

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI  
“ FEDERICO II ”



FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI

(CLASSE DELLE LAUREE IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE N.9)  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRONICA  
E DELLE TELECOMUNICAZIONI

**TESI DI LAUREA**

DIFFUSIONE DA SUPERFICI FRATTALI:  
IL METODO DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO  
ESTESE

RELATORE

Ch.mo Prof.  
Daniele Riccio

CANDIDATO

Nicola De Rosa  
Matr. 540/ 651

CORRELATORI

Prof. Antonio Iodice  
Ing. Giuseppe Ruello

ANNO ACCADEMICO 2003/2004

# *Indice*

<i>Introduzione</i> .....	5
---------------------------	---

## *Capitolo 1: Geometria Frattale*

1.1 Introduzione.....	8
1.2 Dimensione frattale.....	11
1.3 Modelli di superfici frattali.....	12
1.4 Modello fBm (Fractional Brownian Motion).....	12
1.5 Modello WM (Weierstrass-Mandelbrot).....	15
1.6 Legame tra fBm e WM.....	18

## *Capitolo 2: Un nuovo modello elettromagnetico: EBCM applicato a superfici frattali 1-D*

2.1 Introduzione.....	19
2.2 Modello del profilo superficiale.....	20
2.3 EBCM (Extended Boundary Conditions Method).....	20
-2.3.1 Equazioni integrali.....	20
2.4 Espansione del campo sulla superficie.....	23
-2.4.1 Introduzione alla valutazione del campo sulla superficie.....	25
-2.4.2 Calcolo di $I_D$ .....	26
-2.4.3 Calcolo di $I_N$ .....	29
2.5 Valutazione analitica del campo sulla superficie e del campo diffuso e trasmesso.....	32
2.6 Criterio di troncamento.....	35
2.7 Valutazione dell'efficienza del metodo.....	37

-2.7.1 Esempi dimostrativi dell'efficienza del metodo.....	38
2.8 Esempi numerici.....	43
2.9 Analisi della convergenza.....	50

**Capitolo 3: Il modello EBCM applicato a superfici frattali 2-D di conduttore elettrico perfetto**

3.1 Introduzione.....	57
3.2 Modello di superficie.....	57
3.3 Modello elettromagnetico.....	58
3.4 Espansione del campo superficiale.....	60
-3.4.1 Introduzione alla valutazione del campo sulla superficie.....	60
-3.4.2 Calcolo dell'integrale di Dirichlet.....	61
3.5 Valutazione analitica del campo sulla superficie e del campo diffuso.....	65
-3.5.1 Risoluzione dei problemi scalari.....	66
3.6 Esempi numerici.....	71

<b>Conclusioni</b> .....	79
--------------------------	----

<b>Appendice I:</b> Programma usato per il calcolo delle potenze e per i grafici dei diagrammi di irradiazione nel caso monodimensionale.....	81
---	----

<b>Appendice II:</b> Programma usato per il calcolo delle potenze e per i grafici dei diagrammi di irradiazione nel caso monodimensionale con fissata precisione.....	85
---	----

<b>Appendice III:</b> Programma usato per il calcolo delle potenze e per i grafici dei diagrammi di irradiazione nel caso bidimensionale.....	89
---	----

<b>Appendice IV:</b> Programma per la generazione di una WM monodimensionale.....	92
---	----

***Appendice V: Programma per la generazione di una WM bidimensionale***.....92

***Bibliografia***.....93

# *Introduzione*

Quando una radiazione elettromagnetica incide sulla superficie di un materiale, possono verificarsi fenomeni di riflessione per cui la radiazione stessa può essere rinviata del tutto o in parte nello stesso mezzo dall'interfaccia che separa i due mezzi considerati, fenomeni di diffrazione per cui l'onda elettromagnetica incidente penetra nella zona d'ombra dell'ostacolo stesso a causa ad esempio dell'incidenza su spigoli che provoca onde da cammini multipli, e fenomeni di diffusione per cui la radiazione viene dispersa in tutte le direzioni a causa di particelle sospese presenti nel mezzo attraversato. Tale radiazione dispersa non è altro che il campo diffuso. La conoscenza del campo diffuso è di notevole importanza per lo studio dell'impatto sull'ambiente delle interazioni elettromagnetiche. Negli ultimi anni sono state sviluppate numerose tecniche di telerilevamento che hanno costituito e costituiscono tuttora una risorsa importantissima per avere notizie su fenomeni naturali di varia natura e di pari rilevanza. Uno dei sistemi più noti per telerilevare i dati è il SAR , acronimo per radar ad antenna sintetica, grazie al quale è possibile poter lavorare in qualsiasi condizione climatica ed indipendentemente dall'ora del giorno e ricavare le proprietà fisiche di una porzione della superficie terrestre a partire dalla conoscenza del campo diffuso.

Consci di questo fatto, affronteremo in questa tesi un rilevante problema di diffusione elettromagnetica. Come in ogni problema di questo tipo, vanno stabiliti due modelli:

- modello di superficie;
- modello elettromagnetico.

Per quanto riguarda il modello di superficie, sono stati sviluppati modelli classici che descrivono superfici naturali rugose attraverso processi stocastici bidimensionali che presentano una data densità di probabilità (di solito gaussiana) e funzione di correlazione (anch'essa gaussiana per superfici molto rugose o esponenziale per superfici poco rugose o una combinazione di esse). Tali modelli si scontrano però con la realtà dal momento che sono incapaci ed inadeguati per

descrivere le superfici naturali che sono autosimilari, cioè presentano proprietà di invarianza di scala. Per tale motivo viene introdotta la geometria frattale. I modelli frattali più noti per superfici naturali sono il modello WM (*Weierstrass-Mandelbrot*) e il modello *fBm* (*Fractional Brownian motion*). L'*fBm* è un processo continuo non differenziabile in alcun punto ad incrementi stazionari. Il vantaggio derivante da quest'ultimo è dovuto al fatto che permette di ricavare in forma chiusa e semplice la densità di potenza diffusa (e quindi il coefficiente di ***backscattering*** o retrodiffusione) sia sotto l'approccio di Kirchhoff sia con l'utilizzo del modello elettromagnetico *SPM* (*Small perturbation method*), sotto particolari limiti di validità da non violare. Lo svantaggio principale è dovuto al fatto che esso non fornisce un'espressione analitica della superficie. Per risolvere tale problema può essere usata un'altra particolare funzione frattale, la WM a banda limitata, che bene approssima l'*fBm*.

Per quanto riguarda il modello elettromagnetico, viene usato il metodo *EBCM*, acronimo per "*Metodo delle condizioni al contorno estese*".

La tesi è suddivisa in tre capitoli. Nel primo si evidenzia l'importanza della geometria frattale e vengono descritti i vantaggi e gli svantaggi dei due modelli di superfici frattali sopra citati, l'*fBm* e la WM. Nel secondo viene affrontato il problema della diffusione elettromagnetica da una superficie monodimensionale che separa due mezzi con permittività e permeabilità diverse. Gli esempi numerici vengono mostrati in relazione a una situazione in cui il profilo superficiale separa lo spazio libero da un mezzo dielettrico di permittività dielettrica  $\epsilon_r$ , con le stesse permeabilità. Utilizzando la proprietà della WM di essere quasi-periodica, il campo diffuso e quello trasmesso risultano scritti come sovrapposizione finita di modi di Floquet espressi in termini di matrici di dimensioni infinite. Per poter avere una soluzione numerica del problema bisogna troncare le matrici in gioco. Viene così mostrato un criterio di troncamento suffragato da varie considerazioni che ne evidenziano la fondatezza e l'efficienza. I risultati cui giungiamo sono in linea con le aspettative teoriche. Nel terzo capitolo, invece, viene affrontato lo stesso problema nel caso bidimensionale, nell'ipotesi in cui lo spazio dielettrico sia sostituito da un conduttore elettrico perfetto. Anche in tal caso il campo diffuso risulta scritto come sovrapposizione di modi e i risultati sperimentali

confermano l'efficienza del modello usato.

In fondo, invece, vengono riportate delle appendici in cui sono mostrati i programmi realizzati col software *Matematica 5.0*, usati per testare e avvalorare il metodo implementato.

# CAPITOLO 1

## *Geometria frattale*

### 1.1 Introduzione

Il termine *frattale*, coniato nel 1975, trae la sua etimologia dal latino *fractus*, da *frangere*, cioè rompere. Fu nel 1983 che tale termine acquisì vastissima notorietà presso matematici, scienziati e pubblico non specializzato grazie all'opera *The Fractal Geometry of Nature* scritta dal matematico Benoit B.Mandelbrot (1924-). “Le nuvole non sono sfere, le montagne non sono coni, i litorali non sono lisci, né la traiettoria di un fulmine è una linea retta”, così il matematico polacco è solito descrivere l'inadeguatezza della geometria euclidea nella descrizione della natura. In effetti si è resa necessaria l'introduzione di un tale tipo di geometria dal momento che le frastagliature degli oggetti naturali non potevano essere descritte dalla geometria euclidea. Infatti gli oggetti della natura (alberi, foglie, felci) presentano delle caratteristiche irregolari per cui è praticamente impossibile studiarle usando le proprietà della geometria euclidea (rette, poligoni, cerchi). Tutto ciò che si incontra in natura è più complesso e frammentato. Consideriamo ad esempio una comune felce. La cosa che si nota immediatamente è che una parte della felce è simile a tutta la felce stessa, ovvero è una copia in piccolo della foglia completa. Ed allo stesso modo si può procedere innumerevoli volte fino a ridursi a parti sempre più piccole. Nella figura di seguito riportata sono evidenziati i primi tre passi di questo confronto (Fig.1). La parte evidenziata in **rosso** è la copia in piccolo dell'intera foglia. La parte evidenziata in **blu** a sua volta è la copia ridotta della parte in rosso. Infine la parte **celeste** è la copia ridotta della parte blu. Si veda a tal proposito anche la Fig.2 in cui viene rappresentato in maniera chiara questo procedimento.

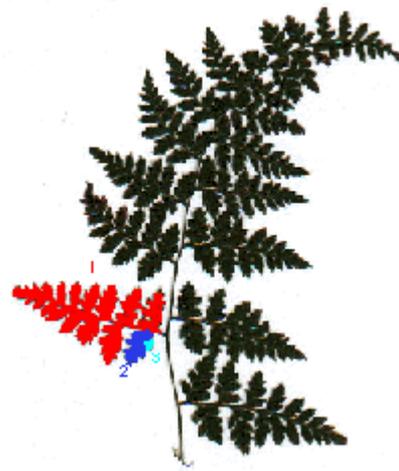


Fig.1

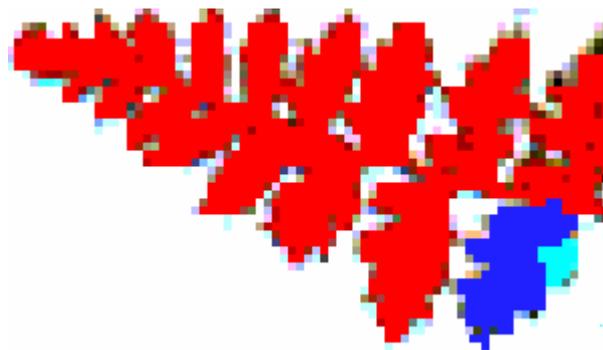


Fig.2

Questa proprietà prende il nome di autosimilarità (o autosomiglianza) : una parte dell'oggetto è simile al tutto. Contrariamente a qualsiasi altra figura geometrica, un frattale, se ingrandito, invece di perdere dettaglio si arricchisce di nuovi particolari. L'irregolarità dei frattali è infinitamente stratificata. A dispetto dell'estrema varietà di forme, la generazione di molti di questi oggetti è particolarmente semplice e può essere fatta sia con un programma di poche righe sia a mano seguendo particolari procedure e regole matematiche. Ad esempio vediamo come si costruisce il merletto a trina di Koch conosciuto anche come curva di Von Koch, che deve il suo nome al matematico H. Von Koch che lo introdusse in un articolo pubblicato nel 1904. Si considera un segmento e lo si divide in tre parti uguali, la parte centrale viene cancellata e sostituita da due segmenti di lunghezza uguale al precedente e inclinati di  $60^\circ$ , in modo da formare

un triangolo equilatero. Questa operazione viene iterata piu' volte ottenendo man mano una figura sempre piu' complessa (Fig.3).

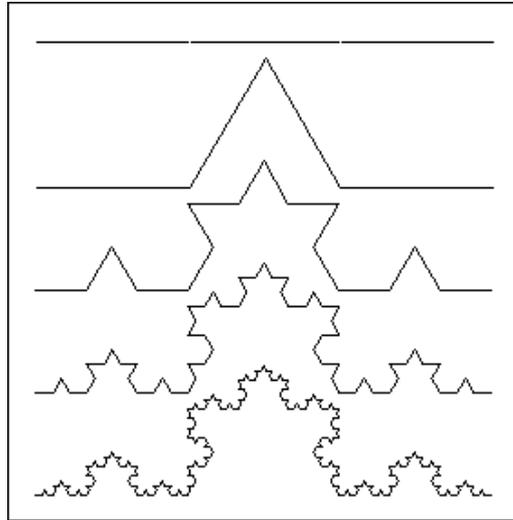


Fig.3:Merletto a trina di von Kock

Si può notare che tale tipo di curva è continua ma non derivabile in alcun punto. Dal merletto a trina di Koch si può ottenere il cosiddetto **fiocco di neve** . Basta combinare insieme tre copie del frattale lungo i lati di un triangolo equilatero, ottenendo la Fig.4.

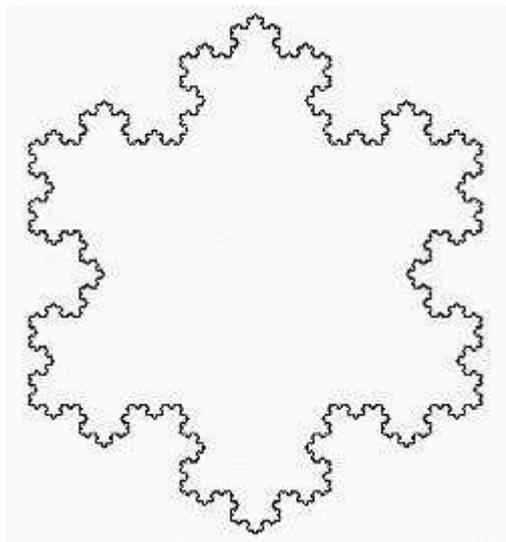


Fig.4:Fiocco di neve di Von Koch

Osserviamo che tale curva ha una lunghezza infinita pur racchiudendo un'area finita (cosa questa che sarebbe impossibile realizzarla con la geometria euclidea). Come si nota dagli esempi, gli oggetti frattali presentano la proprietà di invarianza di scala, nel senso che le proprietà statistiche di un oggetto frattale sono le stesse al variare della scala di osservazione. Bisogna tuttavia notare che per frattali costruiti attraverso procedure analitiche o computazionali, detti perciò deterministici, non c'è alcun limite di scala, mentre le superfici naturali sono dei frattali aleatori in un ampio ma limitato range di scale. Infatti in tal caso il limite inferiore lo si raggiunge quando si arriva a una descrizione chimico-atomico-molecolare dell'oggetto considerato, mentre il limite superiore è dovuto essenzialmente alla finitezza di un qualsiasi oggetto reale. E' straordinario, tuttavia, il fatto che i frattali, dedotti da algoritmi così semplici, mostrino forme così complesse e così somiglianti a ciò che la natura propone al nostro sguardo quotidianamente.

## 1.2 Dimensione frattale

Fino agli anni '70, non essendo ancora stata introdotta la geometria frattale, come prevedeva la geometria euclidea, la dimensione geometrica era un numero intero: 0 il punto, 1 la retta, 2 il piano, 3 il volume; solo in seguito, grazie agli studi di Hausdoff e Besicovitch è stato evidenziato che tale definizione può essere estesa, nel senso che la dimensione geometrica può essere anche un numero non intero, in generale un numero reale positivo. Cominciamo a darne una definizione operativa: se  $r$  è la dimensione del "righello" con il quale si ipotizza di misurare l'oggetto (o la curva o la superficie) ed  $N$  sono il numero di volte che il "righello" è contenuto nell'oggetto di dimensione  $D$  da misurare, allora usiamo un "righello"

$$r = \left(\frac{1}{N}\right)^{\left(\frac{1}{D}\right)}. \text{ Passando ai logaritmi ricaviamo } D = \frac{\text{Log}N}{\text{Log}\frac{1}{r}}. \text{ Facciamo un esempio:}$$

consideriamo la curva di von Koch precedentemente descritta: al primo passo

$$r = \frac{1}{3}, N=4; \text{ al secondo } r = \left(\frac{1}{3}\right)^2, N=4^2; \text{ all' } i\text{-esimo passo } r = \left(\frac{1}{3}\right)^{(i)}, N=4^{(i)}.$$

In tutti i casi  $D = \frac{\text{Log}4}{\text{Log}3}$  e ciò evidenzia che la dimensione della curva di von Koch è 1.2618. Quindi tale dimensione ci dice che quest'oggetto non è né una linea né una superficie, ma è un qualcosa con una dimensione compresa fra le due e ci dà un'idea di quanto il frattale riempia il piano. Frattali di dimensione prossima ad 1 saranno simili ad una curva, frattali di dimensione prossima a 2, tenderanno ad occupare tutto il piano. Quindi la dimensione frattale misura quanto è frastagliato e irregolare un oggetto.

### 1.3 Modelli di superfici frattali

I modelli frattali più usati per superfici naturali sono due:

- il modello WM (*Weierstrass-Mandelbrot*);
- il modello fBm (*Fractional Brownian motion*).

Il vantaggio principale derivante dall'uso del primo modello è quello di ottenere un'espressione analitica della superficie, mentre l'uso del secondo modello permette di ottenere un'espressione analitica della pdf degli incrementi della superficie stessa. Tali modelli si usano nei problemi di scattering. In tal caso il primo modello permette di ottenere un'espressione analitica del campo diffuso, mentre il secondo di ricavare un'espressione in forma chiusa per la densità di potenza diffusa, ed essendo tale espressione facile da manipolare, possiamo anche valutare la dipendenza di quest'ultima dai parametri frattali. Lo svantaggio apportato dal modello fBm è legato al fatto che possono essere valutate solo le statistiche del secondo ordine.

### 1.4 Modello fBm

Un processo aleatorio  $z(x, y)$  descrive una superficie fBm se, per ogni  $x, x', y, y'$  soddisfa la seguente relazione:

$$\Pr\{z(x, y) - z(x', y') < \bar{\eta}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi s \tau^H}} \int_{-\infty}^{\bar{\eta}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2s^2 \tau^{2H}}\right) d\eta \quad (1.4.1)$$

dove

$$\tau = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (1.4.2)$$

$H$  è il coefficiente di Hurst ed  $s$  è un parametro reale le cui dimensioni sono  $[m^{(1-H)}]$ . Quest'ultimo parametro è legato ad un altro, la Topotesia:

$$s = T^{(1-H)} \quad (1.4.3)$$

dove  $T$  è definita come la scala di osservazione a cui si osserva che la pendenza media della superficie è unitaria. Si può dimostrare che un processo che soddisfa l'equazione (1.4.1) esiste e che la dimensione frattale è:

$$D=3-H.$$

Notiamo ora che il processo fBm non è stazionario, ma i suoi incrementi a fissata  $\tau$  costituiscono un processo stazionario, isotropo e gaussiano a media nulla con varianza pari a  $T^{2-2H} \tau^{2H}$ . Per cui:

$$\Delta z(\tau) = N(0, T^{2-2H} \tau^{2H}) \quad (1.4.4)$$

Si può, inoltre, dimostrare che la potenza spettrale di un processo fBm bidimensionale è:

$$S(\kappa) = S_0 \kappa^{-\alpha} \quad (1.4.5)$$

dove:

$$\kappa = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2} \quad (1.4.6)$$

è la frequenza spaziale ( $\kappa_x$  e  $\kappa_y$  sono rispettivamente le trasformate di Fourier lungo x e y),  $\alpha$  è la pendenza dello spettro, e  $S_0$  è un parametro spettrale misurato in  $[m^{(2-2H)}]$ . Il legame tra parametri spaziali e spettrali è dato da:

$$\alpha = 2 + 2H = 8 - 2D \quad (1.4.7)$$

$$S_0 = s^2 2^{2H} 2\pi H \frac{\Gamma(1+H)}{\Gamma(1-H)} \quad (1.4.8)$$

dove  $\Gamma(\cdot)$  è la funzione Gamma di Eulero. Notiamo anche che dalla disuguaglianza  $0 < H < 1$  discende la disuguaglianza  $2 < \alpha < 4$ . E' opportuno, inoltre, evidenziare che una superficie che soddisfa l'equazione (1.4.1) è continua ma non differenziabile. Perciò tale modello, che noi chiameremo fBm matematico, non può essere usato nei modelli di diffusione elettromagnetica in cui si richiede la continuità delle componenti tangenziali dei campi. Comunque, come detto precedentemente, le superfici naturali esibiscono un comportamento frattale in un vasto ma limitato range di scale; per cui, se indichiamo con L la dimensione lineare della superficie illuminata e con  $\lambda$  la lunghezza d'onda del campo elettromagnetico, le scale che contribuiranno alla diffusione variano nell'intervallo  $[\frac{\lambda}{10}, L]$ . Per tale motivo, possiamo considerare il modello di superficie fBm fisico, cioè un modello che soddisfa l'equazione (1.4.1) per

$$\tau_{\min} < \tau < \tau_{\max} \quad \text{con} \quad \tau_{\min} = \frac{\lambda}{10} \quad \text{e} \quad \tau_{\max} = L \quad \text{o equivalentemente in termini di}$$

$$\text{frequenze spaziali per} \quad \kappa_{\min} < \kappa < \kappa_{\max} \quad \text{con} \quad \kappa_{\min} \cong \frac{1}{\tau_{\max}} \quad \text{e} \quad \kappa_{\max} \cong \frac{1}{\tau_{\min}}.$$

Ciò spiega anche perché tale modello viene chiamato fBm a banda limitata. Si può dimostrare che le superfici fBm a banda limitata sono stazionarie e regolari.

Considerando, invece, un profilo monodimensionale le equazioni (1.4.1-2,5-8) devono essere sostituite con :

$$\Pr\{z(x) - z(x') < \bar{\eta}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi s \tau^H}} \int_{-\infty}^{\bar{\eta}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2s^2 \tau^{2H}}\right) d\eta \quad (1.4.9)$$

dove

$$\tau = |x - x'| \quad (1.4.10)$$

$$D = 2 - H \quad (1.4.11)$$

$$\alpha = 1 + 2H = 5 - 2D \quad (1.4.12)$$

$$S_0 = s^2 \frac{\pi H}{\cos(\pi H)} \frac{1}{\Gamma(1 - 2H)} \quad (1.4.13)$$

$$\kappa = |\kappa_x| \quad (1.4.14)$$

### 1.5 Modello WM( Weierstrass-Mandelbrot)

La funzione di Weierstrass-Mandelbrot è una sovrapposizione di toni sinusoidali e fornisce una descrizione analitica del profilo superficiale, sia monodimensionale che bidimensionale. La WM monodimensionale matematica può essere descritta tramite la seguente formula:

$$z(x) = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n v^{-Hn} \sin(\kappa_0 v^n x + \phi_n)$$

mentre per ottenere una WM fisica, basta troncare la sommatoria su M indici, ottenendo:

$$z(x) = a \sum_{n=0}^{M-1} C_n v^{-Hn} \sin(\kappa_0 v^n x + \phi_n) \quad (1.5.1)$$

in cui:

- $a$  è un fattore di scala dell'altezza del profilo;
- $C_n$  tiene conto del comportamento in ampiezza di ogni tono e può essere deterministico oppure una variabile aleatoria di solito assunta gaussiana;

- $\phi_n$  porta in conto il comportamento in fase di ogni tono, e può essere deterministico oppure una variabile aleatoria di solito assunta uniforme in un'intervallo di ampiezza  $2\pi$ ;
- $\kappa_0$  è il numero d'onda della componente fondamentale;
- $\nu > 1$ , irrazionale, tiene conto di come sono spaziate le componenti spettrali della superficie;
- $M$  è il numero di toni usati per descrivere la superficie;
- $H$  è il coefficiente di Hurst.

