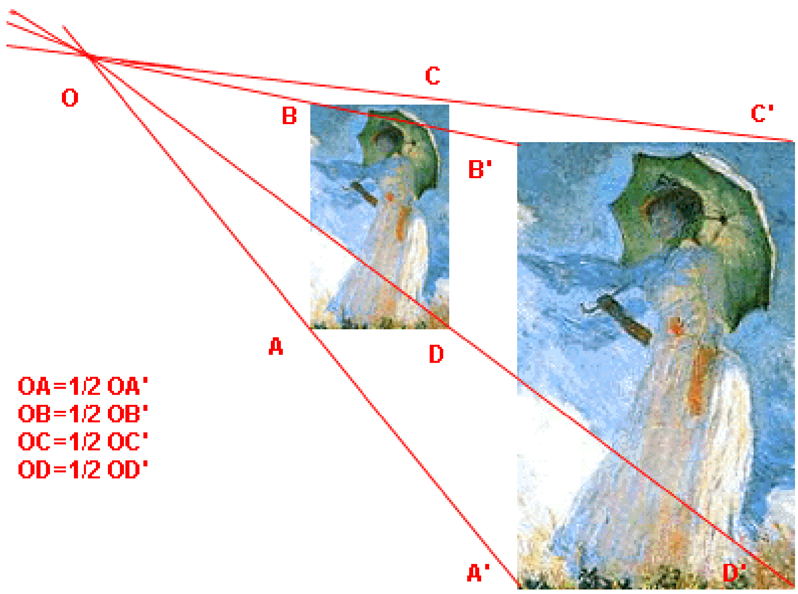
Se $|k|>1$, l'omotetia "ingrandisce le figure; se $|k|<1$ l'omotetia "rimpicciolisce" le figure. Fissato nel piano un riferimento cartesiano ortogonale O*xy*, se il centro C dell'omotetia ha coordinate C(a, b) e se P(x, y) e P′(x', y') sono i punti corrispondenti di una omotetia di rapporto k, dalla definizione $\overrightarrow{CP'} = k\overrightarrow{CP}$ si ha:

$$\begin{cases} x'-a = k(x-a) \\ y'-b = k(y-b) \end{cases}$$

quindi, le equazioni dell'omotetia di centro C(a, b) e rapporto k sono:

$$\begin{cases} x' = kx + a(1-k) \\ y' = ky + b(1-k) \end{cases}$$

Possiamo applicare la stessa trasformazione a figure più complesse. Nell'immagine seguente consideriamo un'omotetia di costante k = 1/2. Notiamo che otteniamo una duplicazione della figura di partenza.



OMOTETIE PARTICOLARI

I. Se $k = 0$ le equazioni dell'omotetia diventano:

$$\begin{cases} x' = a \\ y' = b \end{cases}$$

e, quindi l'omotetia ad ogni punto del piano associa il punto (a, b).

II. Se il centro dell'omotetia è l'origine O(0,0), le equazioni dell'omotetia diventano:

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

III. Se $k \neq 0$, l'omotetia è una biiezione del piano e la sua inversa è:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'}{k} + a(1 - \dfrac{1}{k}) \\ y = \dfrac{y'}{k} + b(1 - \dfrac{1}{k}) \end{cases}$$

ossia, l'omotetia di cento C(a, b) e rapporto $1/k$.

IV. Se k =-1, l'omotetia è la simmetria centrale di centro C:

$$\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b \end{cases}$$

V. Se k = 1, l'omotetia è l'identità.

VI. Se nelle equazioni di una omotetia si pone a(1-k)=m e b(1-k)= n, le equazioni assumono la forma:

$$\begin{cases} x' = kx + m \\ y' = ky + n \end{cases}$$

Che per k = 1 rappresentano le equazioni di una traslazione; per $k \neq 1$ il centro dell'omotetia è $C\left(\dfrac{m}{1-k}, \dfrac{n}{1-k}\right)$.

Proprietà delle omotetie

1. In una omotetia l'unico punto unito è il centro e le uniche rette unite sono le rette per il centro.
2. Due figure che si corrispondono tramite una omotetia vengono chiamate *omotetiche*.
3. In una omotetia di rapporto k, la corrispondente r' di una retta r è una retta parallela ad r.
4. In una omotetia di rapporto k, il trasformato di un segmento A′B′ parallelo al segmento AB e di misura $|k|$ AB.
5. Ne segue che in una omotetia di rapporto k è costante il rapporto delle misure di due segmenti corrispondenti: $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = |k|$.
6. Il rapporto delle aree di due poligoni corrispondenti in una omotetia di rapporto k è k^2.
7. La corrispondente tramite una omotetia di rapporto k di una circonferenza di raggio r è una circonferenza di raggio $|k|\, r$.
8. Una omotetia di rapporto k conserva l'ampiezza degli angoli. Ne segue che trasforma, ad esempio: rettangoli in rettangoli, rombi in rombi, quadrati in quadrati, triangoli isosceli in triangoli isosceli, trapezi in trapezi.

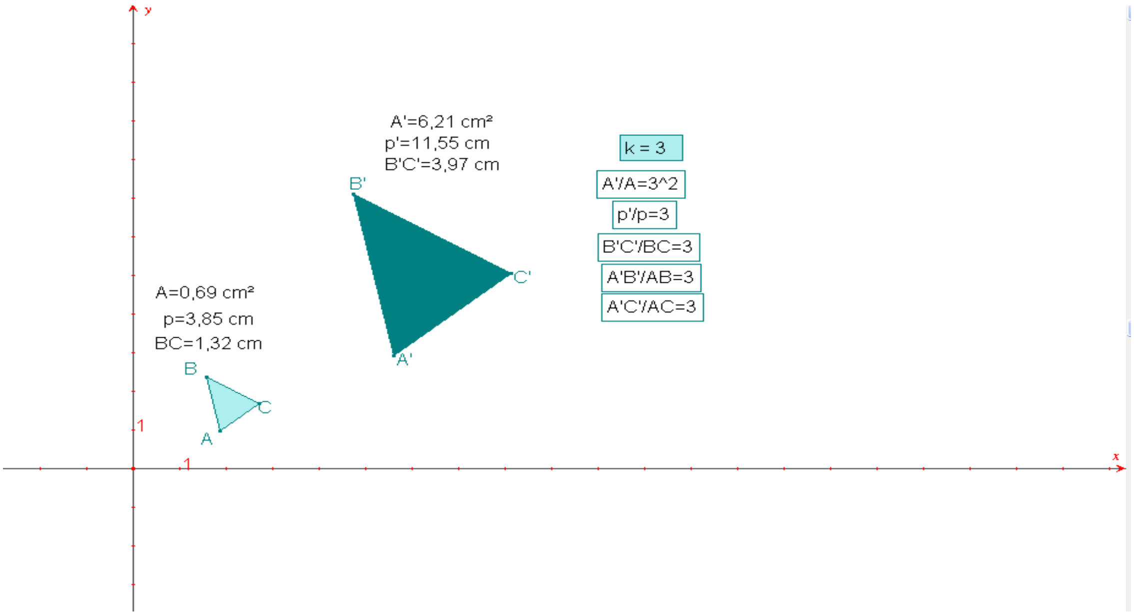
9. La composizione di due omotetie, anche di centro diverso, è ancora una omotetia, purchè i rapporti di omotetia non siano reciproci (in tal caso è una traslazione).
10. L'insieme delle omotetie di centro O e rapporto $k \neq 0$ è un gruppo.

Laboratorio d'Informatica

- Prendere tre punti A, B e C;
- Tracciare il triangolo ABC;
- Considerare un valore generico da assegnare al rapporto di omotetia k; nel nostro caso è stato considerato $k = 3$.
- Costruire il triangolo A′B′C′ omotetico di rapporto k rispetto al centro O,origine del sistema di riferimento, del triangolo ABC;

? Domanda stimolo: Che relazione esiste tra il ABC e il triangolo A′B′C′?

- Misurare le lunghezze dei lati del triangolo ABC, l'area e il perimetro.
- Misurare le lunghezze dei lati del triangolo A′B′C′, l'area e il perimetro.
- Considerare i rapporti tra le lunghezze dei lati del triangolo ABC e quelle del triangolo trasformato A′B′C′ e verificare che tali rapporti siano uguali al rapporto di omotetia k =3.
- Considerare il rapporto tra il perimetro del triangolo ABC e quello del triangolo trasformato A′B′C′ e verificare che tale rapporto sia uguali al rapporto di omotetia k.
- Considerare il rapporti tra la misura dell'area del triangolo ABC e quella del triangolo trasformato A′B′C′ e verificare che tale rapporto siano uguali al rapporto di omotetia k elevato al quadrato.