Dalla (1.5.1) si evince che lo spettro WM è formato da  $M$  componenti spettrali discrete spaziate secondo una legge  $\nu^n$  mentre le ampiezze sono spaziate secondo una legge  $\nu^{-Hn}$ . Si può inoltre dimostrare che la funzione descritta dalla appartiene alla classe dei frattali con dimensione frattale pari a  $D = 2 - H$ . Si noti che la funzione (1.5.1) è anche una funzione quasi-periodica, proprietà questa fondamentale per poter applicare la teoria di Floquet generalizzata per studiare la diffusione da interfacce quasi periodiche. La più bassa e la più alta delle componenti spettrali della WM, sono relazionate rispettivamente alla lunghezza  $L$  del profilo illuminato ed alla lunghezza d'onda  $\lambda$ . Infatti considerando due fattori di sicurezza  $\chi_1 \in (0,1]$  e  $\chi_2 \in (0,1]$ , possiamo scrivere tali relazioni:

$$\kappa_0 = \frac{2\pi \cdot \chi_1}{L} \quad (1.5.2)$$

$$\kappa_0 \nu^{M-1} = \frac{2\pi}{\lambda \cdot \chi_2} \quad (1.5.3)$$

Facendo il rapporto tra la (1.5.3) e la (1.5.2) e applicando il logaritmo naturale ad ambo i membri, si ricava tale espressione per il numero di toni:

$$M = INT \left[ \frac{\ln(L/(\lambda \cdot \chi))}{\ln(\nu)} \right] + 1 \quad (1.5.4)$$

dove  $INT(\cdot)$  è la funzione che restituisce la parte intera del proprio argomento, mentre  $\chi = \chi_1 \cdot \chi_2$ .

Analogamente la WM matematica bidimensionale può essere descritta analiticamente in tal modo:

$$z(x, y) = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n v^{-Hn} \sin[\kappa_0 v^n (x \cos \psi_n + y \sin \psi_n) + \phi_n] \quad (1.5.5)$$

I parametri in gioco assumono lo stesso significato che assumono nel caso monodimensionale. Inoltre anche  $\psi_n$ , che tiene conto del comportamento in direzione di ogni tono, può essere o deterministico oppure una variabile aleatoria uniforme in un intervallo di ampiezza  $2\pi$ . Anche in tal caso per avere una WM fisica basta troncare la (1.5.5) su M indici, ottenendo:

$$z(x, y) = a \sum_{n=0}^{M-1} C_n v^{-Hn} \sin[\kappa_0 v^n (x \cos \psi_n + y \sin \psi_n) + \phi_n] \quad (1.5.6)$$

La (1.5.6) descrive una superficie naturale bidimensionale con dimensione frattale pari a

$$D=3-H.$$

In tal caso la componente spettrale piu' bassa è legata al diametro dell'impronta (*footprint*) dell'antenna sulla superficie, mentre quella piu' alta è relazionata alla lunghezza d'onda. Per cui se  $(X, Y)$  è il footprint dell'antenna e  $\sqrt{X^2 + Y^2}$  il suo diametro, si avranno le seguenti relazioni:

$$\kappa_{\min} = \kappa_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \quad (1.5.7)$$

$$\kappa_{\max} = \kappa_0 v^{(M-1)} = \frac{2\pi}{\chi \cdot \lambda} \quad (1.5.8)$$

con  $\chi = 0.1$  di solito.

Le (1.5.7) e (1.5.8) determinano congiuntamente il numero di toni della WM fisica, pari a:

$$M = INT \left[ \frac{\ln(\sqrt{X^2 + Y^2} / (\chi \cdot \lambda))}{\ln v} \right] + 1 \quad (1.5.9)$$

dove  $INT(\cdot)$  è la funzione che restituisce la parte intera del proprio argomento.

## 1.6 Legame tra fBm e WM

La WM può essere vista come una rappresentazione di un fBm con la stessa dimensione frattale, campionata alle frequenze spaziali discrete:

$$\kappa_n = \kappa_0 \nu^n \quad (1.6.1)$$

I parametri della WM sono legati a quelli dell'fBm dalle relazioni:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{S_0}{2\pi H} \kappa_0^{-2H} (\nu^H - \nu^{-H}) \\ &\Downarrow \\ S_0 &= 2\pi H a^2 \kappa_0^{2H} \frac{1}{(\nu^H - \nu^{-H})} \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

## CAPITOLO 2

### *Un nuovo modello elettromagnetico: EBCM applicato a superfici frattali 1-D*

#### 2.1 Introduzione

In questo capitolo affronteremo il problema della diffusione da superfici frattali descritte dalla Weierstrass-Mandelbrot monodimensionale all'interno di un nuovo modello elettromagnetico, l'EBCM acronimo per *metodo delle condizioni al contorno estese*. Tale metodo è stato usato per valutare il campo diffuso da una superficie periodica o quasi-periodica e il punto chiave della procedura è la proprietà della WM di essere una funzione quasi-periodica, la qual cosa favorisce la generalizzazione della teoria di Floquet che permette di esprimere campo diffuso e campo trasmesso come sovrapposizione di modi. L'efficienza del metodo viene testata sia attraverso considerazioni sul bilancio energetico che sui diagrammi di irradiazione diffusi.

La rilevanza del metodo è legata al fatto che in linea di principio non dobbiamo imporre alcuna restrizione sulla rugosità della superficie, per cui esso è applicabile a qualsiasi tipo di profilo. Tuttavia il campo diffuso viene scritto sotto forma di una serie di infiniti termini di coefficienti di ampiezza, per cui in linea di principio dovremmo risolvere un sistema lineare di infinite equazioni (matriciali). Per avere delle soluzioni numeriche è perciò necessario troncamento la serie e risolvere di conseguenza un problema di rango finito. In tal caso va discusso approfonditamente il criterio di troncamento in modo da evitare di avere degradazioni significative nella valutazione del campo diffuso e di ottenere risultati inaspettati o del tutto erronei. A tale scopo le nostre argomentazioni saranno focalizzate sul come intervengono nel campo diffuso i vari modi, facendo uno studio sui parametri del profilo superficiale considerato.

## 2.2 Modello del profilo superficiale

Il profilo superficiale separa due semispazi dielettrici ognuno con le proprie permeabilità magnetiche  $\mu_1, \mu_2$  e permittività dielettriche assolute  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Per come è stato concepito il profilo geometrico-superficiale, useremo una funzione WM a banda limitata che è appropriata per descrivere superfici naturali. Tale funzione è già stata introdotta nel capitolo 1 e si tratta della (1.5.1).

## 2.3 EBCM (Extended Boundary conditions method)

In tale paragrafo useremo l'EBCM per valutare il campo elettromagnetico diffuso da un profilo dielettrico monodimensionale descritto in accordo con la (1.5.1), quando su di esso incide un'onda piana.

### *2.3.1 Equazioni integrali*

Il metodo EBCM si basa in sostanza sul teorema di equivalenza. A tale scopo vengono fissati due insiemi di sorgenti equivalenti relazionati ai campi tangenziali sul profilo sotto osservazione. Il primo insieme irradia il campo elettromagnetico diffuso al di sopra del profilo superficiale mentre cancella il campo incidente al di sotto del profilo stesso. Il secondo irradia il campo trasmesso al di sotto del profilo considerato, mentre al di sopra irradia un campo nullo. Queste considerazioni possono essere tradotte in tali formule analitiche:

$$\psi_i(\mathbf{r}) + \int_S dS' \left[ \psi_1(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' \psi_1(\mathbf{r}') \right] =$$

$$= \begin{cases} \psi_1(\mathbf{r}) & z > z'(x') \\ 0 & z < z'(x') \end{cases} \quad (2.3.1.1)$$

$$(2.3.1.2)$$

$$\int_S dS' \left[ \psi_2(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' \psi_2(\mathbf{r}') \right] =$$

$$= \begin{cases} 0 & z > z'(x') \\ \psi_2(\mathbf{r}) & z < z'(x'). \end{cases} \quad (2.3.1.3)$$

$$(2.3.1.4)$$

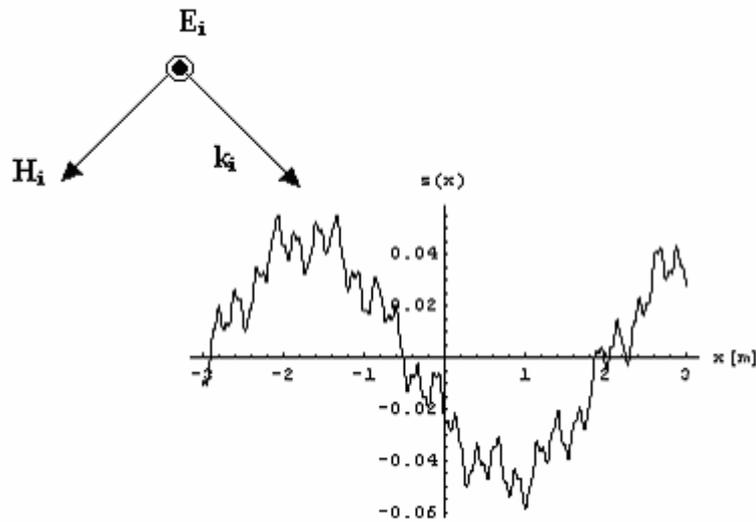


Fig.1: Geometria del problema per polarizzazione TE

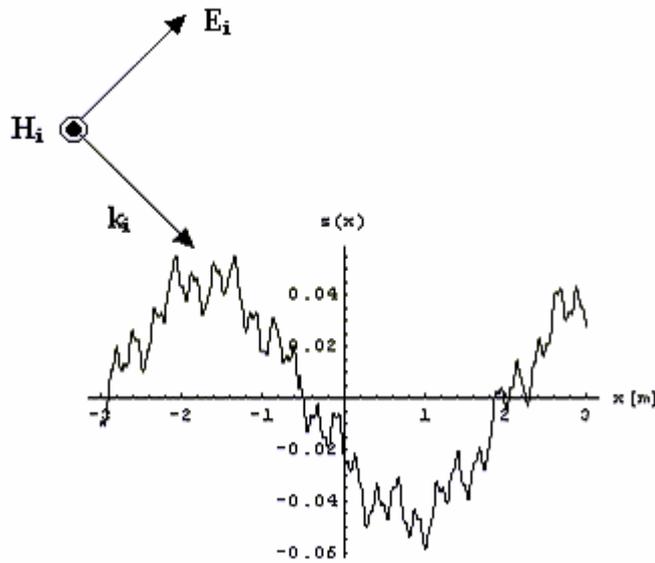


Fig.2: Geometria del problema per polarizzazione TM

Nelle (2.3.1.1), (2.3.1.2), (2.3.1.3) e (2.3.1.4),  $\nabla$  è l'operatore nabla,  $\psi_1(\mathbf{r})$  è il campo totale al di sopra della superficie,  $\psi_i(\mathbf{r})$  è il campo incidente, mentre  $\psi_2(\mathbf{r})$  è il campo totale al di sotto della superficie. Per un'onda piana incidente polarizzata linearmente lungo l'asse y:

$$\psi_i(\mathbf{r}) = A \exp(-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}) \hat{y}, \quad (2.3.1.5)$$

dove  $A$  è un coefficiente in ampiezza e  $\mathbf{k}_i = k_{ix} \hat{x} + k_{iz} \hat{z}$  è il vettore numero d'onda incidente con  $k_{ix} = k \sin \vartheta_i$ ,  $k_{iz} = k \cos \vartheta_i$ , con  $\vartheta_i$  l'angolo di incidenza.

Per polarizzazione perpendicolare o TE ,  $\psi$  sta per campo elettrico,  $A=E$  e il campo elettrico è allineato lungo l'asse  $y$ , mentre per polarizzazione parallela o TM  $\psi$  sta per campo magnetico,  $A=H$  e il campo magnetico è allineato lungo l'asse  $y$ . Inoltre,  $S$  è la superficie considerata,  $\mathbf{r}$  è un punto nello spazio,  $\mathbf{r}'$  è un punto sulla superficie,  $g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  e  $g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  sono le funzioni di Green rispettivamente nel mezzo 1 e nel mezzo 2:

$$g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{j}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{1x} \frac{1}{k_{1z}} \exp[-jk_{1x}(x-x') - jk_{1z}|z-z'|], \quad (2.3.1.6)$$

$$g_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{j}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{2x} \frac{1}{k_{2z}} \exp[-jk_{2x}(x-x') - jk_{2z}|z-z'|] \quad (2.3.1.7)$$

Nelle equazioni (2.3.1.6) e (2.3.1.7)  $k_1$  e  $k_2$  rappresentano i numeri d'onda rispettivamente nel mezzo 1 e nel mezzo 2,  $k_{1z} = \sqrt{k_1^2 - k_{1x}^2}$ ,  $k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2}$ .

I due insiemi di sorgenti equivalenti sono legati dalle seguenti relazioni, che non sono altro che la conseguenza dell'imposizione della continuità dei campi tangenziali sul profilo superficiale:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \psi_2(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{n}} \times \psi_1(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{y}}, \quad (2.3.1.8)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \left[ \nabla' \times \psi_2(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{y}} \right] = \eta \hat{\mathbf{n}} \times \left[ \nabla' \times \psi_1(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{y}} \right], \quad (2.3.1.9)$$

in cui:

$$\eta = \begin{cases} \mu_2 / \mu_1, & TE \\ \epsilon_2 / \epsilon_1, & TM \end{cases} \quad (2.3.1.10)$$

Considerando che  $\hat{\mathbf{n}} \perp \hat{\mathbf{y}}$ , ricordando dall'analisi vettoriale il prodotto vettoriale tra tre vettori e che  $\left( \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' \right) \psi(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' \psi(\mathbf{r}')$ , le condizioni di continuità (2.3.1.8) - (2.3.1.9) diventano:

$$\psi_1(\mathbf{r}') = \psi_2(\mathbf{r}') \quad (2.3.1.11)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' \psi_2(\mathbf{r}') = \eta \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' \psi_1(\mathbf{r}'), \quad (2.3.1.12)$$

Le equazioni (2.3.1.2) e (2.3.1.3) congiuntamente con le condizioni (2.3.1.11) e (2.3.1.12) possono essere usate per la valutazione dei campi superficiali  $\psi_{(1,2)}(\mathbf{r}')$ ,  $\nabla' \psi_{(1,2)}(\mathbf{r}')$  in funzione del campo incidente  $\psi_i(\mathbf{r})$  noto. Una volta calcolati i campi superficiali, il campo totale in tutto lo spazio può essere facilmente calcolato tramite le (2.3.1.1) e (2.3.1.4), ed altrettanto facilmente si riconosce che esso è la soluzione del nostro problema. Infatti esso contiene il campo incidente  $\psi_i(\mathbf{r})$  che per costruzione soddisfa le equazioni di Maxwell e le condizioni di continuità.

## 2.4 Espansione del campo sulla superficie

L'espansione superficiale del campo dipende ovviamente dalle proprietà geometriche del profilo analizzato. Per una superficie sinusoidale con periodo  $\frac{2\pi}{\kappa}$ , il campo superficiale sarà periodico di  $\frac{2\pi}{\kappa}$ , per cui è possibile un'espansione di Fourier monodimensionale:

$$dS' \psi_1(\mathbf{r}') = dx' \exp(-jk_{ix} x') \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \alpha_{N,q} \exp(-jq \cdot \kappa x'), \quad (2.4.1)$$

$$dS' \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' \psi_1(\mathbf{r}') = dx' k_1 \exp(-jk_{ix} x') \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \alpha_{D,q} \exp(-jq \cdot \kappa x'), \quad (2.4.2)$$

dove  $\alpha_{N,q}$  e  $\alpha_{D,q}$  sono i coefficienti della serie di Fourier. Osserviamo innanzitutto che  $dS' = dx' \sqrt{1 + (dz'/dx')^2}$ , per cui le funzioni che noi in realtà espandiamo sono  $\sqrt{1 + (dz'/dx')^2} \psi(\mathbf{r}')$  e  $\sqrt{1 + (dz'/dx')^2} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' \psi(\mathbf{r}')$ . Se la superficie è ottenuta come sovrapposizione di  $M$  toni sinusoidali di periodo  $2\pi/\kappa_0, \dots, 2\pi/\kappa_{M-1}$ , allora l'espansione diventerà:

$$dS' \psi_1(\mathbf{r}') = dx' \exp(-jk_{ix} x').$$

$$\sum_{q_0=-\infty}^{+\infty} \sum_{q_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{q_{M-1}=-\infty}^{+\infty} \alpha_{N, q_0, \dots, q_{M-1}} \exp(-j(q_0 \kappa_0 + q_1 \kappa_1 + \dots + q_{M-1} \kappa_{M-1}) x'). \quad (2.4.3)$$

$$dS' \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' \psi_1(\mathbf{r}') = dx' k_1 \exp(-jk_{ix} x').$$

$$\sum_{q_0=-\infty}^{+\infty} \sum_{q_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{q_{M-1}=-\infty}^{+\infty} \alpha_{D, q_0, \dots, q_{M-1}} \exp(-j(q_0 \kappa_0 + q_1 \kappa_1 + \dots + q_{M-1} \kappa_{M-1}) x'). \quad (2.4.4)$$

L'esplicito uso degli indici  $q_0, \dots, q_{M-1}$  rende chiaramente visibile la combinazione di toni da cui viene generato un modo elettromagnetico. Se tale uso per questo motivo ci facilita, dall'altro appesantisce notevolmente la notazione. Per raggiungere entrambi gli scopi, usiamo la notazione vettoriale, introducendo i vettori  $\tilde{\mathbf{q}} = [q_0, \dots, q_{M-1}]$  ed  $\tilde{\mathbf{N}} = [\kappa_0, \dots, \kappa_{M-1}]$  rispettivamente i trasposti di  $\mathbf{q}$  ed  $\mathbf{N}$ . Con suddetta scelta è possibile riscrivere la (2.4.1) e la (2.4.2) in tal modo:

$$dS' \psi_1(\mathbf{r}') = dx' \exp(-jk_{ix} x') \sum_{\substack{q_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} \alpha_{N, \mathbf{q}} \exp(-j \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N} x'), \quad (2.4.5)$$

$$dS' \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' \psi_1(\mathbf{r}') = dx' k_1 \exp(-jk_{ix} x') \sum_{\substack{q_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} \alpha_{D, \mathbf{q}} \exp(-j \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N} x'), \quad (2.4.6)$$

che ora sono di più facile lettura.

Se i rapporti tra tutte le coppie  $\kappa_i, \kappa_j$  sono numeri razionali, allora certamente

esisterà un  $\kappa$  tale che  $\tilde{\mathbf{N}} = [n_1 \kappa, \dots, n_i \kappa, \dots, n_{M-1} \kappa]$ , per cui la superficie sarà

periodica di periodo  $2\pi/\kappa$  e le equazioni (2.4.5) e (2.4.6) si riconducono alle (2.4.1) e (2.4.2), in accordo con il teorema di Floquet. Se invece uno dei rapporti delle coppie  $\kappa_i, \kappa_j$  è un numero irrazionale, la superficie sarà quasi periodica e

dovranno essere usate di conseguenza le espressioni (2.4.5) e (2.4.6). In particolare per una funzione WM avremo  $\tilde{\mathbf{N}} = [\kappa_0, \kappa_0 \nu, \dots, \kappa_0 \nu^{M-1}]$ .

#### **2.4.1 Introduzione alla valutazione del campo sulla superficie**

Nei successivi paragrafi, servendoci delle equazioni (2.3.1.1), (2.3.1.2), (2.3.1.3), (2.3.1.4), nonché delle condizioni di continuità (2.3.1.11) e (2.3.1.12), valuteremo i coefficienti di ampiezza del campo superficiale in termini dell'ampiezza  $A$  del campo incidente (2.3.1.5).

A tale scopo le equazioni integrali (2.3.1.1), (2.3.1.2), (2.3.1.3), (2.3.1.4), usando le (2.3.1.6) e (2.3.1.7), possono essere riscritte in maniera più compatta introducendo questi integrali:

$$I_{N(1,2)}^{\pm} \equiv \int_{S'} dS' [\psi_{(1,2)}(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' g_{(1,2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \quad (2.4.1.1)$$

$$I_{D(1,2)}^{\pm} \equiv \int_{S'} dS' \left[ g_{(1,2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' \psi_{(1,2)}(\mathbf{r}') \right] \quad (2.4.1.2)$$

Innanzitutto i pedici  $N$  e  $D$  servono per ricordarci che i rispettivi integrali assumono la stessa forma di quelli calcolati quando vengono imposte le condizioni di Neumann e Dirichlet per conduttore elettrico perfetto, il segno  $\pm$  porta in considerazione il fatto che gli integrali di Neumann e Dirichlet includono le funzioni di Green che devono essere valutate per  $z > \max[z'(x')] = z'_M$  e  $z < \min[z'(x')] = z'_m$ , mentre i pedici (1,2) richiamano il fatto che devono essere usati rispettivamente i numeri d'onda  $k_1$  e  $k_2$ .

Usando le equazioni di continuità (2.3.1.11) e (2.3.1.12), le equazioni (2.4.1.1) e (2.4.1.2), possono essere così riscritte:

$$I_{N(1,2)}^{\pm} \equiv \int_{S'} dS' \left[ \psi_1(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' g_{(1,2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] \quad (2.4.1.3)$$

$$I_{D(1,2)}^{\pm} \equiv \eta \int_{S'} dS' \left[ g_{(1,2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' \psi_1(\mathbf{r}') \right] \quad (2.4.1.4)$$

Con tale notazione, sono stati raggruppati sia il caso TE che TM, rendendo anche piu' facile la lettura.

A questo punto le equazioni integrali possono essere così espresse:

$$\begin{cases} \psi_s(\mathbf{r}) = \psi_1(\mathbf{r}) - \psi_i(\mathbf{r}) = I_{N1}^+ - I_{D1}^+ & z > z'_M & (2.4.1.5a) \\ \psi_i(\mathbf{r}) = -I_{N1}^- + I_{D1}^- & z < z'_m & (2.4.1.5b) \\ 0 = I_{N2}^+ - I_{D2}^+ & z > z'_M & (2.4.1.5c) \\ \psi_2(\mathbf{r}) = I_{N2}^- - I_{D2}^- & z < z'_m & (2.4.1.5d) \end{cases}$$

### 2.4.2 Calcolo di $I_D$

In tale paragrafo ci accingiamo a calcolare l'integrale di Dirichlet  $I_D$  definito nella (2.4.1.2).