? Domanda stimolo: Cosa succede cambiando il rapporto di omotetia k?

Ho fatto ripetere tutto il procedimento visto sopra considerando: $k = -2$, $k = -\frac{1}{2}$, $k = -\frac{1}{2}$.

Esempio.

Consideriamo ora la seguente omotetia **T** di centro l'origine degli assi: $\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x \\ y' = -\dfrac{1}{2}y \end{cases}$

Osserviamo come trasforma la circonferenza di centro (1,0) e raggio 1 (fig. 1). La figura trasformata è una circonferenza di centro (-1/2, 0) e raggio ½ (fig.2). Si tratta di un'omotetia inversa.

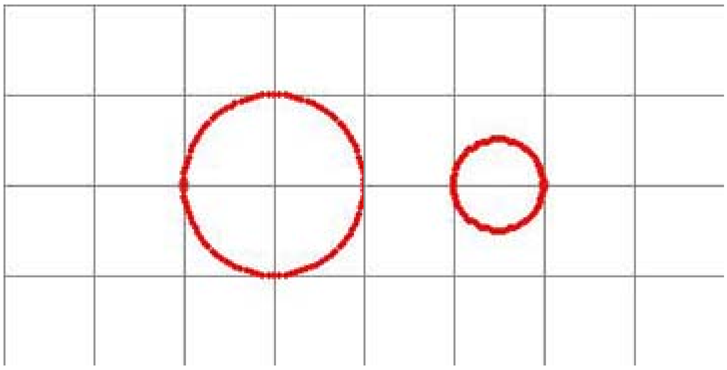


Figura 1 *Figura 2*

LE SIMILITUDINI

Sia $\boldsymbol{T}$ una trasformazione e siano rispettivamente A' e B' le immagini tramite $\boldsymbol{T}$ di due punti qualunque A e B del piano; se, comunque si scelgono A e B, si ha che il rapporto $\dfrac{A'B'}{AB}$ è costante, allora si dice che $\boldsymbol{T}$ è una ***similitudine***.

In particolare, risulta che:

Una ***similitudine*** è una trasformazione del piano tale che esiste un numero $k>0$ che verifica la condizione seguente: $\forall A, B \in \wp$, detti A′B′ i trasformati di A e B, risulta: A′B′ = k AB.

Da questa definizione, ricordando la proprietà (5) relativa alle omotetie, segue che ogni omotetia di rapporto $k>0$ è una similitudine.

Il numero k si chiama *rapporto di similitudine*.

Le equazioni di una similitudine sono:

$$\begin{cases} x' = k(a_1x + b_1y) + c_1 \\ y' = k(a_2x + b_2y) + c_2 \end{cases}$$

con $\quad A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ matrice ortogonale[3]

Proprietà

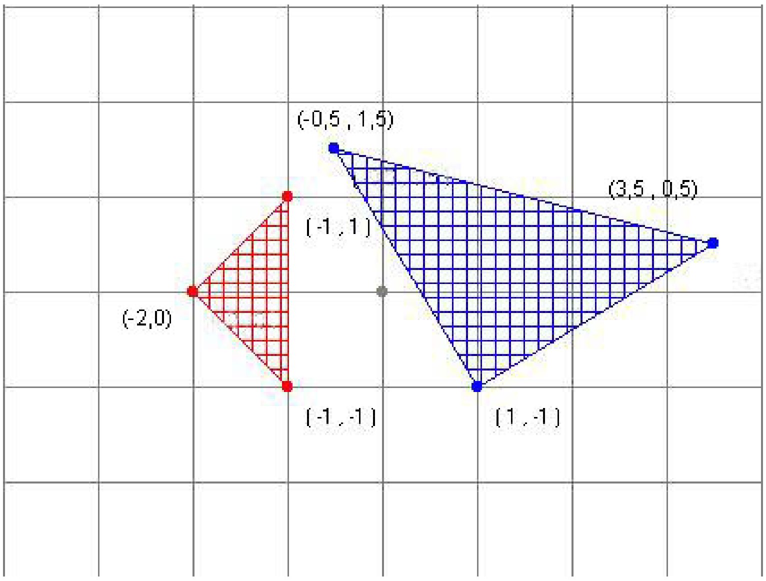
- ✓ Se il rapporto di similitudine k è uguale a 1 la similitudine si riduce ad un'isometria, quindi le isometrie possono essere considerate delle particolari similitudini.
- ✓ La composizione di due similitudini è una similitudine di rapporto uguale al prodotto dei rapporti delle due similitudini.
- ✓ Ogni similitudine è la composizione di una omotetia di rapporto $k>0$ e di una isometria[4].

Esempio

Consideriamo la seguente affinità ***T*** di equazioni: $\begin{cases} x' = 0{,}5x - 2y + 2 \\ y' = 2x + 0{,}5y + 3 \end{cases}$

Si tratta di una similitudine con k= 2,061552812809...

Per capire come agisce ***T***, vediamo come viene trasformato da ***T*** il triangolo isoscele ABC (nelle figura rappresentato in rosso) di vertici A(-1 ; 1), B(-2 ; 0), C(-1 ; -1). Il punto A ha come immagine il punto A'(-0,5 ; 1,5). Il punto B ha come immagine il punto B'(1 ; -1). Il punto C ha come immagine il punto C'(3,5 ; 0,5).



Notiamo che la figura trasformata (nel disegno il triangolo in blu) è un triangolo isoscele simile a quello di partenza.

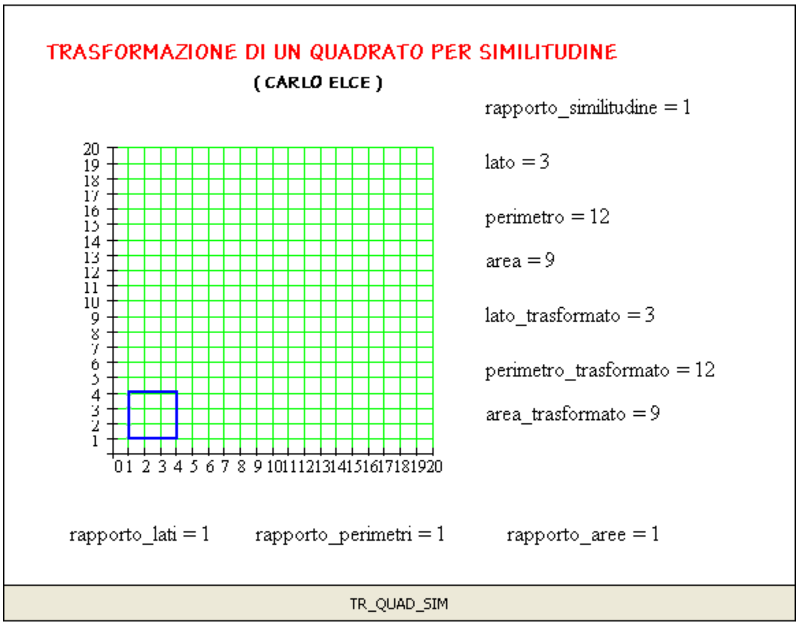
[3] Una matrice si dice ortogonale se $A \cdot A^T = I$, cioè $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 = 1$ e $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$, e quindi $\det A = \pm 1$

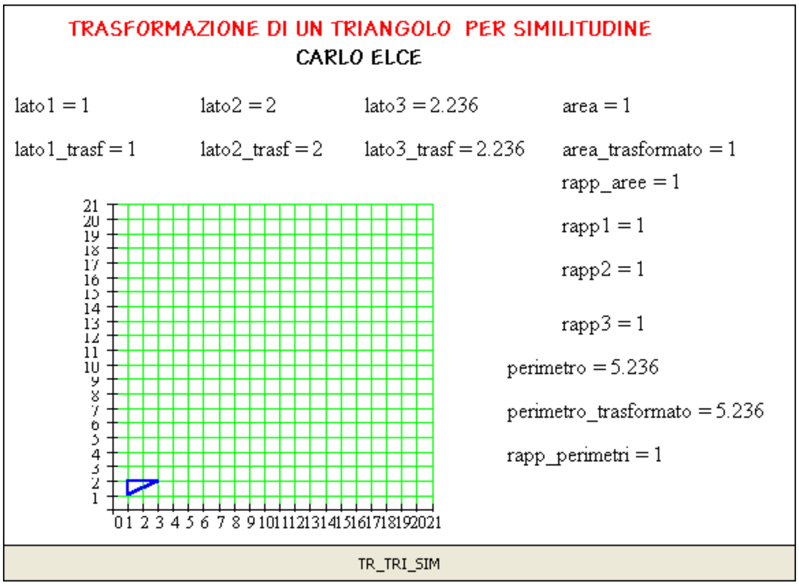
[4] Ciò segue dalla proprietà precedente essendo le isometrie delle particolari similitudini.