Ricordando l'espressione della funzione di Green, l'integrale (2.4.1.2) assume tale forma:

$$\begin{aligned} I_{D(1,2)}^{\pm} = & -\frac{jk_{(1,2)}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{(1,2)x} \frac{1}{k_{(1,2)z}} \exp[-j(k_{(1,2)x}x \pm k_{(1,2)z}z)] \\ & \cdot \sum_{\substack{q_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} \alpha_{D,q} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \exp \left[ j \left( k_{(1,2)x} - k_{ix} - \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N} \right) x' \pm jk_{(1,2)z}z' \right] \end{aligned} \quad (2.4.2.1)$$

Se stiamo nella regione  $z > \max[z'(x')] = z'_M$ , allora nell'esponenziale della (2.4.2.1)  $|z - z'| = z - z'$ , altrimenti  $|z - z'| = -(z - z')$  se stiamo in  $z < \min[z'(x')] = z'_m$ . Inoltre l'integrale nella variabile  $x'$  va esteso a tutto l'asse reale e questo è lecito se la superficie è grande rispetto alla lunghezza d'onda elettromagnetica incidente.

Apprestiamoci a calcolare tale integrale:

$$I_A \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \exp \left[ j \left( k_{(1,2)x} - k_{ix} - \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N} \right) x' \pm j k_{(1,2)z} z' \right] \quad (2.4.2.2)$$

Preliminarmente cerchiamo di scrivere in maniera piu' esplicita il termine  $\exp(\pm j k_{(1,2)z} z')$  in cui dobbiamo andare a sostituire l'equazione della superficie descritta dalla (2.2.1):

$$\begin{aligned} \exp(\pm j k_{(1,2)z} z') &= \exp(\pm j k_{(1,2)z} a \sum_{n=0}^{M-1} C_n v^{-Hn} \sin(\kappa_0 v^n x' + \phi_n)) = \\ &= \prod_{n=0}^{M-1} \exp(\pm j k_{(1,2)z} a C_n v^{-Hn} \sin(\kappa_0 v^n x' + \phi_n)) = \prod_{n=0}^{M-1} \exp(\pm j W \sin(B)) \end{aligned} \quad (2.4.2.3)$$

in cui si sono fatte tali posizioni:

$$\begin{cases} W = k_{(1,2)z} a C_n v^{-Hn} \\ B = \kappa_0 v^n x' + \phi_n \end{cases}$$

Ricordiamo, ora, le identità di Bessel:

$$\exp(j v \sin \vartheta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(v) \exp(j p \vartheta), \quad (2.4.2.4)$$

$$J_p(-v) = (-1)^p J_p(v). \quad (2.4.2.5)$$

Possiamo riscrivere la (2.4.2.3) in questo modo:

$$\begin{aligned} \exp(\pm j k_{(1,2)z} z') &= \prod_{n=0}^{M-1} \exp(\pm j W \sin(B)) = \prod_{n=0}^{M-1} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (\pm 1)^{m(\mathbf{p})} \exp(j p B) J_p(W) = \\ &= \sum_{\substack{p_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} (\pm 1)^{m(\mathbf{p})} \exp \left( -j \tilde{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\phi} - j \tilde{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{N} x' \right) \prod_{n=0}^{M-1} J_{p_n} \left( k_z a C_n v^{-Hn} \right) \end{aligned} \quad (2.4.2.6)$$

in cui:

$-\tilde{\boldsymbol{\phi}} = [\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{M-1}]$  è il trasposto del vettore dell'espansione delle fasi della funzione WM;

$$-\tilde{\mathbf{p}} = [p_0, p_1, \dots, p_{M-1}];$$

$$-m(\mathbf{p}) = \sum_{n=0}^{M-1} p_n .$$

Sostituendo la (2.4.2.6) nella (2.4.2.2), si ha:

$$I_A = \sum_{\substack{p_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} (\pm 1)^{m(\mathbf{p})} \exp(-j\tilde{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\phi}) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \exp \left[ -jk_{ix}x' - j(\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{N}x' + jk_{(1,2)x}x' \right] \right\} \cdot \prod_{n=0}^{M-1} J_{p_n}(k_{(1,2)z} a C_n \nu^{-Hn}) = \quad (2.4.2.7)$$

$$= \sum_{\substack{p_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} (\pm 1)^{m(\mathbf{p})} \exp(-j\tilde{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\phi}) \delta \left[ k_{(1,2)x} - k_{ix} - (\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{N} \right] \prod_{n=0}^{M-1} J_{p_n}(k_{(1,2)z} a C_n \nu^{-Hn}).$$

Sostituendo la (2.4.2.7) nella (2.4.2.1), otteniamo:

$$I_{D(1,2)}^{\pm} = \frac{-jk_{(1,2)}}{4\pi} \sum_{\substack{p_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} (\pm 1)^{m(\mathbf{p})} \exp(-j\tilde{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\phi}) \left\{ \sum_{\substack{q_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} \alpha_{D,q} \frac{1}{k_{(1,2)zqp}} \exp(-j[k_{xqp}x \pm k_{(1,2)zqp}z]) \right\} \cdot \prod_{n=0}^{M-1} J_{p_n}(k_{(1,2)zqp} a C_n \nu^{-Hn}), \quad (2.4.2.8)$$

dove

$$k_{xqp} = k_{ix} + (\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{N} \quad (2.4.2.9a)$$

$$k_{(1,2)zqp} = \sqrt{k_{(1,2)}^2 - k_{xqp}^2}; \quad (2.4.2.9b)$$

Sia  $\mathbf{l} \equiv (\mathbf{q} + \mathbf{p})$ ; le (2.4.2.9a) - (2.4.2.9b) diventano:

$$k_{\mathbf{l}} = k_{(1,2)\mathbf{l}} = k_{ix} + \tilde{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{N} = k_1 \sin \vartheta_{1\mathbf{l}} = k_2 \sin \vartheta_{2\mathbf{l}}, \quad (2.4.2.10)$$

$$k_{\mathbf{l}} = \sqrt{k_{(1,2)}^2 - k_{\mathbf{l}}^2}, \quad (2.4.2.11)$$

in cui  $\theta_{(1,2)\mathbf{l}}$  identifica la direzione rispettivamente nel mezzo 1 e 2, mentre nella (2.4.2.10), nota anche come equazione del reticolo,  $k_{\mathbf{l}} = k_{(1,2)\mathbf{l}}$  perché  $k_{\mathbf{l}}$  è indipendente dal mezzo di propagazione.

Infine l'equazione (2.4.2.8) diventa:

$$I_{D(1,2)}^{\pm} = \sum_{\substack{p_i=-\infty \\ i=0,\dots,M-1}}^{+\infty} a_{D(1,2)\mathbf{l}}^{\pm} \exp(\mp j \mathbf{k}_{(1,2)\mathbf{l}}^{\pm} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.4.2.12)$$

in cui:

$$a_{D(1,2)\mathbf{l}}^{\pm} = -\frac{jk_{(1,2)}}{4\pi k_{(1,2)\mathbf{l}}} (\pm 1)^{m(1)} \exp(-j \tilde{\mathbf{l}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \sum_{\substack{q_i=-\infty \\ i=0,\dots,M-1}}^{+\infty} \alpha_{D,\mathbf{q}} (\pm 1)^{m(-\mathbf{q})} \exp(+j \tilde{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \quad (2.4.2.13)$$

$$\cdot \prod_{n=0}^{M-1} J_{l_n - q_n} (k_{(1,2)\mathbf{l}} a C_n V^{-Hn})$$

e

$$\mathbf{k}_{(1,2)\mathbf{l}}^{\pm} = k_{\mathbf{l}} \hat{\mathbf{x}} \pm k_{(1,2)\mathbf{l}} \hat{\mathbf{z}}. \quad (2.4.2.14)$$

### 2.4.3 Calcolo di $I_N$

In tale paragrafo ci accingiamo a calcolare  $I_N$  definito nella (2.4.1.1).

Cominciamo col notare la seguente uguaglianza:

$$dS' \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = dx' \left[ -\frac{dz'(x')}{dx'} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial z'} \right] g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (2.4.3.1)$$

Utilizzando le equazioni di Green (2.3.1.6)-(2.3.1.7) , la (2.2.1), le (2.4.4)-(2.4.6) e la (2.4.3.1) si ha:

$$I_{N(1,2)}^{\pm} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{(1,2)x} \frac{1}{k_{(1,2)z}} \exp(-j[k_{(1,2)x}x \pm k_{(1,2)z}z]). \quad (2.4.3.2)$$

$$\cdot \left\{ \sum_{\substack{q_i=-\infty \\ i=0,\dots,M-1}}^{+\infty} \alpha_{N,\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left[ k_{(1,2)x} \frac{dz'(x')}{dx'} \mp k_{(1,2)z} \right] \exp \left[ + j \left( k_{(1,2)x} - k_{ix} - \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N} \right) x' \pm j k_{(1,2)z} z' \right] \right\}$$

in cui il segno positivo va preso se stiamo calcolando i campi nella regione  $z > \max[z'(x')] = z'_M$  cosicché possiamo sostituire nell'equazione di Green  $|z - z'| = z - z'$ , mentre il segno meno va considerato se calcoliamo i campi nella regione  $z < \min[z'(x')] = z'_m$  cosicché possiamo sostituire nell'equazione di Green  $|z - z'| = -(z - z')$ . Valutiamo ora prima tale integrale:

$$I_B = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left[ k_{(1,2)x} \frac{dz'(x')}{dx'} \mp k_{(1,2)z} \right] \exp \left[ + j \left( k_{(1,2)x} - k_{ix} - \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N} \right) x' \pm j k_{(1,2)z} z' \right] =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' k_{(1,2)x} \frac{dz'(x')}{dx'} \exp \left[ + j \left( k_{(1,2)x} - k_{ix} - \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N} \right) x' \pm j k_{(1,2)z} z' \right] \mp$$

$$\mp k_{(1,2)z} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \exp \left[ + j \left( k_{(1,2)x} - k_{ix} - \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N} \right) x' \pm j k_{(1,2)z} z' \right] = I_{B1} + I_{B2}. \quad (2.4.3.3)$$

Per valutare  $I_{B1}$ , usiamo tale uguaglianza:

$$\frac{1}{k_{(1,2)z}} \frac{d}{dx'} \left[ \exp \left[ \pm j k_{(1,2)z} z' - j \left( k_{ix} + \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N} \right) x' \right] \right] =$$

$$\pm j \frac{dz'}{dx'} \left[ \exp \left[ \pm j k_{(1,2)z} z' - j \left( k_{ix} + \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N} \right) x' \right] \right] +$$

$$- \frac{k_{ix} + \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N}}{k_{(1,2)z}} \left[ \exp \left[ \pm j k_{(1,2)z} z' - j \left( k_{ix} + \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N} \right) x' \right] \right]. \quad (2.4.3.4)$$

Da cui:

$$\begin{aligned}
I_{B1} &\equiv k_{(1,2)x} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{dz'(x')}{dx'} \exp[j(k_{(1,2)x} - k_{ix} - \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N})x' \pm jk_{(1,2)z}z'] = \\
&= \mp j \frac{k_{(1,2)x}}{k_{(1,2)z}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \exp(jk_{(1,2)x}x') \frac{d}{dx'} \left\{ \exp[-j(k_{ix} + \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N})x' \pm jk_{(1,2)z}z'] \right\} \\
&\quad \pm \frac{k_{(1,2)x}}{k_{(1,2)z}} (k_{ix} + \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N}) \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \exp[j(k_{(1,2)x} - k_{ix} - \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N})x' \pm jk_{(1,2)z}z'] \\
&= I'_{B1} + I''_{B2}
\end{aligned} \tag{2.4.3.5}$$

Da cui:

$$\begin{aligned}
I'_{B1} &= \mp \sum_{\substack{p_i = -\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} (\pm 1)^{m(p)} \exp(-j\tilde{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\Phi}) \frac{k_{(1,2)x}}{k_{(1,2)z}} [k_{ix} + (\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{N}] \delta[k_{(1,2)x} - k_{ix} - (\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{N}] \\
&\quad \cdot \prod_{n=0}^{M-1} J_{p_n} (k_{(1,2)z} a C_n \nu^{-Hn})
\end{aligned} \tag{2.4.3.6}$$

Gli integrali  $I''_{B1}$  e  $I''_{B2}$  si calcolano allo stesso modo del (2.4.2.2).

$$\begin{aligned}
I''_{B1} &= \pm \frac{k_{(1,2)x}}{k_{(1,2)z}} (k_{ix} + \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N}) \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \exp[j(k_{(1,2)x} - k_{ix} - \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N})x' \pm jk_{(1,2)z}z'] = \\
&= \pm \frac{k_{(1,2)x}}{k_{(1,2)z}} (k_{ix} + \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N}) I_A
\end{aligned} \tag{2.4.3.7}$$

$$\begin{aligned}
I_{B2} &\equiv \mp k_{(1,2)z} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \exp[j(k_{(1,2)x} - k_{ix} - \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N})x' \pm jk_{(1,2)z}z'] = \\
&= \mp k_{(1,2)z} I_A
\end{aligned} \tag{2.4.3.8}$$

Infine è possibile scrivere l'integrale  $I_N$  in tale forma:

$$I_{N(1,2)}^{\pm} = \sum_{\substack{l_i = -\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} \alpha_{N(1,2),l}^{\pm} \exp(\mp j\mathbf{k}_{(1,2)l}^{\pm} \cdot \mathbf{r}) \tag{2.4.3.9}$$

dove

$$\alpha_{N(1,2),1}^{\pm} = -\frac{k_{(1,2)}^2 - k_{x1}k_{xq}}{4\pi k_{(1,2),1}^2} (\pm 1)^{m(1)} \exp(-j\tilde{\mathbf{l}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \sum_{\substack{q_i=-\infty \\ i=0,\dots,M-1}}^{+\infty} \alpha_{N,q} (\pm 1)^{m(q)} \exp(j\tilde{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\varphi})$$

$$\cdot \prod_{n=0}^{M-1} J_{l_n - q_n} (k_{(1,2),1} a C_n \nu^{-Hn}) \quad (2.4.3.10)$$

## 2.5 Valutazione analitica del campo sulla superficie e del campo diffuso e trasmesso

A questo punto le equazioni (2.4.1.5a), (2.4.1.5b), (2.4.1.5c), (2.4.1.5d) assumono tale forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_s(\mathbf{r}) = \psi_1(\mathbf{r}) - \psi_i(\mathbf{r}) = I_{N1}^+ - I_{D1}^+ = \sum_{\substack{l_i=-\infty \\ i=0,\dots,M-1}}^{+\infty} (\alpha_{N1,1}^+ - \alpha_{D1,1}^+) \exp(-j\mathbf{k}_{11}^+ \cdot \mathbf{r}) \quad z > z'_M \quad (2.5.1) \\ \psi_i(\mathbf{r}) = -I_{N1}^- + I_{D1}^- = \sum_{\substack{l_i=-\infty \\ i=0,\dots,M-1}}^{+\infty} (-\alpha_{N1,1}^- + \alpha_{D1,1}^-) \exp(+j\mathbf{k}_{11}^- \cdot \mathbf{r}) \quad z < z'_m \quad (2.5.2) \\ 0 = I_{N2}^+ - I_{D2}^+ = \sum_{\substack{l_i=-\infty \\ i=0,\dots,M-1}}^{+\infty} (\alpha_{N2,1}^+ - \alpha_{D2,1}^+) \exp(-j\mathbf{k}_{21}^+ \cdot \mathbf{r}) \quad z > z'_M \quad (2.5.3) \\ \psi_2(\mathbf{r}) = I_{N2}^- - I_{D2}^- = \sum_{\substack{l_i=-\infty \\ i=0,\dots,M-1}}^{+\infty} (\alpha_{N2,1}^- - \alpha_{D2,1}^-) \exp(+j\mathbf{k}_{21}^- \cdot \mathbf{r}) \quad z < z'_m \quad (2.5.4) \end{array} \right.$$

Queste equazioni possono essere riscritte, infine, così:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_s(\mathbf{r}) = \psi_1(\mathbf{r}) - \psi_i(\mathbf{r}) = I_{N1}^+ - I_{D1}^+ = \sum_{\substack{l_i=-\infty \\ i=0,\dots,M-1}}^{+\infty} b_1^+ \exp(-j\mathbf{k}_{11}^+ \cdot \mathbf{r}) \quad z > z'_M \quad (2.5.5) \\ \psi_i(\mathbf{r}) = -I_{N1}^- + I_{D1}^- = \sum_{\substack{l_i=-\infty \\ i=0,\dots,M-1}}^{+\infty} a_1^- \exp(+j\mathbf{k}_{11}^- \cdot \mathbf{r}) \quad z < z'_m \quad (2.5.6) \\ 0 = I_{N2}^+ - I_{D2}^+ = \sum_{\substack{l_i=-\infty \\ i=0,\dots,M-1}}^{+\infty} a_1^+ \exp(-j\mathbf{k}_{11}^+ \cdot \mathbf{r}) \quad z > z'_M \quad (2.5.7) \\ \psi_2(\mathbf{r}) = I_{N2}^- - I_{D2}^- = \sum_{\substack{l_i=-\infty \\ i=0,\dots,M-1}}^{+\infty} b_1^- \exp(+j\mathbf{k}_{21}^- \cdot \mathbf{r}) \quad z < z'_m \quad (2.5.8) \end{array} \right.$$

in cui si è posto:

$$\begin{cases} b_1^+ = \alpha_{N1,1}^+ - \alpha_{D1,1}^+ & (2.5.9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^- = -\alpha_{N1,1}^- + \alpha_{D1,1}^- & (2.5.10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^+ = \alpha_{N2,1}^+ - \alpha_{D2,1}^+ & (2.5.11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1^- = \alpha_{N2,1}^- - \alpha_{D2,1}^- & (2.5.12) \end{cases}$$

Come si può notare dalle (2.5.5),(2.5.6),(2.5.8), i campi diffuso, incidente e trasmesso sono stati espressi come sovrapposizione di modi di Floquet.

Cerchiamo ora di dare un'espressione piu' chiara dei coefficienti di ampiezza dei campi incidente, diffuso e trasmesso definiti nelle (2.5.9),(2.5.10),(2.5.11),(2.5.12). Innanzitutto cominciamo ad isolare i termini non noti dovuti ai coefficienti dell'espansione in serie di Fourier del campo sulla superficie dipendenti chiaramente da  $\mathbf{q}$ , mettendoli in queste nuove variabili  $\alpha'_{D,\mathbf{q}}$  e  $\alpha'_{N,\mathbf{q}}$ :

$$\alpha'_{D,\mathbf{q}} = -\frac{j}{4\pi} \alpha_{D,\mathbf{q}} \exp(j\tilde{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\Phi}) \quad (2.5.13),$$

$$\alpha'_{N,\mathbf{q}} = \frac{1}{4\pi} \alpha_{N,\mathbf{q}} \exp(j\tilde{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\Phi}) \quad (2.5.14)$$

mentre i coefficienti noti possono essere così espressi:

$$Q_{D(1,2),\mathbf{q}}^\pm = (\pm 1)^{m(1)} (\pm 1)^{m(\mathbf{q})} \frac{k_{(1,2)}}{k_{(1,2)\pm}} \exp(-j\tilde{\mathbf{l}} \cdot \boldsymbol{\Phi}) \prod_{n=0}^{M-1} J_{l_n - q_n}(k_{(1,2)\pm}) a C_n v^{-H_n} \quad (2.5.15)$$

$$Q_{N(1,2),\mathbf{q}}^\pm = (\pm 1)^{m(1)} (\pm 1)^{m(\mathbf{q})} \frac{k_{(1,2)}^2 - k_{\pm} k_{xq}}{k_{(1,2)\pm}^2} \exp(-j\tilde{\mathbf{l}} \cdot \boldsymbol{\Phi}) \prod_{n=0}^{M-1} J_{l_n - q_n}(k_{(1,2)\pm}) a C_n v^{-H_n} \quad (2.5.16)$$

A questo punto i coefficienti espressi nelle (2.5.9),(2.5.10),(2.5.11),(2.5.12) possono essere messi sotto forma matriciale in questo modo:

$$\begin{cases} \mathbf{b}^+ = \mathbf{Q}_{N1}^+ \cdot \boldsymbol{\alpha}'_N - \mathbf{Q}_{D1}^+ \cdot \boldsymbol{\alpha}'_D & (2.5.17) \\ \mathbf{a}^- = \mathbf{Q}_{N1}^- \cdot \boldsymbol{\alpha}'_N + \mathbf{Q}_{D1}^- \cdot \boldsymbol{\alpha}'_D & (2.5.18) \\ \mathbf{0} = \mathbf{Q}_{N2}^+ \cdot \boldsymbol{\alpha}'_N - \eta \mathbf{Q}_{D2}^+ \cdot \boldsymbol{\alpha}'_D & (2.5.19) \\ \mathbf{b}^- = \mathbf{Q}_{N2}^- \cdot \boldsymbol{\alpha}'_N - \eta \mathbf{Q}_{D2}^- \cdot \boldsymbol{\alpha}'_D & (2.5.20) \end{cases}$$

Cominciamo col notare che, essendo il campo incidente un'onda piana (vedi eq.(2.3.1.5)), i coefficienti  $a_1^-$  nell'equazione (2.5.10) sono tutti nulli tranne quelli identificati dal vettore  $\mathbf{l}=\mathbf{0}$  che sono pari ad A.