Problema stimolo in Laboratorio d'Informatica:

Allo scopo di mostrare agli studenti come variano un quadrato e un triangolo trasformati per similitudine ho mostrato loro i seguenti videoclip in cui è evidenziato come variano le dimensioni delle due figure al variare del rapporto di similitudine.

CJ





🕮 NOTA STORICA: LE TRASFORMAZIONI E LA MUSICA

Molte delle trasformazioni geometriche presentate in questo capitolo sono note fin dall'antichità: spesso nelle arti figurative si possono individuare figure unite rispetto a una o più isometrie. meno note sono invece le applicazioni alla musica. Fu soprattutto il compositore *Johann Sebastian Bach* (1685-1750) che in alcune delle sue opere, tra cui segnaliamo *L'arte della Fuga*, applicò alcune tecniche compositive che possono essere interpretate mediante le trasformazioni geometriche. Vediamo in *figura 58* alcune battute dei brani *Contrapunctus 12* (rictus et inversus): come si nota, le partiture dei due brani sono tra loro simmetriche rispetto ad un'asse orizzontale.

Nel *Contrapunctus 5* (*figura 59*) Bach applica una glissosimmetria al primo rigo della partitura per ottenere il terzo rigo, che rispetto a quello appare capovolto e traslato

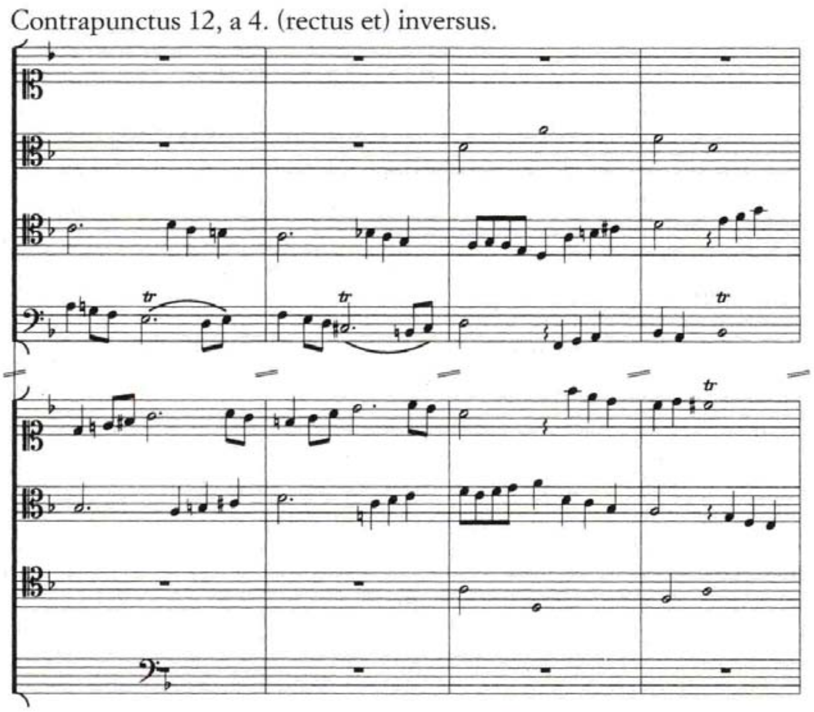


Figura 58

Figura 59

🕮 UN ESEMPIO APPLICATIVO: IL BILIARDO

Descrizione dell'attività

Il problema consiste nell'individuare la direzione di lancio della biglia, che si trova inizialmente in un punto *P* del biliardo, in modo che, dopo aver battuto successivamente contro le quattro sponde consecutive, ripassi per il punto *P*.