A questo punto il primo membro della (2.5.10) è noto, per cui risolvendo il sistema dato dalla combinazione tra la (2.5.10) e la (2.5.11):

$$\begin{cases} \mathbf{a}^- = \mathbf{Q}_{N1}^- \cdot \boldsymbol{\alpha}'_N + \mathbf{Q}_{D1}^- \cdot \boldsymbol{\alpha}'_D \\ \mathbf{0} = \mathbf{Q}_{N2}^+ \cdot \boldsymbol{\alpha}'_N - \eta \mathbf{Q}_{D2}^+ \cdot \boldsymbol{\alpha}'_D \end{cases}$$

si ricavano tali coefficienti in funzione del campo incidente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}'_N = \eta \mathbf{Q}_{N2}^+{}^{-1} \mathbf{Q}_{D2}^+ \cdot \boldsymbol{\alpha}'_D & (2.5.21) \\ \boldsymbol{\alpha}'_D = \mathbf{W}_1^{-1}(\eta) \cdot \mathbf{a}^- & (2.5.22) \end{cases}$$

con

$$\mathbf{W}_1(\eta) = \mathbf{Q}_{N1}^- \cdot \eta \mathbf{Q}_{N2}^+{}^{-1} \mathbf{Q}_{D2}^+ + \mathbf{Q}_{D1}^- \quad (2.5.23)$$

A questo punto è facile ricavare gli altri coefficienti andando semplicemente a sostituire nelle equazioni (2.5.9) e (2.5.12), ricavando:

$$\begin{cases} \mathbf{b}^+ = \left\{ \mathbf{Q}_{N1}^+ \cdot \eta \mathbf{Q}_{N2}^+{}^{-1} \mathbf{Q}_{D2}^+ - \mathbf{Q}_{D1}^+ \right\} \cdot \boldsymbol{\alpha}'_D = \mathbf{W}_2(\eta) \cdot \mathbf{W}_1^{-1}(\eta) \cdot \mathbf{a}^- & (2.5.24) \\ \mathbf{b}^- = \left\{ \eta \mathbf{Q}_{D2}^- + \mathbf{Q}_{N2}^- \cdot \eta \mathbf{Q}_{N2}^+{}^{-1} \mathbf{Q}_{D2}^+ \right\} \cdot \boldsymbol{\alpha}'_D = \mathbf{W}_3(\eta) \cdot \mathbf{W}_1^{-1}(\eta) \cdot \mathbf{a}^- & (2.5.25) \end{cases}$$

in cui:

$$\mathbf{W}_2(\eta) = \mathbf{Q}_{N1}^+ \cdot \eta \mathbf{Q}_{N2}^{+ -1} \mathbf{Q}_{D2}^+ - \mathbf{Q}_{D1}^+ \quad (2.5.26)$$

$$\mathbf{W}_3(\eta) = \eta \mathbf{Q}_{D2}^- + \mathbf{Q}_{N2}^- \cdot \eta \mathbf{Q}_{N2}^{+ -1} \mathbf{Q}_{D2}^+ \cdot \quad (2.5.27)$$

## 2.6 Criterio di troncamento

Abbiamo trovato che i coefficienti di ampiezza del campo diffuso dipendono dalle matrici  $\mathbf{W}_1$ ,  $\mathbf{W}_2$ , e  $\mathbf{W}_3$  i cui elementi dipendono dai vettori  $\mathbf{q}$  ed  $\mathbf{l}$ , che rispettivamente evidenziano quali modi sono considerati nell'espansione del campo superficiale (vedi (2.4.5) -(2.4.6)) e quali modi vengono presi in considerazione nell'espansione del campo diffuso (vedi (2.5.1) ). Notiamo inoltre che in entrambe le espansioni, ci sono  $M$  indici  $q_i$  ed  $l_i$  che variano nell'intervallo  $(-\infty, +\infty)$ . Questa dimensione infinita delle matrici, che trae la sua origine dall'espansione infinita in serie di Fourier del campo superficiale, si scontra con i limiti computazionali. Per cui per avere un risultato numerico c'è bisogno di troncamento tali matrici, rendendole di dimensione finita. Evidenziamo allora tale criterio di troncamento e testiamo l'efficienza del metodo con delle considerazioni che di seguito riporteremo.

Cominciamo col definire che un modo è di ordine di interazione  $K$  se il vettore identificativo  $\mathbf{l}$  soddisfa la seguente relazione:

$$\sum_{i=0}^{M-1} |l_i| = K \quad (2.6.1)$$

Dal momento che gli elementi delle matrici in gioco dipendono da  $\mathbf{q}$  ed  $\mathbf{l}$ , allora nel troncarle sceglieremo gli indici scalari  $q_i$  ed  $l_i$  che soddisfano le seguenti relazioni:

$$\sum_{i=0}^{M-1} |l_i| \leq K_{\max} \quad (2.6.2)$$

$$\sum_{i=0}^{M-1} |q_i| \leq K_{\max} \cdot \quad (2.6.3)$$

A tale scopo viene utilizzato un metodo che, oltre a testare l'efficienza del modello considerato, ci fornisce anche un criterio di troncamento e si basa su considerazioni di carattere energetico.

Indichiamo con  $e$  la somma, normalizzata al campo incidente, della potenza diffusa e trasmessa:

$$e = \frac{1}{|A|^2 \cos \theta_i} \left( \sum_{l=1}^{N_p} |b_l^+|^2 \cos \theta_{1l} + \chi \sum_{l=1}^{N_T} |b_l^-|^2 \cos \theta_{2l} \right) \quad (2.6.4)$$

in cui

$$\chi = \begin{cases} \zeta_1 / \zeta_2 = \sqrt{\frac{\mu_1 / \mu_2}{\epsilon_{r1} / \epsilon_{r2}}}, & TE \\ \zeta_2 / \zeta_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1} / \epsilon_{r2}}{\mu_1 / \mu_2}}, & TM \end{cases} \quad (2.6.5)$$

dove  $\zeta_1, \zeta_2$  indicano le impedenze caratteristiche rispettivamente dei mezzi 1 e 2,  $N_b$  è il numero di modi di ordine più piccolo od uguale a  $K_{\max}$ ,  $N_p$  ( $N_p < N_b$ ) è il numero di modi che si propagano nel mezzo superiore e  $N_T$  ( $N_T < N_b$ ) è il numero di modi che si propagano nel mezzo dielettrico inferiore.

Le dimensioni delle matrici sono descritte nella tabella I.

Tabella I: Dimensioni delle matrici

Matrice	Dimensione	Matrice	Dimensione
$\mathbf{Q}_{D1}^+$	$N_p \times N_b$	$\mathbf{Q}_{D2}^+$	$N_b \times N_b$
$\mathbf{Q}_{D1}^-$	$N_b \times N_b$	$\mathbf{Q}_{D2}^-$	$N_T \times N_b$
$\mathbf{Q}_{N1}^+$	$N_p \times N_b$	$\mathbf{Q}_{N2}^+$	$N_b \times N_b$
$\mathbf{Q}_{N1}^-$	$N_b \times N_b$	$\mathbf{Q}_{N2}^-$	$N_T \times N_b$

La legge della conservazione dell'energia sarà soddisfatta se  $e=1$ . Per cui supponendo per ipotesi di accettare un errore dell' 1% nel calcolo del parametro  $e$ , il criterio adottato così si configura:

$$\left\{ \begin{array}{l} |e_k - e_{k-1}| < 0.01, \\ |e - 1| < 0.01, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.6.6) \\ (2.6.7) \end{array}$$

in cui la (2.6.6) è il criterio di convergenza, mentre la (2.6.7) assicura che  $e$  converga all'esatto valore.

E' interessante notare inoltre che per una funzione di Bessel di argomento  $x$  ed indice  $n$ , è possibile trascurare, per  $x$  reale, tutti i termini per i quali  $n > x$ . Questa osservazione ci porta ad affermare che, considerando le (2.5.15) – (2.5.16) e simili, solo gli indici  $q_i$  ed  $l_i$  che soddisfano la relazione

$$|q_i - l_i| < k_{\text{a}} a C_n v^{-Hn} \quad (2.6.8)$$

contribuiscono alla formazione di un modo. Si noti che argomento reale significa avere  $k_{\text{a}}$  reale e cioè un modo che si propaga. L'assunzione di argomento reale per la funzione di Bessel è giustificato dal fatto che a noi interessa il campo diffuso e la potenza diffusa, per il cui calcolo i modi evanescenti possono non essere presi in considerazione. Si osservi inoltre che per bassa rugosità, la (2.6.8) è soddisfatta poche volte, mentre per elevata rugosità la (2.6.8) è soddisfatta da una piu' ampia gamma di modi. Questo ci porta a concludere che, eccetto per superfici molto rugose, le matrici che compaiono nell' espansione del campo diffuso sono sparse.

## 2.7 Valutazione dell'efficienza del metodo

In tale paragrafo mostreremo come al crescere di  $K_{\text{max}}$  il criterio di troncamento presentato nel paragrafo precedente risulta efficiente, nel senso che il parametro  $e$  si avvicina al valore unitario desiderato, evidenziando l'influenza sui diagrammi

di irradiazione dei modi che si vengono a creare all'aumentare dell'ordine di interazione.

Per verificare tutto ciò ci metteremo nella situazione in cui il mezzo 1 sia il vuoto e il mezzo 2 sia un dielettrico omogeneo con costante dielettrica  $\epsilon_r$ , mentre le permeabilità saranno uguali. Queste considerazioni, congiuntamente con l'ipotesi di considerare come campo incidente un'onda piana polarizzata linearmente lungo l'asse y ed ortogonalmente al piano di incidenza (la qual cosa implica che nelle varie espressioni che coinvolgono la polarizzazione dobbiamo prendere quelle per il caso TE), ci conducono a tali espressioni:

$$\eta = 1,$$

$$\chi = \sqrt{\epsilon_r},$$

$$e = \frac{1}{|A|^2 \cos \theta_i} \left( \sum_{l=1}^{N_p} |b_l^+|^2 \cos \theta_{1l} + \sqrt{\epsilon_r} \sum_{l=1}^{N_r} |b_l^-|^2 \cos \theta_{2l} \right).$$

### 2.7.1 Esempi dimostrativi dell'efficienza del metodo

In prima analisi prendiamo in considerazione il ruolo svolto dal parametro  $\nu$ .

Tabella II: Superfici usate negli esempi numerici

	$L[m]$	$a[m]$	$H$	$\nu$	$\epsilon_r$	M
Superficie 1	10	0.1	0.7	123e	4	1
Superficie 2	10	0.1	0.7	7e	4	2
Superficie 3	10	0.1	0.7	3e	4	3
Superficie 4	5	0.03	0.7	e	4	5

Consideriamo prima un  $\nu$  molto elevato (superficie 1) in modo che in base alla (1.5.4) il numero di toni è pari a 1 e quindi il profilo è perfettamente sinusoidale.

Osserviamo preliminarmente che tutti i diagrammi che mostreremo non sono altro che delle singole realizzazioni di un processo aleatorio, dal momento che nella descrizione del profilo superficiale compaiono dei coefficienti in generale aleatori. Supponiamo che  $\lambda = 0.5m$  e  $\vartheta_i = \pi/6$  per tutte le superfici che considereremo.

Innanzitutto ci aspettiamo che al crescere di  $K_{\max}$  la potenza totale calcolata converga all'unità. Ed infatti per  $K_{\max}=3$  la convergenza è più veloce che nel caso di  $K_{\max}=1$ . Inoltre per  $K_{\max}=1$ , guardando il diagramma di irradiazione di Fig. 2.7.1 si nota il tipico comportamento di una superficie periodica; infatti presenta sia una forma di tipo "sinc", dovuta al fatto che la superficie considerata è periodica ma finita (mentre una superficie periodica infinita presenta un diagramma di tipo delta di Dirac) sia una struttura risonante. Inoltre, come ci aspettavamo, essendo il profilo molto piatto, il diagramma presenta un massimo proprio nella direzione speculare. La stessa cosa accade in Fig. 2.7.2 in cui è presentato il diagramma per  $K_{\max}=3$ . Si può subito notare rispetto al diagramma di Fig. 2.7.1 la presenza di un numero di modi maggiore. Pur tuttavia il diagramma conserva una forma di tipo "sinc" e una struttura risonante. A questo punto non conviene aumentare l'ordine di interazione dal momento che il parametro  $e$  per  $K_{\max}=3$  soddisfa pienamente il criterio (2.6.7). Per suffragare ciò mostriamo i risultati nella tabella III sottostante, in cui sono riportati i valori delle potenze fino a  $K_{\max}=5$ .

Tabella III: Valori delle potenze per la superficie 1

$K_{\max}$	$N_b$	$N_p$	$N_t$	$P_r$	$P_t$	$e$
1	3	3	3	0.119388	0.854737	0.974124
3	7	7	7	0.145572	0.853813	0.999384
4	9	9	9	0.146122	0.853845	0.999967
5	11	11	11	0.146152	0.853847	0.999999

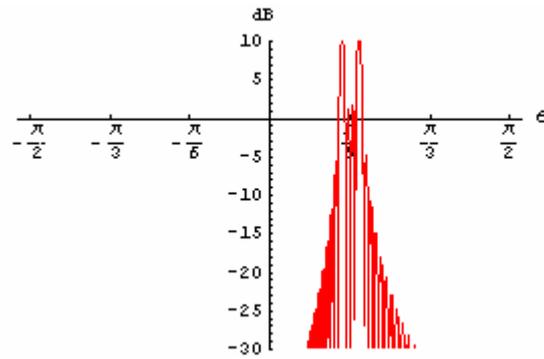


Fig.2.7.1:Diagramma per  $K_{max}=1$  e superficie 1

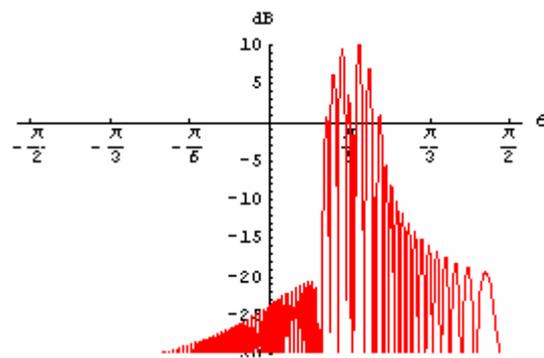


Fig.2.7.2:Diagramma per  $K_{max}=3$  e superficie 1

Se scegliamo un  $\nu$  piu' basso (superficie 2), in accordo con la (1.5.4) il numero di toni è pari a 2. Anche in tal caso per  $K_{max}=3$  il parametro  $e$  si avvicina all'unità e quindi ci fermiamo a tale ordine di interazione. A tal riguardo si osservi la tabella IV.

Tabella IV: Valori delle potenze per la superficie 2

$K_{max}$	$N_b$	$N_p$	$N_t$	$P_r$	$P_t$	$e$
1	5	4	5	0.153299	0.828338	0.981637
3	25	12	20	0.143551	0.855754	0.999306
4	41	16	28	0.144285	0.85567	0.999955
5	61	20	36	0.144331	0.855667	0.999998

Guardando i diagrammi di irradiazione, la struttura risonante è ancora presente. In Fig. 2.7.3 viene mostrato il diagramma per  $K_{\max}=1$  in cui è possibile notare il contributo del primo tono identificato dal vettore  $\mathbf{l}$  che presenta il primo indice diverso da zero, e il contributo del secondo tono caratterizzato dal vettore  $\mathbf{l}$  il secondo indice non nullo. Il contributo della loro interazione viene mostrato nel diagramma di Fig. 2.7.4 in cui viene rappresentato il diagramma per  $K_{\max}=3$ .

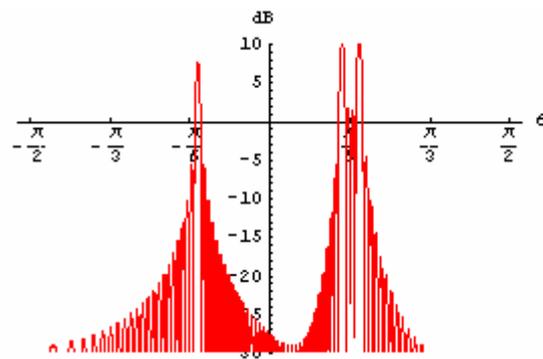


Fig.2.7.3:Diagramma per  $K_{\max}=1$  e superficie 2

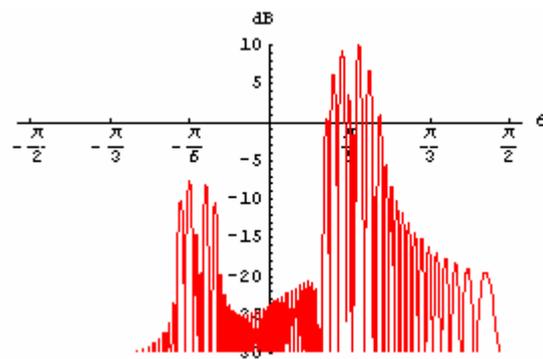


Fig.2.7.4:Diagramma per  $K_{\max}=3$  e superficie 2

Prendiamo un  $\nu$  ancora più basso (superficie 3), in accordo con la (1.5.4) il numero di toni sarà 3. Anche in questo caso per le stesse considerazioni fatte precedentemente l'ordine di interazione cui ci fermiamo è 3 (vedi tabella V). La novità rispetto ai casi precedenti è che per  $K_{\max}=5$  si verifica il mal-condizionamento (*IC* acronimo per *ill-conditioned*).

Tabella IV: Valori delle potenze per la superficie 2

$K_{max}$	$N_b$	$N_p$	$N_t$	$P_r$	$P_t$	$e$
1	7	5	5	0.111627	0.838515	0.950141
3	63	21	25	0.142797	0.856217	0.999014
4	129	31	41	0.144231	0.855612	0.999842
5 IC	231	40	62	0.14432	0.85566	0.999986

In entrambi i diagrammi di Fig. 2.7.5 e Fig. 2.7.6 si notano il contributo del tono fondamentale, del secondo, del terzo e della loro interazione. Tuttavia la struttura risonante comincia a scomparire. Questo comportamento c'era da aspettarselo dal momento che, riducendo  $\nu$ , la WM bene approssima un fBm il cui spettro tende ad avvicinarsi a quello delle superfici naturali che, come noto, non esibiscono un comportamento risonante.

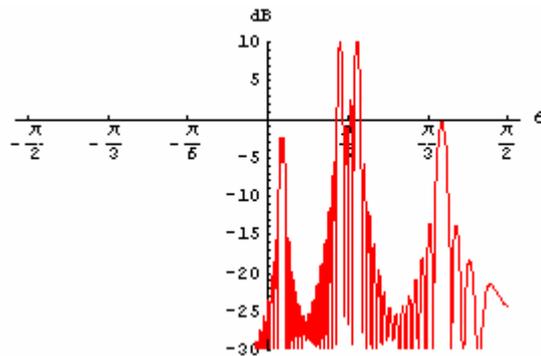


Fig.2.7.5:Diagramma per  $K_{max}=1$  e superficie 3

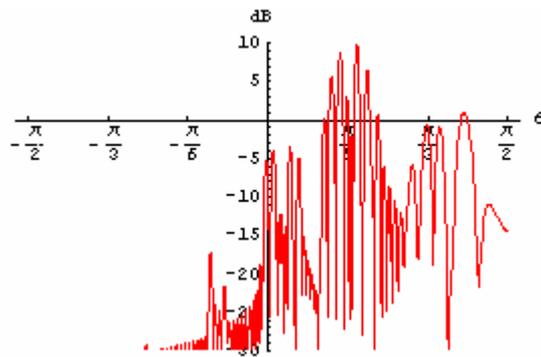


Fig.2.7.6:Diagramma per  $K_{max}=3$  e superficie 3

I diagrammi rappresentati in questo paragrafo non sono altro che dei semplici esempi per verificare che i risultati ottenuti siano coerenti con la teoria. Infatti come ci aspettavamo, al crescere dell'ordine di interazione il campo diffuso si sparpaglia sempre piu' e le potenze, diffusa e trasmessa, aumentano.

## 2.8 Esempi numerici

In tale paragrafo mostreremo alcune applicazioni del metodo finora descritto, presentando varie situazioni ottenute al variare dei parametri del profilo superficiale. Consideriamo la superficie 4 per il nostro studio e facciamone variare sia i parametri dielettrici che quelli geometrici.

Vediamo cosa succede al variare della permittività  $\epsilon_r$ .

Studiamo 3 casi possibili:

- $\epsilon_r = 4$  (terreno asciutto);
- $\epsilon_r = 16$  (terreno umido);
- $\epsilon_r = 80$  (acqua).

Come ci aspettavamo dalla (2.6.4), c'è una dipendenza della potenza diffusa da  $\epsilon_r$ . Infatti al crescere di  $\epsilon_r$  cresce la potenza diffusa. Inoltre la variazione di  $\epsilon_r$  non provoca un cambiamento della forma del diagramma di irradiazione ( vedi Fig. 2.8.1,2,3), ma solo un cambiamento nell' ampiezza.

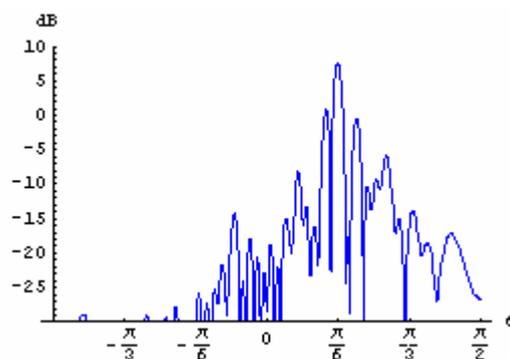


Fig.2.8.1:Diagramma per  $\epsilon_r = 4$

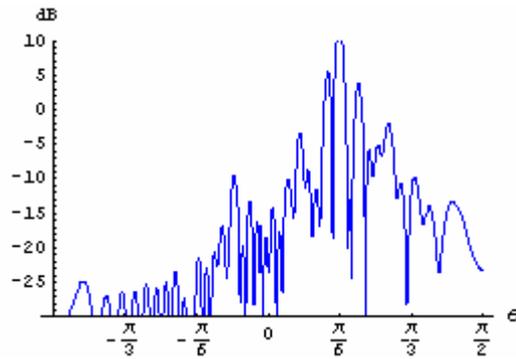


Fig.2.8.2:Diagramma per  $\varepsilon_r=16$

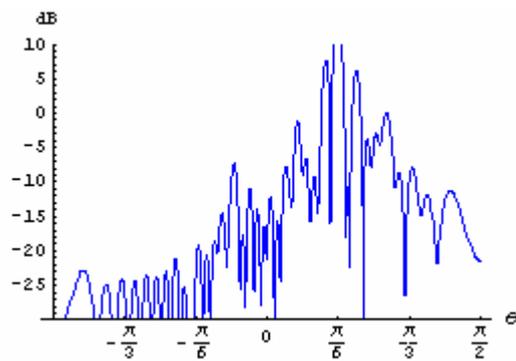


Fig.2.8.3:Diagramma per  $\varepsilon_r=80$

Molto interessante è vedere cosa succede al variare del coefficiente di Hurst  $H$ . Prenderemo in esame tre situazioni relative a tali valori di  $H$ :

- $H = 0.3$ ;
- $H = 0.7$ ;
- $H = 0.9$ .

Innanzitutto, ricordando dalla (1.5.1) che le ampiezze dei toni sono spaziate secondo una legge  $\nu^{-Hn}$ , al crescere di  $H$  diventa sempre più dominante il tono fondamentale, mentre viceversa al diminuire di  $H$ , e quindi al crescere della dimensione frattale, il diagramma è più largo e meglio distribuito. Per rendersene conto basti notare i diagrammi di Fig.2.8.4,5,6,7.

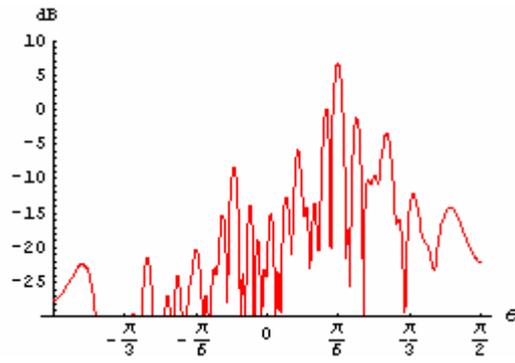


Fig.2.8.4:Diagramma per  $H=0.3$

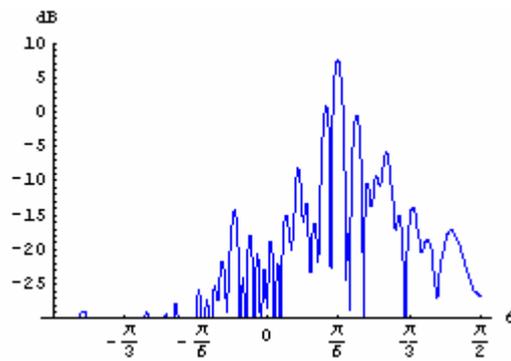


Fig.2.8.5:Diagramma per  $H=0.7$

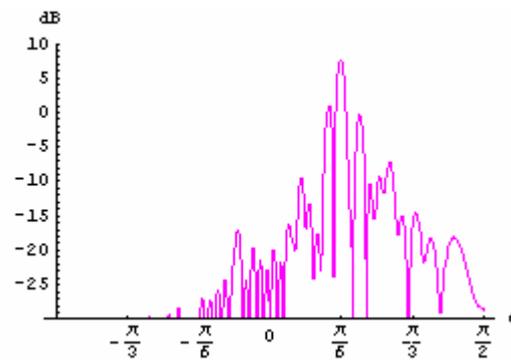
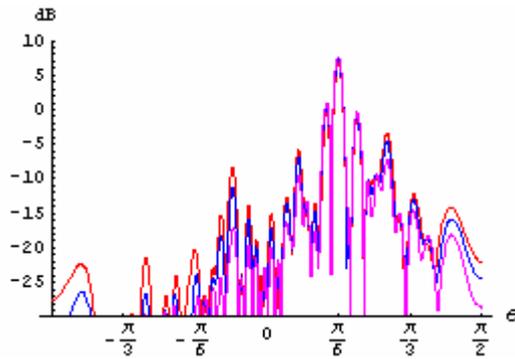


Fig.2.8.6:Diagramma per  $H=0.9$



$H$	Colore
0.3	rosso
0.7	blu
0.9	viola

Fig.2.8.7: Sovrapposizione dei diagrammi

Inoltre, dal momento che  $H$  agisce sul rapporto tra i gruppi di modi che formano il diagramma, una variazione di  $H$  provoca solo una traslazione rigida di tutto il gruppo verso l'alto o verso il basso, contrariamente al caso in cui abbiamo una variazione del parametro  $a$ . Analizziamo allora cosa succede al variare di  $a$ . Tale parametro, come  $H$ , è un indice di rugosità della superficie. Se  $a$  è basso, il tono fondamentale è troppo basso, per cui la superficie non è molto differente da un piano, per cui il diagramma d'irradiazione presenterà il massimo nella direzione speculare. All'aumentare di  $a$ , anche gli altri toni contribuiscono al campo diffuso. A tal proposito notiamo i diagrammi di Fig.2.8.8,9,10,11, per differenti valori di  $a[m]$  ( $a = 0.01, 0.03, 0.05$ ). Dalla (1.5.1) si può notare che  $a$  agisce su tutti i toni, nel senso che, decrescendo  $a$ , saranno abbattuti tutti i toni. Quindi a differenza di  $H$ , che è legato all'involuppo del diagramma,  $a$  cambia il rapporto tra i modi di un gruppo.

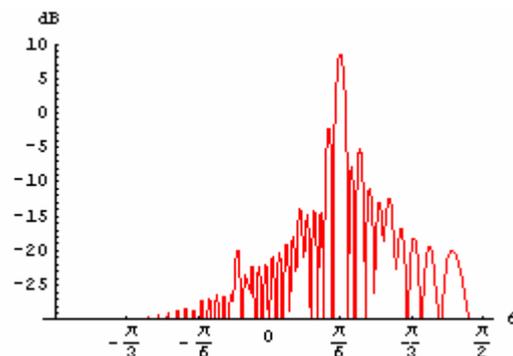


Fig.2.8.8: Diagramma per  $a=0.01$

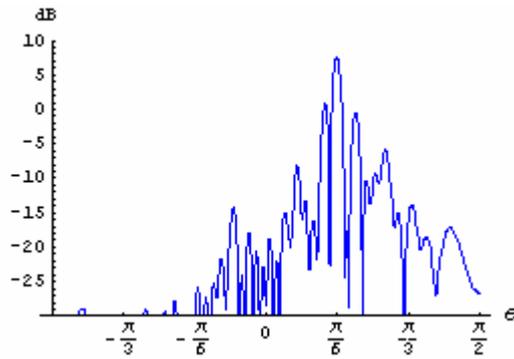


Fig.2.8.9:Diagramma per  $a=0.03$

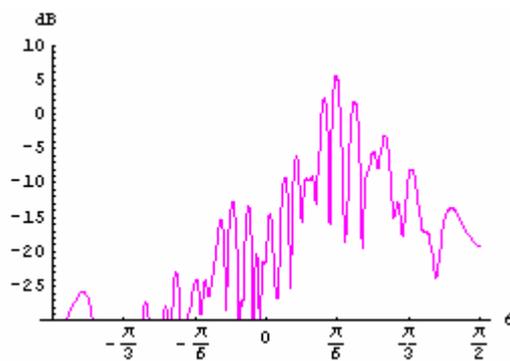
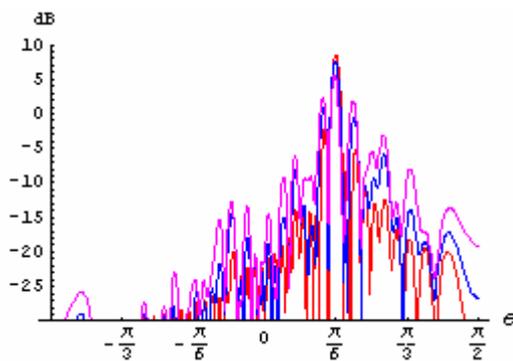


Fig.2.8.10:Diagramma per  $a=0.05$



$a[m]$	Colore
0.01	rosso
0.03	blu
0.05	viola

Fig.2.9.1:Sovrapposizione dei diagrammi

Valutiamo ora cosa accade al variare dell'angolo di incidenza  $\vartheta_i$ . I casi più interessanti da studiare sono quelli di incidenza radente, cioè  $\vartheta_i = 0, \vartheta_i = \pi/2$ . Infatti per  $\vartheta_i = 0$ , circa il 90% della potenza viene trasmessa, mentre per  $\vartheta_i = \pi/2$

piu' dell'80% della potenza viene diffusa. Inoltre come ci aspettiamo, per  $\vartheta_i = \pi/2$  il diagramma risulta essere proprio una "sinc" (il modulo, in realtà). A tal riguardo esaminare i diagrammi riportati in Fig.2.8.12,13,14 per  $\vartheta_i = 0, \vartheta_i = \pi/6, \vartheta_i = \pi/2$ .

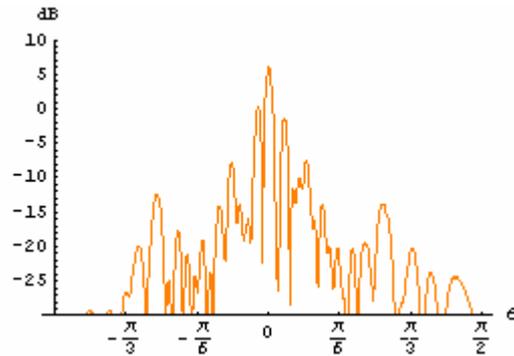


Fig.2.8.12:Diagramma per  $\vartheta_i = 0.01$

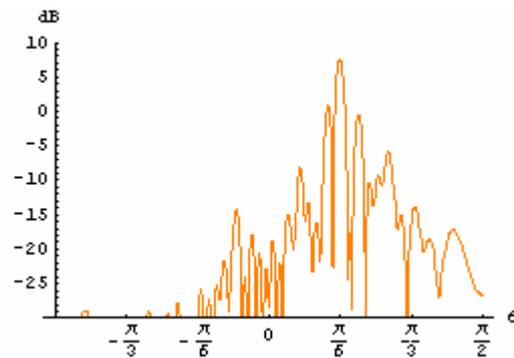


Fig.2.8.13:Diagramma per  $\vartheta_i = \pi/6$

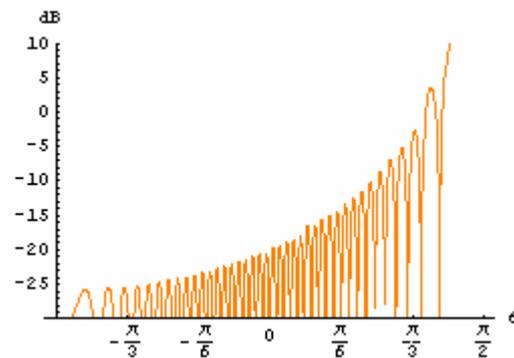


Fig.2.8.14:Diagramma per  $\vartheta_i = \pi/2$

In ultima analisi esaminiamo il comportamento al variare dell'area illuminata  $L$ . Come ci aspettavamo, al crescere di  $L$  il diagramma diventa sempre piu' piccato e ciò è dovuto al fatto che per un'area illuminata al limite infinita, il diagramma è una delta di Dirac. A tal riguardo basti ispezionare i diagrammi riportati nelle Fig.2.8.15,2.8.16,2.8.17, per  $L=5,10,50$ .

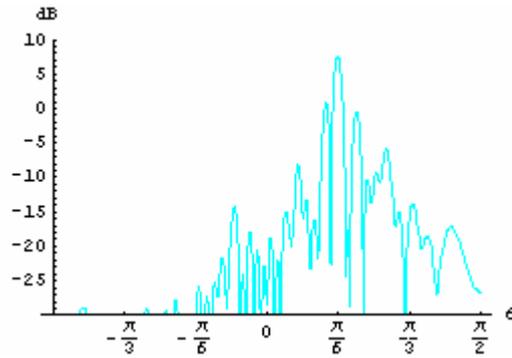


Fig.2.8.15:Diagramma per  $L=5$

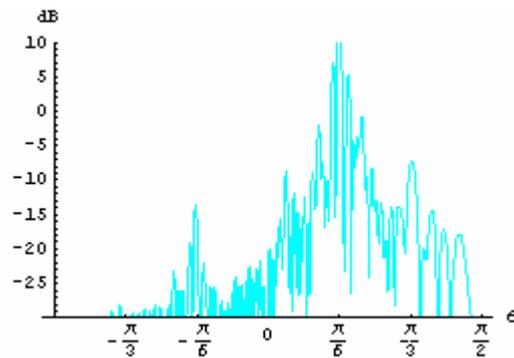


Fig.2.8.16:Diagramma per  $L=10$

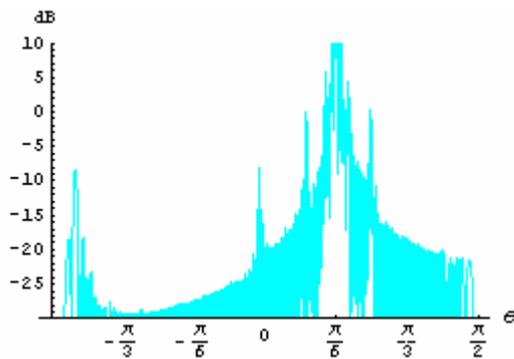


Fig.2.8.17:Diagramma per  $L=50$

La tabella seguente mostra i risultati ottenuti al variare dei parametri in gioco:

Tabella VI: Potenza riflessa e trasmessa per la superficie 4,  
e per  $H, \varepsilon_r, \vartheta_i, L$  ed  $a$  varianti

L[m]	$\varepsilon_r$	H	a[m]	$\vartheta_i[rad]$	$P_r$	$P_t$
5	4	0.7	0.03	$\pi/6$	0.144752	0.855247
5	16	0.7	0.03	$\pi/6$	0.409125	0.590240
5	80	0.7	0.03	$\pi/6$	0.675600	0.201888
5	4	0.3	0.03	$\pi/6$	0.131443	0.868657
5	4	0.5	0.03	$\pi/6$	0.141771	0.858232
5	4	0.9	0.03	$\pi/6$	0.145626	0.854373
5	4	0.7	0.01	$\pi/6$	0.145769	0.854231
5	4	0.7	0.05	$\pi/6$	0.142725	0.857252
5	4	0.7	0.03	0.01	0.110442	0.889558
5	4	0.7	0.03	$\pi/2.1$	0.838292	0.161707
10	4	0.7	0.03	$\pi/6$	0.145524	0.854475
50	4	0.7	0.03	$\pi/6$	0.145844	0.854154

## 2.9 Analisi della convergenza

In tale paragrafo evidenzieremo uno svantaggio del metodo usato che alla fine ne restringe i limiti di validità.

Come abbiamo già notato nel paragrafo **2.6**, i modi con  $k_{z1}$  reale che contribuiscono al campo diffuso sono quelli che soddisfano la relazione (2.6.8). Il “difetto” del metodo nasce per superfici molto rugose. Infatti in tal caso  $k_{z1}$ , e di conseguenza l'intero argomento delle funzioni di Bessel, è molto grande. Inoltre i modi evanescenti presentano un  $k_{z1}$  immaginario e quindi pure l'argomento della funzione di Bessel sarà immaginario. In tali condizioni, essendo la funzione di Bessel ad argomento immaginario molto sensibile a piccoli cambiamenti del proprio argomento, il range di variazione delle ampiezze dei modi sarà molto

elevato, per cui il rapporto tra il piu' grande e il piu' piccolo autovalore delle matrici da invertire è talmente elevato che può portare a dei risultati molto diversi da quelli che ci aspetteremmo e quindi non corretti. Notiamo inoltre che tale problema ha una sua ragione fisica ed è perciò inevitabile. Cerchiamo di darne una spiegazione. L'equazione matriciale (2.5.19), per come è stata derivata, equivale alla (2.3.1.3) solo per  $z > \max[z'(x')] = z'_M$ . Ma ricordando che nel dominio dei fasori i campi sono analitici, allora avere un campo nullo nella regione  $z > \max[z'(x')] = z'_M$  è equivalente ad avere un campo nullo anche nella regione  $z'(x') < z < \max[z'(x')]$ . Il problema nasce nel momento in cui effettuiamo il troncamento sulle matrici. In tal caso il campo non sarà piu' nullo ma approssimativamente nullo nella regione  $z > \max[z'(x')] = z'_M$  dal momento che stiamo trascurando alcuni modi nel calcolo del campo totale. Ora il tutto dipende dalla rugosità del profilo superficiale. Se è bassa, allora si commetterà un errore piccolo nel considerare approssimativamente nullo il campo anche nella regione  $z'(x') < z < \max[z'(x')]$ , altrimenti, se è elevata, l'errore che si commetterà non sarà piu' trascurabile, dal momento che possono esserci significativi campi nella regione  $z'(x') < z < \max[z'(x')]$  che possono condurre a una valutazione errata. La stessa cosa accade per l'equazione matriciale (2.5.18) del tutto equivalente alla (2.3.1.2) per  $z < \min[z'(x')] = z'_m$  e non per  $z < z'(x')$ . A tal proposito abbiamo fatto uno studio riportato nelle tabelle VII, VIII e IX, in cui per 3 fissate frequenze (600Mhz, 900Mhz, 1200Mhz), per 3 fissati coefficienti di Hurst ( $H = 0.5, 0.7, 0.9$ ) e per la superficie 4, è stato valutato il relativo parametro di rugosità  $a$  in corrispondenza del quale inizia a manifestarsi il problema IC.

Si può notare che, ad una data frequenza, al crescere di  $H$  aumenta anche  $a$ , coerentemente con l'argomento delle funzioni di Bessel in cui il parametro di rugosità è  $\frac{a}{\lambda \cdot \nu^{Hn}}$ .

Cominciamo col notare che tali valori sono stati calcolati adottando la precisione di default del software *Mathematica 5.0* usato per le simulazioni, che è pari a 16,

dove, fissato un numero  $x$  e la sua incertezza assoluta  $dx$ , per precisione si intende la quantità  $-\text{Log}_{10}\left(\frac{dx}{|x|}\right)$ . Quindi la precisione non è altro che una misura dell'incertezza relativa del valore considerato e praticamente definisce l'effettivo numero di cifre significative del numero stesso.

Tabella VII

	$f[\text{MHz}]$	$P_s$	$P_T$	$e$	$a[m]$	Precisione	Tempo[minuti]
$H = 0.5$	600	0.134394	0.865854	1.000250	0.051	16	$\approx 2$
$H = 0.7$	600	0.140892	0.859052	0.999904	0.062	16	$\approx 2$
$H = 0.9$	600	0.143971	0.855711	0.999682	0.071	16	$\approx 2$

Tabella VIII

	$f[\text{MHz}]$	$P_s$	$P_T$	$e$	$a[m]$	Precisione	Tempo[minuti]
$H = 0.5$	900	0.143132	0.856873	1.000005	0.020	16	$\approx 5$
$H = 0.7$	900	0.145014	0.854983	0.999997	0.024	16	$\approx 5$
$H = 0.9$	900	0.145687	0.854307	0.999994	0.027	16	$\approx 5$

Tabella IX

	$f[\text{MHz}]$	$P_s$	$P_T$	$e$	$a[m]$	Precisione	Tempo[minuti]
$H = 0.5$	1200	0.142549	0.857460	1.000009	0.019	16	$\approx 7$
$H = 0.7$	1200	0.144879	0.855082	0.999961	0.024	16	$\approx 7$
$H = 0.9$	1200	0.145707	0.854234	0.999941	0.027	16	$\approx 7$

Poiché i “difetti” del metodo esposto nascono quando facciamo l'inversione di matrici e poiché tale operazione dipende strettamente dall'incertezza degli elementi componenti, allora è facile immaginare un legame tra il problema del mal-condizionamento e la precisione adottata per i calcoli. Per tale motivo, tramite il comando *SetPrecision* si è fissata una certa precisione in corrispondenza della

quale con i valori del parametro  $a$  esposti nelle tabelle VII, VIII e IX non si aveva mal-condizionamento e poi si è fatto variare tale parametro  $a$  in modo da calcolare il suo nuovo valore in corrispondenza del quale, a quella data precisione, si manifestava il problema del mal-condizionamento. Tutto ciò è stato fatto per tre casi:

- $H=0.5$ ,  $f=600MHz$  e superficie 4;

- $H=0.7$ ,  $f=900MHz$  e superficie 4;

- $H=0.9$ ,  $f=1200MHz$  e superficie 4.

Naturalmente, all'aumentare della precisione, i tempi di calcolo possono aumentare considerevolmente. I risultati ottenuti sono mostrati nella tabella sottostante:

Tabella X

	$f[MHz]$	$e$	Precisione	$a[m]$	Tempo[minuti]
$H=0.5$	600	1.00082	20	0.059	$\approx 9$
$H=0.7$	900	0.99995	20	0.026	$\approx 35$
$H=0.9$	1200	0.99989	20	0.029	$\approx 35$

Notiamo che passando da precisione 16 a precisione 20 nel primo caso abbiamo un aumento del fattore  $a$  del 15.7%, nel secondo un incremento del 8.3% e nel terzo caso un innalzamento del 7.4%. Se la tabella X da un lato ci conforta, dall'altro, guardando i tempi di calcolo, non può soddisfare le nostre aspettative dal momento che nel primo caso i tempi sono più che quadruplicati, nel secondo diventano sette volte più grandi e nel terzo quintuplicano.

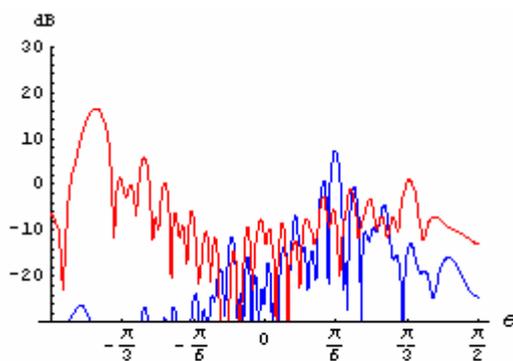
Per cercare di capire cosa succede al variare della precisione, è stato preso come esempio la superficie 4, con  $H=0.5$  ed  $f=600MHz$ . Sono stati ottenuti i risultati riportati nella tabella XI di seguito:

Tabella XI

	$H$	$f[MHz]$	$e$	$a[m]$	Tempo[minuti]
Precisione 20	0.5	600	1.00082	0.059	$\approx 9$
Precisione 25	0.5	600	1.01194	0.082	$\approx 9$
Precisione 30	0.5	600	1.51667	0.110	$\approx 10$
Precisione 100	0.5	600	273193	0.41	$\approx 11$

Osserviamo che nel passare da precisione 20 a precisione 25, i tempi di calcolo rimangono immutati mentre il parametro  $a$  aumenta del 39%, mentre nel passare da 25 a 30  $a$  si innalza del 34.1% ed il tempo di calcolo peggiora di un minuto. Ricordiamo che il problema del mal-condizionamento potrebbe portare a dei risultati erronei, in prima battuta nel calcolo delle matrici inverse ed in ultima istanza nel calcolo delle potenze.

Tale problema è visibile nel nostro caso quando assumiamo una precisione pari a 30 e successivamente pari a 100. A tal riguardo notiamo la sovrapposizione dei diagrammi di irradiazione di Fig.2.9.1 calcolati rispettivamente con i parametri delle righe 2 e 3 della tabella XI e per la superficie 4:



Parametri riga	Colore
2	blu
3	rosso

Fig.2.9.1: Sovrapposizione dei diagrammi

Si può subito evidenziare che il problema nasce nel calcolo del coefficiente del modo in corrispondenza di circa  $-\pi/2$ , dal momento che nei due casi esso viene

pesato in maniera differente ed è ciò che porta il parametro  $e$  della riga 3 della tabella VIII ad essere troppo grande e di conseguenza sbagliato. Questo significa che il calcolo delle matrici inverse è stato erroneo, per cui  $a = 0.110$  non è in realtà il primo valore cui si manifesta il mal-condizionamento. A tale scopo cerchiamo di calcolare il valore di  $a$  in corrispondenza del quale il parametro  $e$  assume dei valori più consoni alle nostre aspettative. I risultati della nostra analisi sono evidenziati nella tabella XII di seguito riportata:

Tabella XII

	$H$	$f[MHz]$	$e$	$a[m]$	Tempo[minuti]
Precisione 30	0.5	600	1.13377	0.10	$\approx 10$
Precisione 30	0.5	600	1.02623	0.090	$\approx 10$
Precisione 30	0.5	600	1.02152	0.088	$\approx 10$
Precisione 30	0.5	600	1.01606	0.085	$\approx 10$
Precisione 30	0.5	600	1.01456	0.084	$\approx 10$
Precisione 30	0.5	600	1.01319	0.083	$\approx 10$
Precisione 30	0.5	600	1.01194	0.082	$\approx 10$

Dalla tabella sopra evidenziata emerge chiaramente che il valore  $a = 0.10$  non può soddisfarci dal momento che  $e$  differisce dal valore che ci aspetteremmo del 13.4%, mentre se tolleriamo un errore compreso tra 1.2% e 2.63%, possiamo accettare un valore di  $a$  che varia tra 0.082 e 0.090. In particolare se ci soddisfa il valore  $a = 0.090$ , possiamo osservare che rispetto al calcolo con precisione 25  $a$  è aumentato del 9.76% (e non più del 34.1% che però ci conduceva a risultati errati) con un corrispettivo peggioramento di un solo minuto per i tempi di calcolo.

Lo stesso fenomeno diventa più eclatante se assumiamo come precisione 100. In tal caso, analizzando la riga 4 della tabella XI, si nota un valore eccessivo del parametro  $e$ . La ragione è identica a quella evidenziata per precisione 30. Per cui

$a = 0.41$  non risulta essere il primo valore cui si manifesta il mal-condizionamento. Svolgendo la stessa analisi fatta per precisione 30, anche per precisione 100 si ricavano gli stessi risultati della tabella XII con la differenza che il tempo di calcolo diventa di circa 11 minuti. Per cui, passando da precisione 30 a 100 e prendendo in considerazione gli effettivi valori del parametro  $a$  che ci danno dei risultati adeguati ai calcoli teorici, abbiamo solo un peggioramento dei tempi computazionali.

Queste considerazioni ci portano ad affermare che non è necessario spingerci troppo con la precisione, ma è sufficiente fermarsi a precisione 30.

I diagrammi di irradiazione sono stati ricavati usando un PC PENTIUM IV a 3 GHz con 1GByte di RAM.