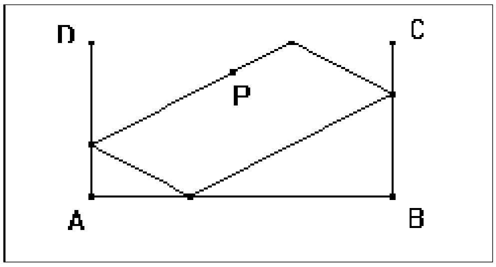


Figura 1

Conviene proporre dapprima dei problemi più semplici al fine di abituare lo studente all'utilizzo delle trasformazioni geometriche come metodo di risoluzione di problemi. Lo studente potrà in tal modo apprezzare la potenza di un metodo diverso da quelli consueti, più idoneo in taluni casi a fornire soluzioni rapide ed eleganti.

Prima fase

Si propone agli studenti il problema noto come *Problema di Erone*, formulato con riferimento ad un contesto del mondo reale: una persona che si trova in una posizione *A* deve andare a riempire dei secchi d'acqua, attingendo da un ruscello posto ad una certa distanza, e portarli ad una fattoria che si trova in un punto *B* dalla stessa parte di *A* rispetto al ruscello, facendo il cammino più breve. Si chiede di aiutare la persona ad individuarlo. Lo studente intuitivamente comprende che il cammino deve essere rettilineo dal punto A al ruscello; poi, ancora rettilineo, dal fiume alla fattoria. Rappresentando il fiume con una retta *r* si può visualizzare la situazione con la seguente figura:

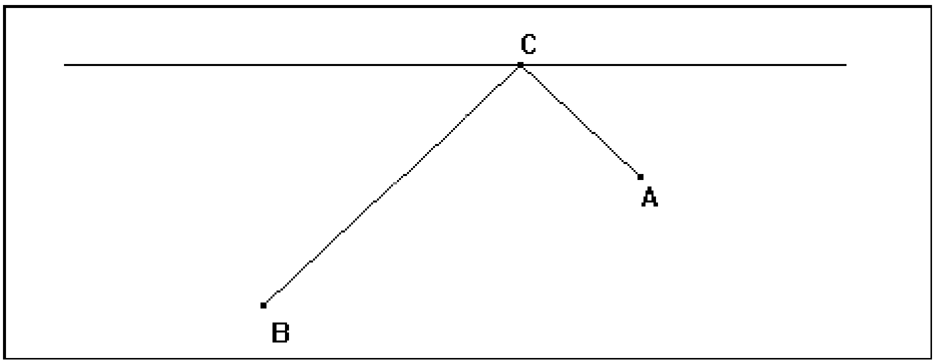


Figura 2

Il problema si presenta allora come un problema di minimo: dati due punti A e B, posti dalla stessa parte di una retta r, determinare su essa un punto C tale che $AC + CB$ sia minimo. La risoluzione analitica è, dal punto di vista operativo, non semplice e utilizza strumenti matematici non ancora noti allo studente.

❓**Domanda stimolo**: *Se la fattoria stesse dall'altra parte del ruscello in un punto B' e non ci fossero problemi di attraversamento del ruscello, quale sarebbe il cammino più breve?*

La risposta è ovvia: "Il segmento *AB'* ".

❓**Domanda stimolo**: *Dove deve stare il punto B' ?*

A questo punto gli studenti intuiscono che *B'* deve essere il simmetrico di B rispetto alla retta r e, facendo alcune considerazioni sulle proprietà di tale trasformazione (punti e segmenti corrispondenti), pervengono alla risposta corretta: il punto C è il punto d'intersezione del segmento *AB'* con la retta r. E' chiaro che il procedimento scelto è rapido ed elegante, specialmente se confrontato con un eventuale procedimento analitico.