## **CAPITOLO 3**

### ***Il modello EBCM applicato a superfici frattali 2-D di conduttore elettrico perfetto***

#### **3.1 Introduzione**

In tale capitolo affronteremo la diffusione da superfici frattali, considerando un profilo superficiale bidimensionale. Il modello di superficie e quello elettromagnetico sono analoghi a quelli del capitolo precedente. Ci metteremo in una situazione semplificata, in cui il profilo separa due mezzi di cui il secondo è un conduttore elettrico perfetto (c.e.p).

La trattazione analitica è analoga al caso monodimensionale, ed i risultati cui giungiamo sono altrettanto simili; infatti il campo diffuso sarà espresso come sovrapposizione di modi di Floquet, le cui direzioni sono governate dall'equazione del reticolo e le cui ampiezze vengono presentate sotto forma di matrici che hanno dimensione infinita. A tal riguardo bisognerà fissare un criterio di troncamento, che stabilirà un limite di validità del modello, che in principio può essere applicato a qualsiasi superficie, indipendentemente dalla rugosità della stessa. In tale capitolo non tratteremo di tale problema, dal momento che il criterio di troncamento è del tutto analogo a quello mostrato per il caso monodimensionale.

#### **3.2 Modello di superficie**

Il modello di superficie adottato, come già anticipato, è una funzione WM 2-D a banda limitata, nel senso che il numero di toni componenti è  $M$  e non  $\infty$  come accade per una WM matematica, essendo le superfici naturali dei frattali in un ampio ma limitato range di scale.

La descrizione analitica della superficie è data dalla (1.5.6) introdotta nel capitolo 1.

Si noti, come già accennato nel capitolo 1, che il numero di toni  $M$  dipende dalla più alta e più bassa componente spettrale, dal parametro  $\nu$  e dalla lunghezza

d'onda. Inoltre, essendo  $\nu$  un numero irrazionale, una qualsiasi superficie descritta dalla (1.5.6) non sarà mai perfettamente periodica, ma quasi-periodica. Tale proprietà risulta essere fondamentale per poter scrivere il campo diffuso come sovrapposizione di modi.

### 3.3 Modello elettromagnetico

In questo paragrafo valuteremo in maniera analitica il campo diffuso da una superficie frattale  $A$  di conduttore elettrico perfetto quando è illuminata da un campo incidente  $\mathbf{E}_i$  con direzione di propagazione  $\mathbf{k}_1$ , in accordo con la geometria rappresentata nella Fig.1.

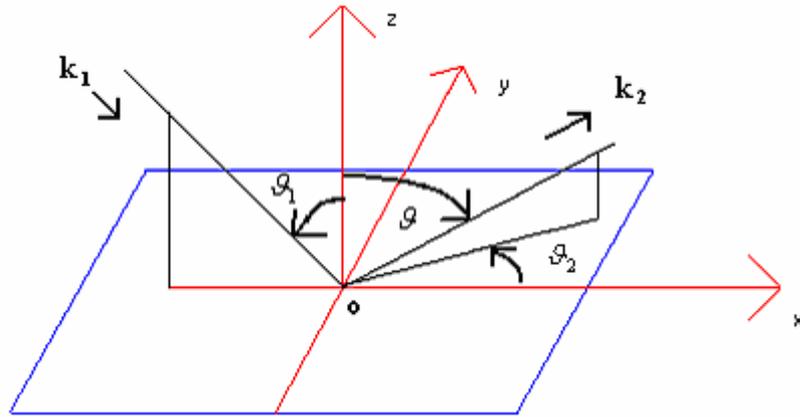


Fig.1:Geometria del problema

Un problema di tale tipo in generale è governato dalla seguente equazione integrale:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) + \iint_A \left[ j\omega\mu \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] dA = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) & z > z(x, y) \\ 0 & z < z(x, y) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

dove  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  è il campo totale,  $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  è la funzione di Green nello spazio libero avente tale espressione:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint \frac{(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})}{k_z^2} \exp[j\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] dk_x dk_y. \quad (3.3.2)$$

Iniziamo con l'osservare che l'equazione (3.3.1) evoca il *teorema dell'estinzione*, secondo il quale le sorgenti superficiali su  $A$ , nella regione  $z < z(x, y)$ , generano un campo che esattamente cancella il campo incidente, rendendo il campo totale nullo nella medesima regione. Ma se stiamo nella regione  $z > z(x, y)$ , il campo totale si scrive come somma di due contributi, uno dovuto al campo incidente e l'altro dovuto alle sorgenti superficiali su  $A$ . Questa considerazione non è altro che il *principio di Huygens*. Nel nostro caso le sorgenti superficiali sono:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \quad (3.3.3)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \quad (3.3.4)$$

Poiché nel nostro caso stiamo considerando superfici di conduttore elettrico perfetto (c.e.p), per cui  $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') = 0$ , allora la (3.3.1) si semplifica, diventando:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) + \iint_A \left[ j\omega\mu \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] dA = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) & z > z(x, y) \\ 0 & z < z(x, y) \end{cases} \quad (3.3.5)$$

per cui l'unica sorgente superficiale è:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \quad (3.3.6).$$

L'ipotesi c.e.p ci facilita anche la trattazione analitica, dal momento che il campo trasmesso e la potenza trasmessa saranno nulli.

### 3.4 Espansione del campo superficiale

A questo punto, come fatto per il caso monodimensionale, sfruttando la quasi-periodicità della Weierstrass-Mandelbrot, espandiamo in serie di Fourier il campo superficiale, per cui la (3.3.6) assume tale forma:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') = \exp[j(k_{1x}x' + k_{1y}y')] \cdot \sum_{\substack{q_i = -\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} \boldsymbol{\alpha}_q \cdot \left[ j \left( \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N}_x x' + \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N}_y y' \right) \right] \quad (3.4.1)$$

dove  $\boldsymbol{\alpha}_q$  è il vettore dei coefficienti, non noti, dell'espansione di Fourier,  $\tilde{\mathbf{q}}$  è il trasposto del vettore  $\mathbf{q}$  i cui elementi in linea di principio variano tra  $-\infty$  e  $+\infty$ ,  $k_{1x}$  e  $k_{1z}$  sono le componenti della direzione di propagazione incidente  $\mathbf{k}_1$  (in tal caso  $k_{1y}=0$ , vedi Fig.1),  $\tilde{\mathbf{N}}_x = [\kappa_0 \cos \psi_0, \kappa_0 \nu \cos \psi_1, \dots, \kappa_0 \nu^{M-1} \cos \psi_{M-1}]$ ,  $\tilde{\mathbf{N}}_y = [\kappa_0 \sin \psi_0, \kappa_0 \nu \sin \psi_1, \dots, \kappa_0 \nu^{M-1} \sin \psi_{M-1}]$ .

#### **3.4.1 Introduzione alla valutazione del campo sulla superficie**

A tale scopo l'equazione integrale (3.3.5) può essere riscritta in maniera più compatta introducendo questo integrale:

$$\mathbf{I}_D^\pm = \iint_A \left[ j \omega \mu \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] dA \quad (3.4.1.1)$$

Innanzitutto il pedice  $D$  serve per ricordarci che l'integrale assume la stessa forma di quello calcolato quando vengono imposte le condizioni di Dirichlet per conduttore elettrico perfetto, il segno  $\pm$  porta in considerazione il fatto che l'integrale di Dirichlet include la funzione di Green che deve essere valutata per  $z > \max[z(x, y)]$  e  $z < \min[z(x, y)]$ .

A questo punto le equazioni integrali possono essere così espresse:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = +\mathbf{I}_D^+ & z > z(x, y) \\ \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = -\mathbf{I}_D^- & z < z(x, y) \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.4.1.2a) \\ (3.4.1.2b) \end{matrix}$$

### 3.4.2 Calcolo dell'integrale di Dirichlet

A questo punto, sostituendo la (3.3.2) e la (3.4.1) nella (3.4.1.1), otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_D^\pm &= \iint_A dA j\omega\mu \exp[j(k_{1x}x' + k_{1y}y')] \cdot \sum_{\substack{q_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} \boldsymbol{\alpha}_q \cdot \left[ j \left( \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N}_x x' + \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N}_y y' \right) \right] \cdot \\ &\cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \iint \frac{(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})}{k_z^2} \exp[jk_x \cdot (x - x') + jk_y \cdot (y - y') + jk_z(|z - z'|)] dk_x dk_y = \\ &= \frac{j\omega\mu}{(2\pi)^3} \iint \frac{dk_x dk_y}{k_z^2} \exp[jk_x x + jk_y y \pm jk_z z] \cdot \sum_{\substack{q_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} \boldsymbol{\alpha}_q \cdot (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}) \cdot \\ &\cdot \iint_A dA \exp[-j(k_x - k_{1x} - \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N}_x)x' - j(k_y - k_{1y} - \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N}_y)y' \mp jk_z z'] \quad (3.4.2.1) \end{aligned}$$

Osserviamo innanzitutto che nella (3.4.2.1),  $|z - z'| = (z - z')$  se siamo nella regione  $z > \max[z(x, y)]$ , mentre  $|z - z'| = -(z - z')$  se siamo in  $z < \min[z(x, y)]$ .

Consideriamo ora l'integrale:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_A &= \iint_A dA \exp[-j(k_x - k_{1x} - \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N}_x)x' - j(k_y - k_{1y} - \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N}_y)y' \mp jk_z z'] = \\ &= \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} dx' dy' \exp[-j(k_x - k_{1x} - \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N}_x)x' - j(k_y - k_{1y} - \tilde{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{N}_y)y' \mp jk_z z'] \quad (3.4.2.2) \end{aligned}$$

Innanzitutto si ha:

$$\begin{aligned} \exp(\mp j k_z z') &= \exp[\mp j k_z a \sum_{n=0}^{M-1} C_n v^{-Hn} \sin[\kappa_0 v^n (x' \cos \psi_n + y' \sin \psi_n) + \phi_n]] = \\ &= \prod_{n=0}^{M-1} \exp(\mp j W \sin(B)). \end{aligned} \quad (3.4.2.3)$$

in cui si sono fatte tali posizioni:

$$\begin{cases} W = k_z a C_n v^{-Hn} \\ B = \kappa_0 v^n (\cos \psi_n x' + \sin \psi_n y') + \phi_n \end{cases}$$

Ricordando le identità di Bessel:

$$\exp(j v \sin \vartheta) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(v) \exp(j p \vartheta), \quad (3.4.2.4)$$

$$J_p(-v) = (-1)^p J_p(v), \quad (3.4.2.5)$$

si ha:

$$\begin{aligned} \exp(\mp j k_z z') &= \prod_{n=0}^{M-1} \sum_{\substack{p_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} (\mp 1)^{m(\mathbf{p})} J_{p_n}(a k_z C_n v^{-Hn}) \exp[j p [\kappa_0 v^n (x' \cos \psi_n + y' \sin \psi_n) + \phi_n]] = \\ &= \prod_{n=0}^{M-1} \sum_{\substack{p_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} (\mp 1)^{m(\mathbf{p})} J_{p_n}(a k_z C_n v^{-Hn}) \exp[j \tilde{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\phi} + j \tilde{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{N}_x x' + \mathbf{N}_y y')] = \\ &= \sum_{\substack{p_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} (\mp 1)^{m(\mathbf{p})} \exp[j \tilde{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\phi} + j \tilde{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{N}_x x' + \mathbf{N}_y y')] \cdot \prod_{n=0}^{M-1} J_{p_n}(a k_z C_n v^{-Hn}) \end{aligned} \quad (3.4.2.6)$$

in cui  $\tilde{\boldsymbol{\phi}} = [\phi_0, \dots, \phi_{M-1}]$  è il trasposto del vettore delle fasi della WM,

$$\tilde{\mathbf{p}} = [p_0, \dots, p_{M-1}], \text{ e } m(\mathbf{p}) = \sum_{n=0}^{M-1} p_n.$$

Sostituendo la (3.4.2.6) nella (3.4.2.2), otteniamo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_A &= \sum_{\substack{p_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} (\mp 1)^{m(\mathbf{p})} \exp(j \tilde{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \cdot \\
&\cdot \left[ \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} dx' dy' \exp[-j(k_x - k_{1x} - (\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{N}_x)x'] \exp[-j(k_y - k_{1y} - (\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{N}_y)y'] \right] \cdot \\
&\cdot \prod_{n=0}^{M-1} J_{p_n}(ak_z C_n \nu^{-Hn}) = \tag{3.4.2.7} \\
&= \sum_{\substack{p_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} (\mp 1)^{m(\mathbf{p})} \exp(j \tilde{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \cdot \delta[k_x - k_{1x} - (\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{N}_x] \delta[k_y - k_{1y} - (\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{N}_y] \cdot \\
&\cdot \prod_{n=0}^{M-1} J_{p_n}(ak_z C_n \nu^{-Hn})
\end{aligned}$$

Sostituendo la (3.4.2.7) nella (3.4.2.1) , abbiamo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_D^\pm &= \frac{j\omega\mu}{(2\pi)^3} \cdot \sum_{\substack{p_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} (\mp 1)^{m(\mathbf{p})} \exp(j \tilde{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \cdot \\
&\cdot \left\{ \sum_{\substack{q_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} \boldsymbol{\alpha}_q \cdot (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \cdot \frac{1}{k_{z\mathbf{p}q}^2} \cdot \exp[j(k_{x\mathbf{q}p}x + k_{y\mathbf{q}p}y) \pm jk_{z\mathbf{q}p}z] \right\} \cdot \\
&\cdot \prod_{n=0}^{M-1} J_{p_n}(ak_{z\mathbf{q}p} C_n \nu^{-Hn}) \tag{3.4.2.8}
\end{aligned}$$

in cui si sono fatte tali posizioni:

$$k_{x\mathbf{q}p} = k_{1x} + (\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{N}_x \tag{3.4.2.9}$$

$$k_{y\mathbf{q}p} = k_{1y} + (\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{N}_y \tag{3.4.2.10}$$

$$k_{z\mathbf{q}p} = \sqrt{k^2 - k_{x\mathbf{q}p}^2 - k_{y\mathbf{q}p}^2} \tag{3.4.2.11}$$

Ponendo  $\mathbf{l} \equiv \mathbf{p} + \mathbf{q}$  , le (3.4.2.9)- (3.4.2.11) diventano:

$$k_{x1} = k_{1x} + \tilde{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{N}_x = k \sin \vartheta_1 + \kappa_0 \sum_{n=0}^{M-1} l_n \cos \psi_n \cdot \nu^n \quad (3.4.2.12)$$

$$k_{y1} = k_{1y} + \tilde{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{N}_y = \kappa_0 \sum_{n=0}^{M-1} l_n \sin \psi_n \cdot \nu^n \quad (3.4.2.13)$$

$$k_{z1} = \sqrt{k^2 - k_{x1}^2 - k_{y1}^2} \quad (3.4.2.14)$$

Le equazioni (3.4.2.12)- (3.4.2.13) sono l'estensione al caso 2-D dell'equazione del reticolo.

Inoltre si hanno le seguenti uguaglianze:

$$m(\mathbf{p}) = \sum_{n=0}^{M-1} p_n = \sum_{n=0}^{M-1} (l_n - q_n) = \sum_{n=0}^{M-1} l_n - \sum_{n=0}^{M-1} q_n = m(\mathbf{l}) - m(\mathbf{q}) \quad (3.4.2.15)$$

$$(\mp 1)^{m(\mathbf{p})} = (\mp 1)^{m(\mathbf{l})} \cdot (\mp 1)^{-m(\mathbf{q})} = (\mp 1)^{m(\mathbf{l})} \cdot (\mp 1)^{m(\mathbf{q})} \quad (3.4.2.16)$$

$$\exp(j \tilde{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) = \exp(j \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \cdot \exp(-j \tilde{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \quad (3.4.2.17)$$

Ponendo, infine,

$$\mathbf{k}_1^\pm = k_{x1} \hat{\mathbf{x}} + k_{y1} \hat{\mathbf{y}} \pm k_{z1} \hat{\mathbf{z}} \quad (3.4.2.18)$$

e sostituendo dalla (3.4.2.13) alla (3.4.2.19) nella (3.4.2.9), si ricava:

$$\mathbf{I}_D^\pm = \sum_{\substack{l_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} \mathbf{B}_1^\pm \exp[\pm j \mathbf{k}_1^\pm \cdot \mathbf{r}] \quad (3.4.2.19)$$

dove:

$$\mathbf{B}_1^\pm = \frac{j\omega\mu}{(2\pi)^3 k_{z1}^2} (\mp 1)^{m(1)} \exp(j\tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \cdot \sum_{\substack{q_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} \boldsymbol{\alpha}_q \cdot (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \cdot (\mp 1)^{m(q)} \exp(-j\tilde{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \cdot \prod_{n=0}^{M-1} J_{l_n - q_n} (ak_{z1} C_n \nu^{-Hn}) \quad (3.4.2.20)$$

### 3.5 Valutazione analitica del campo sulla superficie e del campo diffuso

A questo punto le equazioni (3.4.1.2a) e (3.4.1.2b) assumono tale forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = +\mathbf{I}_D^+ = \sum_{\substack{l_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} \mathbf{B}_1^+ \exp[+j\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}] \quad z > \max[z(x, y)] \quad (3.5.1) \\ \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = -\mathbf{I}_D^- = - \sum_{\substack{l_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} \mathbf{B}_1^- \exp[-j\mathbf{k}_1^- \cdot \mathbf{r}] \quad z < \min[z(x, y)] \quad (3.5.2) \end{array} \right.$$

in cui:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}_1^+ = \frac{j\omega\mu}{(2\pi)^3 k_{z1}^2} (-1)^{m(1)} \exp(j\tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \cdot \sum_{\substack{q_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} \boldsymbol{\alpha}_q \cdot (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \cdot (-1)^{m(q)} \exp(-j\tilde{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \cdot \prod_{n=0}^{M-1} J_{l_n - q_n} (ak_{z1} C_n \nu^{-Hn}) \quad (3.5.3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}_1^- = \frac{j\omega\mu}{(2\pi)^3 k_{z1}^2} \exp(j\tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \cdot \sum_{\substack{q_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} \boldsymbol{\alpha}_q \cdot (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \cdot \exp(-j\tilde{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \cdot \prod_{n=0}^{M-1} J_{l_n - q_n} (ak_{z1} C_n \nu^{-Hn}) \quad (3.5.4) \end{array} \right.$$

Come si può notare dalle (3.5.3) e (3.5.4) sia il campo diffuso che quello incidente sono stati espressi come sovrapposizione di modi di Floquet.

Cominciamo con l'osservare che in  $\mathbf{B}_1^\pm$  compare il prodotto scalare tra  $\boldsymbol{\alpha}_q$  e la diade  $(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}})$  che va sviluppato. Allora, ricordando la rappresentazione vettoriale di una diade e, posto:

$$\boldsymbol{\alpha}_q = [\alpha_{qx}, \alpha_{qy}, \alpha_{qz}]$$

si ha:

$$\left[ \boldsymbol{\alpha}_q \cdot (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \right]_{\text{TRASPOSTO}} = \begin{bmatrix} \alpha_{qx}(1 - k_x^2) + \alpha_{qy}(-k_x k_y) + \alpha_{qz}(-k_x k_z) \\ \alpha_{qx}(-k_x k_y) + \alpha_{qy}(1 - k_y^2) + \alpha_{qz}(-k_y k_z) \\ \alpha_{qx}(-k_x k_z) + \alpha_{qy}(-k_y k_z) + \alpha_{qz}(1 - k_z^2) \end{bmatrix} \quad (3.5.5)$$

Ora dal momento che il nostro problema non è più scalare come nel caso monodimensionale ma vettoriale, allora un modo per risolverlo è quello di proiettare le equazioni matriciali sui tre assi cartesiani e risolvere tre corrispondenti problemi scalari.

### 3.5.1 Risoluzione dei problemi scalari

Consideriamo ad esempio il campo diffuso, la cui espressione è data dalla (3.5.1) e la cui direzione di propagazione è  $\mathbf{k}_1^+$ :

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \sum_{\substack{l_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} \mathbf{B}_1^+ \exp[j\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}]$$

E' possibile scrivere tale campo diffuso nelle sue tre componenti cartesiane in questo modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{S_x}(\mathbf{r}) = \sum_{\substack{l_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} B_{x1}^+ \exp(j\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}) \\ E_{S_y}(\mathbf{r}) = \sum_{\substack{l_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} B_{y1}^+ \exp(j\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}) \\ E_{S_z}(\mathbf{r}) = \sum_{\substack{l_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} B_{z1}^+ \exp(j\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}) \end{array} \right. \quad (3.5.1.1)$$

in cui:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{x1}^+ = (-1)^{m(\mathbf{l})} (-1)^{m(\mathbf{q})} \exp(j\tilde{\mathbf{l}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \sum_{\substack{q_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} \alpha_{xq}^G(\mathbf{l}) \cdot \prod_{n=0}^{M-1} J_{l_n - q_n}(ak_{z1} C_n \nu^{-Hn}) \\ B_{y1}^+ = (-1)^{m(\mathbf{l})} (-1)^{m(\mathbf{q})} \exp(j\tilde{\mathbf{l}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \sum_{\substack{q_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} \alpha_{yq}^G(\mathbf{l}) \cdot \prod_{n=0}^{M-1} J_{l_n - q_n}(ak_{z1} C_n \nu^{-Hn}) \\ B_{z1}^+ = (-1)^{m(\mathbf{l})} (-1)^{m(\mathbf{q})} \exp(j\tilde{\mathbf{l}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \sum_{\substack{q_i=-\infty \\ i=0, \dots, M-1}}^{+\infty} \alpha_{zq}^G(\mathbf{l}) \cdot \prod_{n=0}^{M-1} J_{l_n - q_n}(ak_{z1} C_n \nu^{-Hn}) \end{array} \right. \quad (3.5.1.2)$$

dove  $\alpha_{xq}^G(\mathbf{l})$ ,  $\alpha_{yq}^G(\mathbf{l})$  e  $\alpha_{zq}^G(\mathbf{l})$  sono dei nuovi coefficienti non noti, dipendenti da  $\mathbf{l}$  dal momento che includono anche la direzione di propagazione ( infatti includono il fattore  $1/k_{z1}^2$  ), secondo queste formule:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{xq}^G(\mathbf{l}) = \frac{j\omega\mu}{(2\pi)^3 k_{z1}^2} [\alpha_{qx}(1 - k_x^2) + \alpha_{qy}(-k_x k_y) + \alpha_{qz}(-k_x k_z)] \cdot \exp(-j\tilde{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \\ \alpha_{yq}^G(\mathbf{l}) = \frac{j\omega\mu}{(2\pi)^3 k_{z1}^2} [\alpha_{qx}(-k_x k_y) + \alpha_{qy}(1 - k_y^2) + \alpha_{qz}(-k_y k_z)] \cdot \exp(-j\tilde{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \\ \alpha_{zq}^G(\mathbf{l}) = \frac{j\omega\mu}{(2\pi)^3 k_{z1}^2} [\alpha_{qx}(-k_x k_z) + \alpha_{qy}(-k_y k_z) + \alpha_{qz}(1 - k_z^2)] \cdot \exp(-j\tilde{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \end{array} \right. \quad (3.5.1.3)$$

Supponiamo a questo punto che il campo incidente sia un'onda piana polarizzata linearmente lungo l'asse y:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = A \exp(+j\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{y}}, \quad (3.5.1.4)$$

dove  $A$  è un coefficiente in ampiezza e  $\mathbf{k}_1 = k_{1x} \hat{\mathbf{x}} + k_{1z} \hat{\mathbf{z}}$  è il vettore numero d'onda incidente con  $k_{1x} = k \sin \vartheta_1, k_{1z} = k \cos \vartheta_1$ , con  $\vartheta_1$  l'angolo di incidenza.

Cerchiamo ora di scrivere in maniera piu' compatta le espressioni scritte sopra. Prendiamo in considerazione il campo diffuso, che contiene i coefficienti non noti dell'espansione del campo superficiale, soffermandoci sulla componente lungo  $y$ . Se poniamo:

$$\mathbf{Q}_{Dql}^+ = (-1)^{m(1)} (-1)^{m(q)} \exp(j \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \cdot \prod_{n=0}^{M-1} J_{l_n - q_n} (ak_{z1} C_n \nu^{-Hn}) \quad (3.5.1.5)$$

e

$$\mathbf{A}_q^G = \begin{bmatrix} \alpha_{yq1}(\mathbf{I}_1) \cdots \alpha_{yq1}(\mathbf{I}_{N_b}) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \alpha_{yqN_b}(\mathbf{I}_1) \cdots \alpha_{yqN_b}(\mathbf{I}_{N_b}) \end{bmatrix} \quad (3.5.1.6)$$

in cui  $N_b$  è il numero di modi totali, allora è possibile esprimere e valutare i coefficienti  $B_{y1}^+$  della componente del campo diffuso come gli elementi della matrice :

$$\mathbf{B}_{y1}^+ = \mathbf{Q}_{Dql}^+ \mathbf{A}_q^G \quad (3.5.1.7)$$

A questo punto è possibile ricavare i coefficienti incogniti, messi sotto forma matriciale, conoscendo il campo incidente e sfruttando la (3.5.2). Seguendo tale procedura , ponendo:

$$\mathbf{Q}_{Dql}^- = \exp(j \tilde{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \cdot \prod_{n=0}^{M-1} J_{l_n - q_n} (ak_{z1} C_n \nu^{-Hn}) \quad (3.5.1.8)$$

si ricava:

$$\mathbf{B}_{yl}^- = \mathbf{Q}_{Dql}^- \mathbf{A}_q^G \quad (3.5.1.9)$$

A questo punto, essendo del tutto noto il campo incidente per cui gli elementi della matrice  $\mathbf{B}_{yl}^-$  sono tutti nulli eccetto quelli identificati dal vettore  $\mathbf{l}=\mathbf{0}$ , indicando con  $\mathbf{A}$  la matrice diagonale delle ampiezze dei coefficienti del campo incidente, facendo la suddetta posizione

$$\mathbf{A}' = -\mathbf{A} \quad (3.5.1.10)$$

otteniamo:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{Q}_{Dql}^- \mathbf{A}_q^G \quad (3.5.1.11)$$

Ora, analogamente al caso monodimensionale, risolviamo tale sistema lineare:

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{yl}^+ = \mathbf{Q}_{Dql}^+ \mathbf{A}_q^G & (3.5.1.13) \\ \mathbf{A}' = \mathbf{Q}_{Dql}^- \mathbf{A}_q^G & (3.5.1.14) \end{cases}$$

si ricavano i suddetti coefficienti:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_q^G = (\mathbf{Q}_{Dql}^-)^{-1} \cdot \mathbf{A}' & (3.5.1.15) \\ \mathbf{B}_{yl}^+ = \mathbf{Q}_{Dql}^+ \cdot (\mathbf{Q}_{Dql}^-)^{-1} \cdot \mathbf{A}' & (3.5.1.16) \end{cases}$$

Facciamo un'osservazione importante. Essendo  $\mathbf{A}'$  diagonale ed avendo considerato una sola onda piana,  $\mathbf{A}'$  avrà sulla diagonale tutti elementi nulli tranne quello che corrisponderà all'ampiezza dell'onda incidente considerata. Ciò ci porta ad affermare che la matrice  $\mathbf{B}_{yl}^+$  presenterà tutti zero tranne una colonna con coefficienti non nulli. Analogamente se avessimo considerato due onde piane, avremmo avuto due colonne di  $\mathbf{B}_{yl}^+$  non nulle e così via.

Facciamo lo stesso discorso per il campo totale al di sopra del profilo superficiale. Ricordando che il campo incidente ha solo componente lungo  $y$ , possiamo scrivere il campo totale nelle sue tre componenti cartesiane in questo modo:

$$\begin{cases} E_{Sx}(\mathbf{r}) \\ E_{iy}(\mathbf{r}) + E_{Sy}(\mathbf{r}) \\ E_{Sz}(\mathbf{r}) \end{cases} = \begin{cases} \begin{cases} E_x(\mathbf{r}) \\ E_y(\mathbf{r}) \\ E_z(\mathbf{r}) \end{cases} & z > z(x, y) \\ \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} & z < z(x, y) \end{cases} \quad (3.5.1.17)$$

A questo punto, essendo del tutto noti il campo incidente e quello diffuso, è possibile calcolare la componente  $E_y(\mathbf{r})$  del campo totale nella regione  $z > z(x, y)$ . Le medesime considerazioni possono essere applicate alle componenti  $x$  e  $z$ , ottenendo l'intero comportamento polarimetrico sia del campo diffuso che di quello totale. Una lieve differenza è dovuta al fatto che in entrambi i casi la matrice  $\mathbf{B}_{(x,z)l}^+$  non assumerà più la stessa forma della (3.5.1.16) dal momento che per ipotesi il campo è polarizzato lungo  $y$ , per cui lungo gli assi  $x$  e  $z$   $\mathbf{A}' = \mathbf{0}$ , ma assumerà la forma della (3.5.1.13) con  $\mathbf{A}_{(x,z)q}^G$  che sarà soluzione dell'equazione omogenea:

$$\mathbf{Q}_{Dql}^- \mathbf{A}_{(x,z)q}^G = \mathbf{0} . \quad (3.5.1.18)$$

da cui si possono ricavare i coefficienti incogniti  $\alpha_{qx}^G, \alpha_{qz}^G$ , che, sostituiti nella prima e nella terza equazione della (3.5.1.2) permettono di ricavare i coefficienti in'ampiezza  $B_{xl}^+$  e  $B_{zl}^+$  e di conseguenza le due restanti componenti del campo totale,  $E_x(\mathbf{r})$  ed  $E_z(\mathbf{r})$ .

### 3.6 Esempi numerici

Prima di mostrare i risultati numerici, evidenziamo una realizzazione della superficie e del campo diffuso. La realizzazione della superficie è stata ottenuta usando tali parametri:

Tabella I: Parametri usati nella determinazione della superficie

M	X[m]	Y[m]	a[m]	$\nu$	H
20	5	5	0.025	e/2	0.7

mentre per ottenere una realizzazione del campo diffuso sono stati usati come parametri superficiali ed elettromagnetici quelli mostrati nella tabella II :

Tabella II: Parametri usati per i diagrammi diffusi

$K_{\max}$	M	X[m]	Y[m]	a[m]	$\nu$	H	$\vartheta_1[\text{rad}]$
3	5	5	5	0.03	e	0.7	$\pi/6$

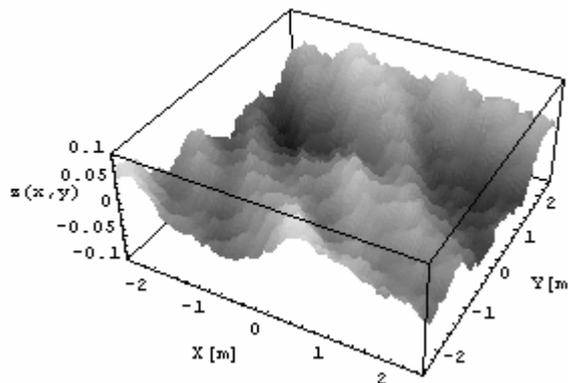


Fig.3.6.1: Realizzazione di una WM 2-D

Una realizzazione del campo diffuso è:

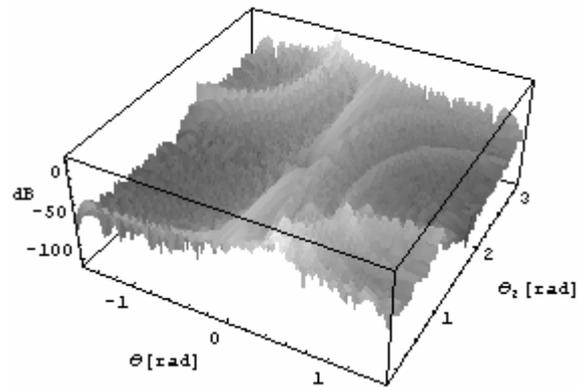


Fig.3.6.2:Realizzazione del diagramma di irradiazione diffuso

Ora per mostrare che i risultati sono corretti, supponiamo di fare dei tagli del diagramma di irradiazione di figura III.2 ad un fissato  $\vartheta_2$  e grafichiamo varie situazioni interessanti. In tutti i tagli che faremo, fisseremo  $\vartheta_2=0$ .

Vediamo cosa succede al variare del coefficiente di Hurst, graficando 3 possibili casi corrispondenti a:

$-H=0.3$ ;

$-H=0.7$ ;

$-H=0.9$ ,

e prendendo in considerazione tali parametri:

Tabella III: Parametri usati per i diagrammi al variare di  $H$

$K_{\max}$	M	$X[m]$	$Y[m]$	$a[m]$	$\nu$	$\vartheta_1[rad]$
3	5	5	5	0.04	e	$\pi/6$

Otteniamo queste realizzazioni:

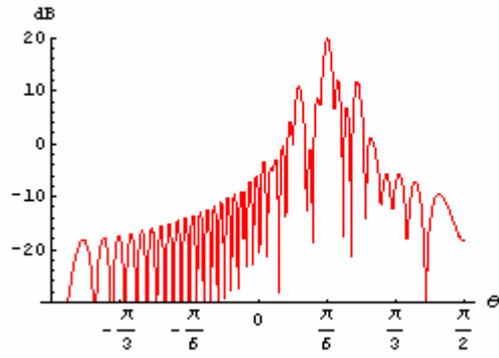


Fig.3.6.3:Diagramma per  $H=0.3$

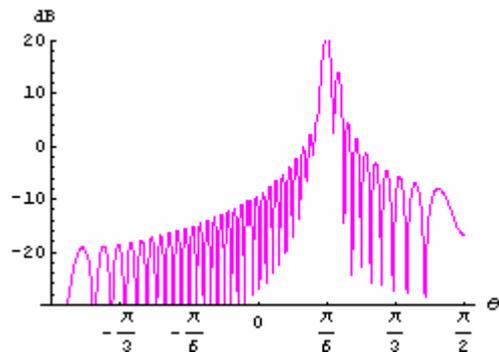


Fig.3.6.4:Diagramma per  $H=0.7$

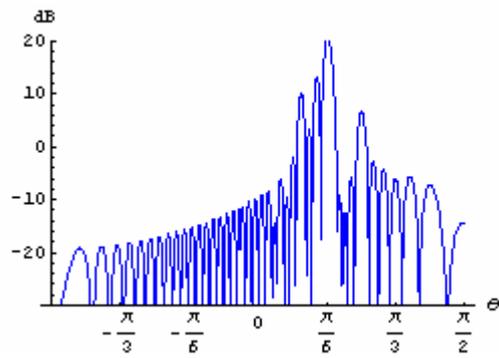


Fig.3.6.5:Diagramma per  $H=0.9$

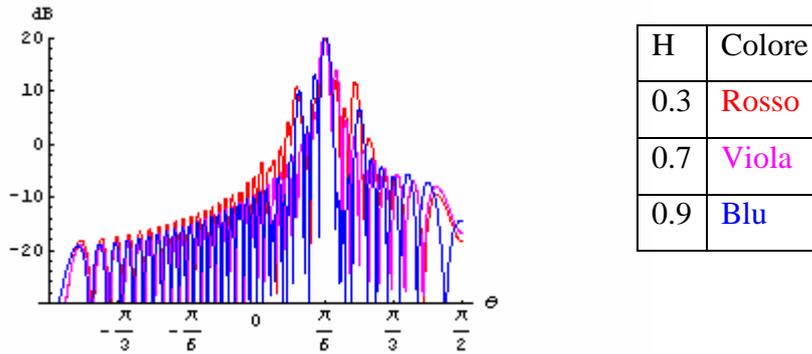


Fig.3.6.4:Sovrapposizione dei diagrammi

Analogamente al caso monodimensionale, dalla figura III.6 si nota che  $H$  è legato all'involuppo del diagramma d'irradiazione, dal momento che agisce sul rapporto tra i gruppi di modi, causando quindi una traslazione rigida del gruppo verso il basso o verso l'alto, e ciò provoca una conservazione della struttura del diagramma stesso. Ciò non accade, invece, se analizziamo cosa succede ai diagrammi al variare un altro parametro di rugosità, cioè  $a$ . I diagrammi che da ora in poi riporteremo sono stati ricavati usando i parametri della tabella II.

Presentiamo allora tre realizzazioni dei diagrammi per tali valori:

- $a=0.01$ ;
- $a=0.03$ ;
- $a=0.05$ .

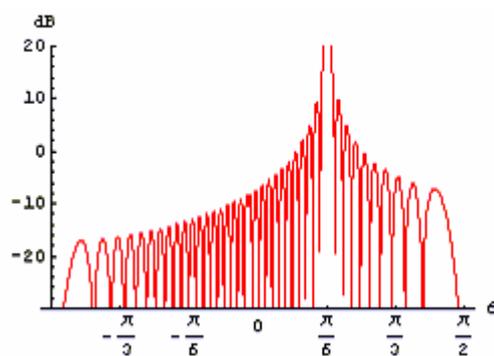


Fig.3.6.7:Diagramma per  $a=0.01$

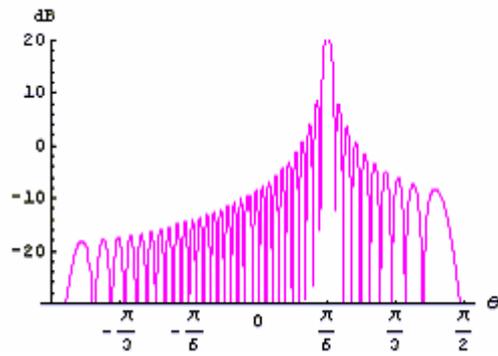


Fig.3.6.8:Diagramma per  $a=0.03$

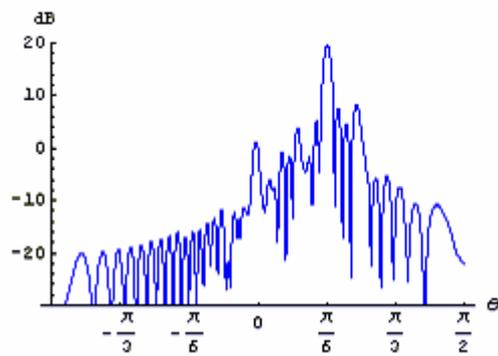
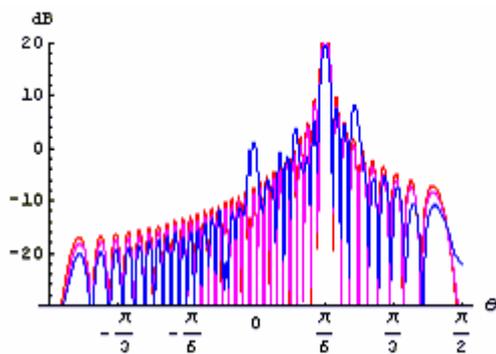


Fig.3.6.9:Diagramma per  $a=0.05$



a	Colore
0.01	Rosso
0.03	Viola
0.05	Blu

Fig.3.6.10:Sovrapposizione dei diahrammi

Come si può notare, un innalzamento o abbassamento di  $a$  provoca un corrispondente aumento o decremento di tutti i toni superficiali, per cui tale parametro agisce sul rapporto tra i modi di un gruppo e non piu' tra gruppi di

modi, e ciò provoca una non conservazione della struttura del diagramma di irradiazione.

Osserviamo ora come mutano i diagrammi al variare del footprint (X,Y) dell'antenna. I tre casi evidenziati rappresentano tre realizzazioni di diagrammi per le coppie (X,Y)=(2.5,2.5),(5,5),(10,10):

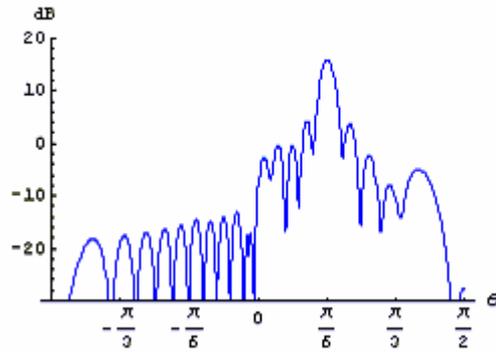


Fig.3.6.11:Diagramma per (X,Y)=(2.5,2.5)

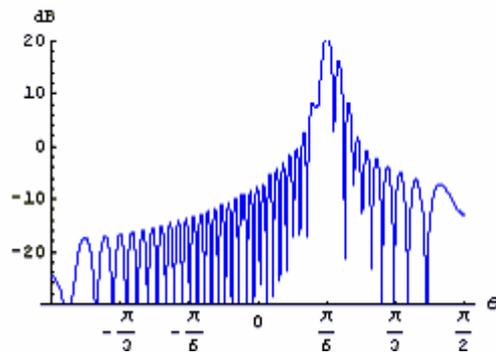


Fig.3.6.12:Diagramma per (X,Y)=(5,5)

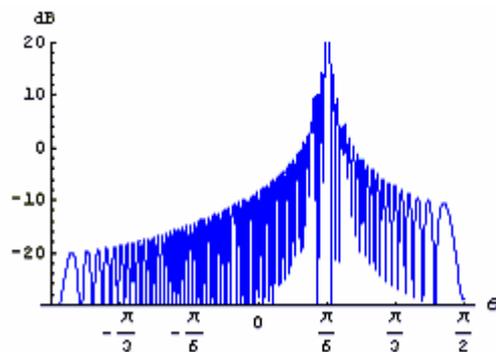


Fig.3.6.13:Diagramma per (X,Y)=(10,10)

Ritroviamo quello che ci aspettavamo: all'aumentare del diametro dell'antenna definito come  $L = \sqrt{X^2 + Y^2}$ , il diagramma tende a restringersi sempre più intorno alla direzione speculare, in accordo col fatto che se  $L \rightarrow \infty$  il diagramma tende ad assumere la forma di una delta di Dirac.

Analizziamo ora cosa succede al variare dell'angolo di incidenza. La situazione più interessante da graficare corrisponde al caso in cui l'angolo di incidenza risulta essere circa  $\pi/2$ , per cui siamo nel caso di incidenza radente. In tali condizioni il diagramma dovrebbe assumere la forma di una "sinc":

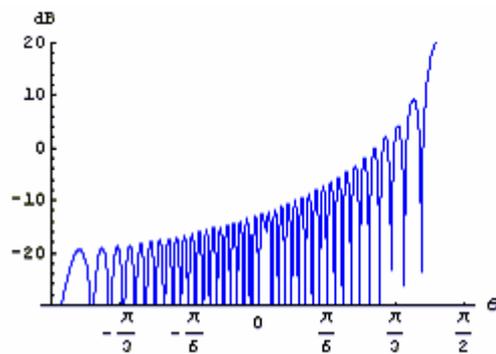


Fig.3.6.14:Diagramma per  $\vartheta_1 = \pi/2.1$

In effetti i risultati sperimentali hanno confermato le nostre aspettative.

In ultima analisi, facciamo variare l'angolo  $\vartheta_2$  (vedi Fig.1) e grafichiamo i diagrammi per  $\vartheta_2 = \pi/6, \pi/3, \pi/2$ . Allontanandoci da  $\vartheta_2 = 0$ , ci aspettiamo un abbassamento del picco nella direzione speculare, e un damping di tutte le componenti frequenziali a destra e sinistra di questa stessa direzione, dal momento che man mano che ci spostiamo i lobi laterali del diagramma non saranno più visibili.

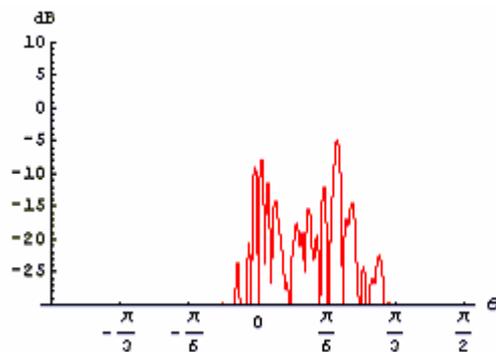


Fig.3.6.15:Diagramma per  $\vartheta_2 = \pi/6$

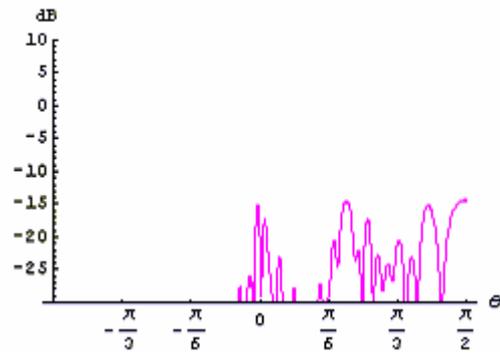


Fig.3.6.16:Diagramma per  $\vartheta_2 = \pi/3$

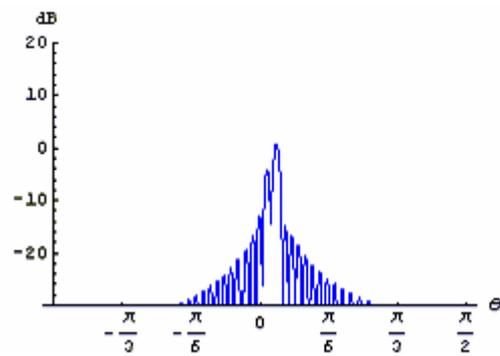


Fig.3.6.17:Diagramma per  $\vartheta_2 = \pi/2$

In effetti, l'abbattimento delle componenti spettrali al di là della direzione speculare è chiaramente visibile.

# Conclusioni

La geometria frattale ha dotato la ricerca sulla diffusione da superfici naturali, i cui risultati all'inizio erano insoddisfacenti soprattutto a causa dell'inadeguatezza dei modelli classici di descrivere le innumerevoli forme irregolari della natura, di uno strumento notevolmente efficace. In questa tesi è stato analizzato un importante problema di diffusione elettromagnetica da superfici frattali. E' stato affrontato sia il caso monodimensionale che quello bidimensionale. Nel primo caso il profilo superficiale separa lo spazio libero da un mezzo di permittività  $\epsilon_r$ , mentre nel secondo caso il mezzo dielettrico è stato sostituito da un conduttore elettrico perfetto. A tal proposito è stata usata la funzione frattale WM per una descrizione analitica della superficie, e un modello elettromagnetico (EBCM) per la valutazione dei campi.