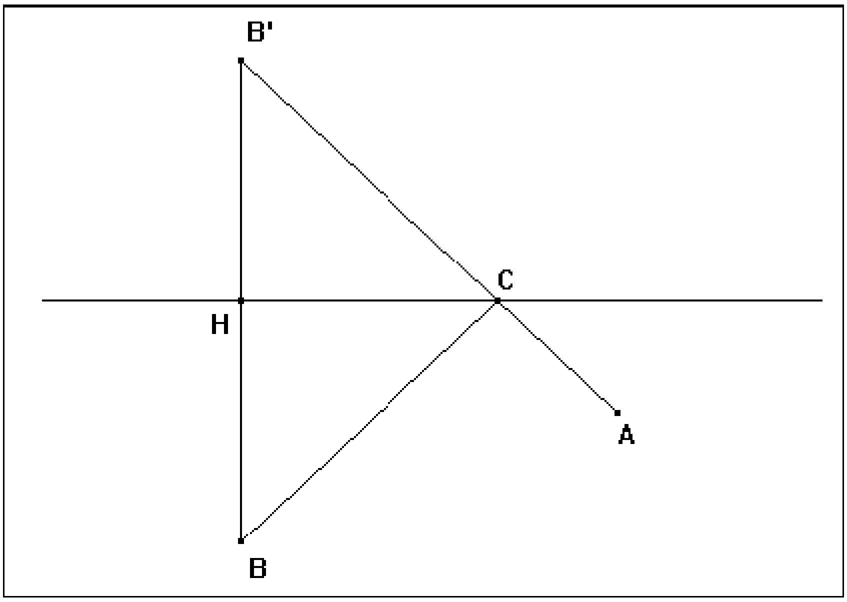


Figura 3

Seconda fase

Problema stimolo: Siano date due rette a e b perpendicolari tra loro in un punto P ed una retta r passante per P. Che relazione c'è tra le rette che si ottengono da r come corrispondenti nelle simmetrie assiali rispetto agli assi a e b?

La risposta degli studenti è immediata: le rette coincidono. L'esercizio è però fondamentale per affrontare il problema del biliardo.

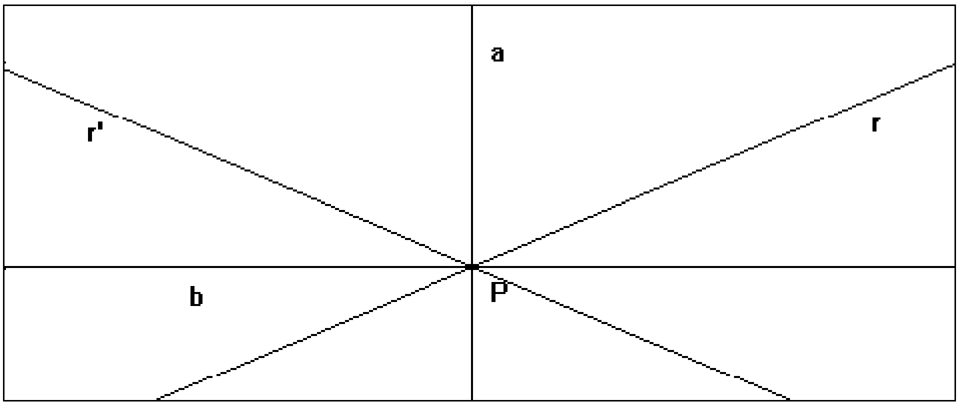


Figura 4

Terza fase

Le considerazioni fatte per la soluzione analitica nel problema del ruscello valgono, a maggior ragione, per il problema del biliardo. Gli studenti hanno raggiunto la convinzione che il metodo analitico può condurre alla soluzione di un sistema lineare la cui soluzione appare subito piuttosto complessa. Si invitano gli studenti a concentrare l'attenzione sulla legge di riflessione nell'urto(elastico) di una biglia che, muovendosi sul piano del biliardo, batta contro una delle sponde del biliardo stesso. Può essere conveniente, a questo punto, utilizzare un software di geometria simulando il percorso come nella *figura 5*, dove si è supposto che la prima sponda contro cui la biglia batte è il lato *AD*. Gli studenti possono variare la direzione di lancio in modo che la retta ottenuta dopo le quattro riflessioni passi per *P*.

La congettura che gli studenti formulano è la seguente:*La direzione secondo cui va lanciata una biglia posta in un punto P del biliardo, affinché, dopo aver battuto contro le quattro sponde consecutive, ripassi per il medesimo punto P, è quella della diagonale AC (o della diagonale BD) del rettangolo che rappresenta il biliardo.*

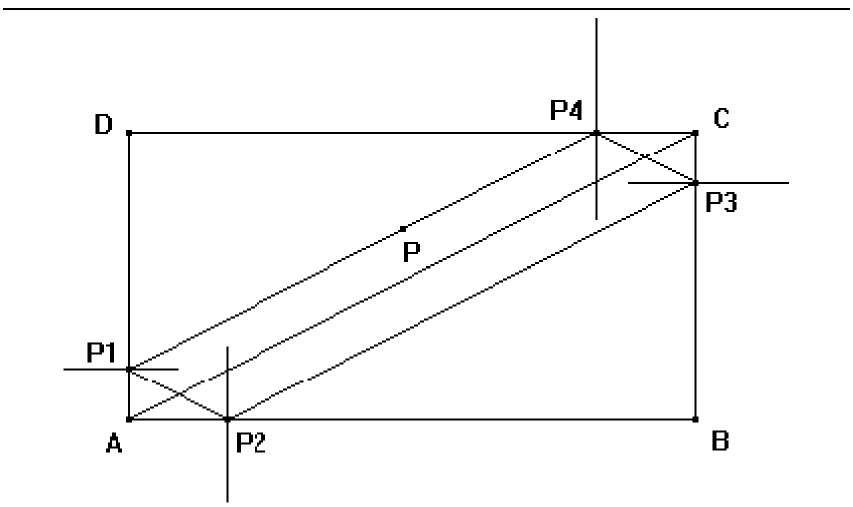


Figura 5

Occorre ora validare o confutare tale congettura. Ricordando l'esercizio della seconda fase, gli studenti osservano che la retta riflessa della retta PP_1(cioè P_1P_2) si ottiene non solo dalla simmetria rispetto alla perpendicolare alla sponda ma anche dalla simmetria rispetto alla sponda interessata (ovvero *DA*). La costruzione si ripete quattro volte con riflessioni assiali rispetto alle quattro sponde del biliardo ottenendo le rette P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 ed una quarta retta che si vuole passi per *P*. La composizione delle prime due simmetrie assiali (in quanto gli assi sono ortogonali) dà luogo alla simmetria centrale di centro *A* (intersezione dei due assi di simmetria) e la composizione delle altre due dà la simmetria centrale di centro *C*. Quindi la composizione delle quattro simmetrie assiali equivale alla composizione delle due simmetrie centrali di centri *A* e *C* che, a loro volta, danno luogo ad una traslazione di un vettore avente come direzione la retta congiungente i due centri di simmetria, cioè la diagonale *AC* del rettangolo che rappresenta il biliardo. Le rette, corrispondenti in una traslazione, che passano per uno stesso punto (P) sono quelle aventi la direzione del vettore-traslazione, per cui la direzione di lancio della biglia, affinché dopo le quattro riflessioni ripassi per la posizione iniziale P, è quella della diagonale *AC* del rettangolo che rappresenta il biliardo (lo stesso risultato si ha se si lancia la biglia nella direzione dell'altra diagonale).

Bibliografia

M. Re Fraschini – Grazzi, *Trasformazioni, Numeri e Logica*, ed. Atlas

N. Dodero – P. Barboncini – R. Manfredi, *Lineamenti di Geometria Analitica e complementi di Algebra*, ed. Ghisetti e Corvi Editori

P. M. Gianoglio – P. Arri – G. Ravizza; *Matematica Attiva: Geometria*, ed. Il Capitello

Valerio Valeri, *Corso di disegno per la scuola secondaria superiore*, ed. La Nuova Italia

Maraschini-Palma, *FORMAT SPE 1*, Ed. Paravia

Appunti e dispense fornite dai Supervisori

Appunti e dispense del corso di Laboratorio di didattica della Matematica, prof. Rizzo

Appunti e dispense del corso di Didattica della Matematica II, prof. Rizzo

Appunti e dispense del corso di Didattica della Matematica I, prof. Pascali

Dispense del corso di Docimologia, prof. Ancona

Appunti del corso di Didattica generale, prof. Greco

Appunti del corso di Pedagogia generale, prof. Petrelli

Sitografia:

http://www. matematicamente.it

http://www. ppp.unipv.it/Silsis

http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html