Il tutto è stato possibile grazie alla proprietà di quasi-periodicità della WM che ha potuto permettere l'applicazione della teoria di Floquet per esprimere i campi come sovrapposizione modale. Il vantaggio principale è che in linea teorica tale metodo può essere applicato in qualsiasi condizione di rugosità del profilo, mentre lo svantaggio è legato al fatto che, a causa dell'espansione in serie di Fourier del campo superficiale, i campi vengono scritti come una serie infinita di termini di ampiezza, per cui bisognerebbe risolvere un sistema di rango infinito per avere una soluzione. Non essendo possibile ciò, le matrici vanno troncate ed è stato usato un particolare criterio di troncamento. L'efficienza del modello è stata evidenziata attraverso considerazioni di carattere energetico e attraverso i grafici dei diagrammi di irradiazione ottenuti grazie al potente software *Mathematica 5.0*. E' stato inoltre messo in evidenza e spiegato per il caso monodimensionale con delle ragioni fisico-matematiche il problema IC che nasce quando la rugosità del profilo diventa abbastanza forte, per cui l'inversione delle matrici può portare a dei risultati erronei. Questo in realtà è un limite di validità del metodo usato, che in linea di principio potrebbe essere usato in qualsiasi condizione di rugosità della superficie.

Grazie allo stesso software è stato possibile vedere cosa succedesse per il caso bidimensionale, ed è stato dimostrato che i risultati sono altrettanto incoraggianti. Infatti facendo dei tagli del grafico bidimensionale, è stato mostrato come i risultati sperimentali soddisfacessero le aspettative teoriche. Per cui tale metodo si propone come una controparte efficiente nei confronti di altri metodi elettromagnetici molto sviluppati come il metodo delle piccole perturbazioni.

*Appendice I: Programma usato per il calcolo delle potenze e per i grafici dei diagrammi di irradiazione nel caso monodimensionale*

```

Clear[a, int, M, h, NN, λ, θ, θi, θs, θsp, q, L, A, H, kpx];
int = 3;
h = -int;
Print["Ordine di interazione    ", int]
λ = 0.5;
k =  $\frac{2 * \text{Pi}}{\lambda}$ ;
E0 = 1;
L = 5;
A = 0.03;
v = e;
k0 =  $\frac{2 * \text{Pi}}{L}$ ;
H = 0.5;
M = IntegerPart[ $\frac{\text{Log}[10 * L / \lambda]}{\text{Log}[v]} + 1$ ];
Print["Numero di toni    ", M]
er = 4;
kt =  $\sqrt{\text{er} * k}$ ;
Nv = Table[k0 * vi-1, {i, 1, M}];
θi =  $\frac{\text{Pi}}{6}$ ;
θ = Table[ $\frac{\text{Pi}}{n}$ , {n, 1, M}];

For[n = 1, n < 2 * int + 2, n++, a[0][n] = {n - int - 1}];
For[j = 1, j < M, j++, m = 1;
For[i = 0, i < 2 * int + 1, i++,
For[f = 1, f < (2 * int + 1)3 + 1, f++,
a[j][m] = {h + i, a[j - 1][f]};
a[j][m] = Flatten[a[j][m]; m++]]];
g = 1;
Do[If[  $\left( \sum_{r=1}^{\text{Length}[a[M-1][h]]} \text{Abs}[a[M-1][h][[r]]] \right) < \text{int} + 1,$ 
q[g] = a[M - 1][h]; nq[g] =  $\sum_{i=1}^H q[g][[i]]$ ; g++, {h, (2 * int + 1)H}}]
NN = g - 1;
Print["Numero di modi totali    ", NN]

```

```

Clear[ $\theta s$ ,  $kpx$ ,  $kptx$ ,  $kpz$ ,  $kptz$ ,  $\theta s$ ,  $\lambda p$ ,  $\theta s$ ,  $flag$ ,  $flagt$ ,  $mp$ ,  $mt$ ];
 $mp = 0$ ;  $mt = 0$ ;
For[ $i = 1$ ,  $i < NN + 1$ ,  $i++$ ,  $kpx[i] = k * Sin[\theta i] + q[i].Nv$ ;
   $kpz[i] = \sqrt{k^2 - kpx[i]^2}$ ;  $kp[i] = \{kpx[i], kpz[i]\}$ ;
   $\theta s[i] = ArcSin[\frac{kpx[i]}{k}]$ ;  $\phi s[i] = ArcSin[\frac{kpx[i]}{kt}]$ ;
   $kptx[i] = kt * Sin[\phi s[i]]$ ;  $kptz[i] = kt * Cos[\phi s[i]]$ ;
  If[Im[ $\theta s[i]$ ] == 0,  $mp++$ ;  $\theta sp[mp] = \theta s[i]$ ;  $flag[mp] = i$ ];
  If[Im[ $\phi s[i]$ ] == 0,  $mt++$ ;  $\phi sp[mt] = \phi s[i]$ ;  $flagt[mt] = i$ ];
  If[ $kpx[i] \neq k * Sin[\theta i]$ ,  $\lambda p[i] = 0$ ,  $\lambda p[i] = E0$ ]]

Print["Numero di modi diffusi che si propagano ",  $mp$ ]
Print["Numero di modi trasmessi che si propagano ",  $mt$ ]

(*****
  Procedura per il calcolo delle matrici
  *****)
Clear[ $QDm$ ,  $QDpt$ ,  $QNm$ ,  $QNpt$ ];
For[ $i = 1$ ,  $i < NN + 1$ ,  $i++$ ,
  For[ $j = 1$ ,  $j < NN + 1$ ,  $j++$ ,
     $QDm[i, j] = \frac{k}{kpz[i]} Exp[I * q[i].\Phi] * \prod_{n=0}^{H-1} BesselJ[q[i][[n+1]] - q[j][[n+1]], \lambda * kpz[i] * v^{-H*n}]$ ;
     $QDpt[i, j] = \frac{k}{kptz[i]} (-1)^{mq[i]} * (-1)^{mq[j]} Exp[I * q[i].\Phi] * \prod_{n=0}^{H-1} BesselJ[q[i][[n+1]] - q[j][[n+1]], \lambda * kptz[i] * v^{-H*n}]$ ;
     $QNm[i, j] = \frac{k^2 - kpx[i] kpx[j]}{kpz[i]^2} Exp[I * q[i].\Phi] * \prod_{n=0}^{H-1} BesselJ[q[i][[n+1]] - q[j][[n+1]], \lambda * kpz[i] * v^{-H*n}]$ ;
     $QNpt[i, j] = \frac{kt^2 - kptx[i] kptx[j]}{kptz[i]^2} (-1)^{mq[i]} * (-1)^{mq[j]} Exp[I * q[i].\Phi] * \prod_{n=0}^{H-1} BesselJ[q[i][[n+1]] - q[j][[n+1]], \lambda * kptz[i] * v^{-H*n}]$ ;
  ]
]

```

```

Clear[QDp, QNp]; For[i = 1, i < mp + 1, i ++,
For[j = 1, j < NN + 1, j ++, QDp[i, j] =  $\frac{k}{kpx[flag[i]]} * (-1)^{nq[flag[i]]} * (-1)^{nq[j]} \text{Exp}[I * q[flag[i]]. \mathbb{E}]$ 
 $\prod_{n=0}^{H-1} \text{BesselJ}[q[flag[i]][[n+1]] - q[j][[n+1]],$ 
A * kpx[flag[i]] * v-H+n];
QNp[i, j] =  $(-1)^{nq[flag[i]]} * (-1)^{nq[j]} * \frac{k^2 - kpx[flag[i]] kpx[j]}{kpx[flag[i]]^2} * \text{Exp}[I * q[flag[i]]. \mathbb{E}] * \prod_{n=0}^{H-1} \text{BesselJ}[q[flag[i]][[n+1]] - q[j][[n+1]],$ 
A * kpx[flag[i]] * v-H+n]];
Clear[QNTm, QDtm]; For[i = 1, i < mt + 1, i ++, For[j = 1, j < NN + 1, j ++,
QNTm[i, j] =  $\frac{kt^2 - kptx[flagt[i]] kptx[j]}{kptz[flagt[i]]^2} \text{Exp}[I * q[flagt[i]]. \mathbb{E}] * \prod_{n=0}^{H-1} \text{BesselJ}[q[flagt[i]][[n+1]] - q[j][[n+1]],$ 
A * kptz[flagt[i]] * v-H+n];
QDtm[i, j] =  $\frac{k}{kptz[flagt[i]]} \text{Exp}[I * q[flagt[i]]. \mathbb{E}] * \prod_{n=0}^{H-1} \text{BesselJ}[q[flagt[i]][[n+1]] - q[j][[n+1]],$ 
A * kptz[flagt[i]] * v-H+n]];
(*****Operazioni matriciali *****)
Clear[Ap1]; Ap1 = Table[Ap[i], {i, 1, NN}];
Clear[QDm1]; QDm1 = Table[QDm[i, j], {i, 1, NN}, {j, 1, NN}];
Clear[QDp1];
QDp1 = Table[QDp[i, j], {i, 1, mp}, {j, 1, NN}];
Clear[QDpt1]; QDpt1 = Table[QDpt[i, j], {i, 1, NN}, {j, 1, NN}];
Clear[QNm1]; QNm1 = Table[QNm[i, j], {i, 1, NN}, {j, 1, NN}];
Clear[QNpt1]; QNpt1 = Table[QNpt[i, j], {i, 1, NN}, {j, 1, NN}];
Clear[QNp1]; QNp1 = Table[QNp[i, j], {i, 1, mp}, {j, 1, NN}];
Clear[QNTm1]; QNTm1 = Table[QNTm[i, j], {i, 1, mt}, {j, 1, NN}];
Clear[QDtm1]; QDtm1 = Table[QDtm[i, j], {i, 1, mt}, {j, 1, NN}];
Clear[FF, MM, WW, WW1, Bp, bp];
FF = Inverse[QNpt1];
MM = FF.QDpt1;
WW1 = QDm1 + QNm1.MM;
WW = Inverse[WW1];
Bp = (QNp1.MM - QDp1).WW.Ap1;
bp = (QNTm1.MM + QDtm1).WW.Ap1;

```

```

(*****Calcolo potenza diffusa*****)
Clear[pr, pt, ener];
pr = Sum[Abs[Bp[[i]]]^2 * Cos[theta_sp[i]], {i, 1, mp}];
(****Calcolo potenza trasmessa****)
pt = Sqrt[er] * Sum[Abs[bp[[i]]]^2 * Cos[theta_sp[i]], {i, 1, mp}];
Print["Potenza diffusa ", pr]
Print["Potenza trasmessa ", pt]
Print["Somma delle potenze ", pt + pr]
Clear[Es, BB];
BB = Sum[1 / Sqrt[k * 2 * pi] * Sin[k * L * (Sin[theta] - Sin[theta_sp[i]])] * Bp[[i]], {i, 1, mp}];
Es = Abs[BB + Conjugate[BB]];
p1 = Plot[10 * Log[10, Es], {theta, -Pi / 2, Pi / 2}, PlotPoints -> 100,
  AxesOrigin -> {-Pi / 2, -30}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1]},
  AxesLabel -> {"theta", "dB "}, PlotRange -> {-30, 10},
  Ticks -> {{-Pi / 2, -Pi / 3, -Pi / 6, 0, Pi / 6, Pi / 3, Pi / 2}, Automatic}];

```

*Appendice II: Programma usato per il calcolo delle potenze e per i grafici dei diagrammi di irradiazione nel caso monodimensionale con fissata precisione*

```

Clear[a, int, M, h, NN, λ, θ, θi, θs, θsp, q, L, A, H, kpx];
int = 3;
h = -int;
Print["Ordine di interazione    ", int]
λ = 0.5;
k =  $\frac{2 * \text{Pi}}{\lambda}$ ;
E0 = 1;
L = 5;
A = 0.03;
v = e;
k0 =  $\frac{2 * \text{Pi}}{L}$ ;
H = 0.5;
M = IntegerPart[ $\frac{\text{Log}[10 * L / \lambda]}{\text{Log}[v]} + 1$ ];
Print["Numero di toni    ", M]
er = 4;
kt =  $\sqrt{\text{er} * k}$ ;
Nv = Table[k0 * vi-1, {i, 1, M}];
θi =  $\frac{\text{Pi}}{6}$ ;
θ = Table[ $\frac{\text{Pi}}{n}$ , {n, 1, M}];

For[n = 1, n < 2 * int + 2, n++, a[0][n] = {n - int - 1}];
For[j = 1, j < M, j++, m = 1;
For[i = 0, i < 2 * int + 1, i++,
For[f = 1, f < (2 * int + 1)3 + 1, f++,
a[j][m] = {h + i, a[j - 1][f]};
a[j][m] = Flatten[a[j][m]; m++]]];
g = 1;
Do[If[ $\left( \sum_{r=1}^{\text{Length}[a[M-1][h]]} \text{Abs}[a[M-1][h][[r]]] \right) < \text{int} + 1,$ 
q[g] = a[M - 1][h]; nq[g] =  $\sum_{i=1}^H q[g][[i]]$ ; g++, {h, (2 * int + 1)H}]
NN = g - 1;
Print["Numero di modi totali    ", NN]

```

```

Clear[ $\theta s$ ,  $kpx$ ,  $kptx$ ,  $kpz$ ,  $kptz$ ,  $\theta s$ ,  $\lambda p$ ,  $\theta s$ ,  $flag$ ,  $flagt$ ,  $mp$ ,  $mt$ ];
 $mp = 0$ ;  $mt = 0$ ;
For[ $i = 1$ ,  $i < NN + 1$ ,  $i++$ ,  $kpx[i] = k * Sin[\theta i] + q[i].Nv$ ;
   $kpz[i] = \sqrt{k^2 - kpx[i]^2}$ ;  $kp[i] = \{kpx[i], kpz[i]\}$ ;
   $\theta s[i] = ArcSin[\frac{kpx[i]}{k}]$ ;  $\theta s[i] = ArcSin[\frac{kpx[i]}{kt}]$ ;
   $kptx[i] = kt * Sin[\theta s[i]]$ ;  $kptz[i] = kt * Cos[\theta s[i]]$ ;
  If[Im[ $\theta s[i]$ ] == 0,  $mp++$ ;  $\theta sp[mp] = \theta s[i]$ ;  $flag[mp] = i$ ];
  If[Im[ $\theta s[i]$ ] == 0,  $mt++$ ;  $\theta sp[mt] = \theta s[i]$ ;  $flagt[mt] = i$ ];
  If[ $kpx[i] \neq k * Sin[\theta i]$ ,  $\lambda p[i] = 0$ ,  $\lambda p[i] = E0$ ]]

```

```

Print["Numero di modi diffusi che si propagano ",  $mp$ ]
Print["Numero di modi trasmessi che si propagano ",  $mt$ ]

```

(\*\*\*\*\*  
 Procedura per il calcolo delle matrici  
 \*\*\*\*\*)

```

Clear[ $QDm$ ,  $QDpt$ ,  $QNm$ ,  $QNpt$ ];
For[ $i = 1$ ,  $i < NN + 1$ ,  $i++$ ,
  For[ $j = 1$ ,  $j < NN + 1$ ,  $j++$ ,
     $QDm[i, j] =$ 
      SetPrecision[ $\frac{k}{kpz[i]} Exp[I * q[i].\Phi] *$ 
         $\prod_{n=0}^{H-1} BesselJ[q[i][[n+1]] - q[j][[n+1]],$ 
           $\lambda * kpz[i] * v^{-H*n}], 20$ ];
       $QDpt[i, j] =$ 
        SetPrecision[ $\frac{k}{kptz[i]} (-1)^{mq[i]} * (-1)^{mq[j]} Exp[I * q[i].\Phi] *$ 
           $\prod_{n=0}^{H-1} BesselJ[q[i][[n+1]] - q[j][[n+1]], \lambda * kptz[i] * v^{-H*n}], 20$ ];
     $QNm[i, j] = SetPrecision[\frac{k^2 - kpx[i] kpx[j]}{kpz[i]^2} Exp[I * q[i].\Phi] *$ 
       $\prod_{n=0}^{H-1} BesselJ[q[i][[n+1]] - q[j][[n+1]], \lambda * kpz[i] * v^{-H*n}], 20$ ];
     $QNpt[i, j] = SetPrecision[\frac{kt^2 - kptx[i] kptx[j]}{kptz[i]^2} (-1)^{mq[i]} *$ 
       $(-1)^{mq[j]} Exp[I * q[i].\Phi] * \prod_{n=0}^{H-1} BesselJ[q[i][[n+1]] - q[j][[n+1]],$ 
         $\lambda * kptz[i] * v^{-H*n}], 20]]];$ 

```

```

Clear[QDp, QNp]; For[i = 1, i < mp + 1, i++,
For[j = 1, j < NN + 1, j++, QDp[i, j] =  $\frac{k}{kpz[flag[i]]} * (-1)^{nq[flag[i]]} * (-1)^{nq[j]} \text{Exp}[I * q[flag[i]]. \mathbb{E}]$ 
 $\prod_{n=0}^{H-1} \text{BesselJ}[q[flag[i]][[n+1]] - q[j][[n+1]],$ 
 $A * kpz[flag[i]] * v^{-H+n}];$ 
QNp[i, j] =  $(-1)^{nq[flag[i]]} * (-1)^{nq[j]} * \frac{k^2 - kpx[flag[i]] kpx[j]}{kpz[flag[i]]^2} * \text{Exp}[I * q[flag[i]]. \mathbb{E}] * \prod_{n=0}^{H-1} \text{BesselJ}[q[flag[i]][[n+1]] - q[j][[n+1]],$ 
 $A * kpz[flag[i]] * v^{-H+n}, 20]]];$ 
Clear[QNTm, QDtm]; For[i = 1, i < mt + 1, i++, For[j = 1, j < NN + 1, j++,
QNTm[i, j] =
SetPrecision[ $\frac{kt^2 - kptx[flagt[i]] kptx[j]}{kptz[flagt[i]]^2} \text{Exp}[I * q[flagt[i]]. \mathbb{E}] * \prod_{n=0}^{H-1} \text{BesselJ}[q[flagt[i]][[n+1]] - q[j][[n+1]],$ 
 $A * kptz[flagt[i]] * v^{-H+n}, 20];$ 
QDtm[i, j] = SetPrecision[ $\frac{k}{kptz[flagt[i]]} \text{Exp}[I * q[flagt[i]]. \mathbb{E}] * \prod_{n=0}^{H-1} \text{BesselJ}[q[flagt[i]][[n+1]] - q[j][[n+1]],$ 
 $A * kptz[flagt[i]] * v^{-H+n}, 20]]];$ 
(*****Operazioni matriciali *****)
Clear[Ap1]; Ap1 = Table[Ap[i], {i, 1, NN}];
Clear[QDm1]; QDm1 = Table[QDm[i, j], {i, 1, NN}, {j, 1, NN}];
Clear[QDp1];
QDp1 = Table[QDp[i, j], {i, 1, mp}, {j, 1, NN}];
Clear[QDpt1]; QDpt1 = Table[QDpt[i, j], {i, 1, NN}, {j, 1, NN}];
Clear[QNm1]; QNm1 = Table[QNm[i, j], {i, 1, NN}, {j, 1, NN}];
Clear[QNpt1]; QNpt1 = Table[QNpt[i, j], {i, 1, NN}, {j, 1, NN}];
Clear[QNp1]; QNp1 = Table[QNp[i, j], {i, 1, mp}, {j, 1, NN}];
Clear[QNTm1]; QNTm1 = Table[QNTm[i, j], {i, 1, mt}, {j, 1, NN}];
Clear[QDtm1]; QDtm1 = Table[QDtm[i, j], {i, 1, mt}, {j, 1, NN}];
Clear[FF, MM, WW, WW1, Bp, bp];
FF = Inverse[QNpt1];
MM = FF.QDpt1;
WW1 = QDm1 + QNm1.MM;
WW = Inverse[WW1];
Bp = (QNp1.MM - QDp1).WW.Ap1;
bp = (QNTm1.MM + QDtm1).WW.Ap1;

```

```

(*****Calcolo potenza diffusa*****)
Clear[pr, pt, ener];
pr = Sum[Abs[Bp[[i]]]^2 * Cos[theta_sp[i]], {i, 1, mp}];
(****Calcolo potenza trasmessa****)
pt = Sqrt[er] * Sum[Abs[bp[[i]]]^2 * Cos[theta_sp[i]], {i, 1, mp}];
Print["Potenza diffusa ", pr]
Print["Potenza trasmessa ", pt]
Print["Somma delle potenze ", pt + pr]
Clear[Es, BB];
BB = Sum[1 / Sqrt[k * 2 * pi] * Sin[k * L * (Sin[theta] - Sin[theta_sp[i]])] * Bp[[i]], {i, 1, mp}];
Es = Abs[BB + Conjugate[BB]];
p1 = Plot[10 * Log[10, Es], {theta, -Pi / 2, Pi / 2}, PlotPoints -> 100,
  AxesOrigin -> {-Pi / 2, -30}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1]},
  AxesLabel -> {"theta", "dB "}, PlotRange -> {-30, 10},
  Ticks -> {{-Pi / 2, -Pi / 3, -Pi / 6, 0, Pi / 6, Pi / 3, Pi / 2}, Automatic}];

```

*Appendice IV: Programma per la generazione di una WM monodimensionale*

```
Clear
M = 5;
H = 0.7;
a = 0.03;
λ = 0.5;
k0 = 2 * Pi / L;
L = 5;
s = e;
φ = Table[Random[Real, {0, 2 * π}], {i, M}];
z =  $\sum_{m=0}^{H-1} a * s^{-m * H} * \text{Sin}[k_0 * s^m * x + \phi[[m + 1]]]$ ;
Plot[z, {x, -3, 3}, AxesLabel → {"Realizzazione di una WM monodimensionale"}]
```

*Appendice V: Programma per la generazione di una WM bidimensionale*

```
Clear
M = 20;
H = 0.7;
a = 0.025;
k = 2 * π / 5;
s = e / 2;
φ = Table[Random[Real, {0, 2 * π}], {i, M}];
φ = Table[Random[Real, {0, 2 * π}], {i, M}];
z =  $\sum_{m=0}^{H-1} a * s^{-m * H} * \text{Sin}[k * s^m * (x * \text{Cos}[\phi[[m + 1]]] + y * \text{Sin}[\phi[[m + 1]]]) + \phi[[m + 1]]]$ ;
Plot3D[z, {x, -2.5, 2.5}, {y, -2.5, 2.5}, AxesLabel → {"X[m]", "Y[m]", "z(x,y)"},
PlotPoints → 100, Mesh → False, PlotRange → {-5, 5}]
```

# Bibliografia

[1] K.Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, New York: Wiley, 1990

[2] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*. New York:W.H.Freeman & C., 1983.

[3] G.Franceschetti, A.Iodice, D.Riccio, “*Fractal Models for Scattering from Natural Surfaces*” in *Scattering*, edito da R.Pike e P.Sabatier, Academic Press, Londra, U.K., 2000.

[4] G.Franceschetti, A.Iodice, D.Riccio, G.Ruello, ”*Fractal Surfaces and Electromagnetic Extended Boundary Conditions*”, *IEEE Transactions Geoscience Remote Sensing*, vol.40, n.5, pp.1018-1031, Maggio 2002.

[5] M.Abramovitz e I.A. Stegun, “*Handbook of Mathematical Functions*”, New York: Dover,1970.

[6] A.K.Jordan e R.H.Lang, “*Electromagnetic scattering patterns from sinusoidal surfaces*”, *Radio Science*, vol. 14, pp 1077-1088, Novembre-Dicembre 1979.

[7] W.C Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*, IEEE Press.

[8] G. Franceschetti, *Theory, Techniques and Engineering Paradigms*, Hardcover 1998, Kluwer Academic Pub