UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.

Dipartimento di Matematica

Trasformazioni geometriche e proprietà invarianti:
i “punti di vista” di Klein e di von Staudt

Relatore
Chiar.mo Prof. M. P. BERNARDI

TESI DI LAUREA
di Mattia PAGANINI

ANNO ACCADEMICO 2004 – 05

INDICE

INTRODUZIONE

Anche se si tratta di un argomento ben noto, ricordiamo l'idea centrale del "programma di Erlangen" di Felix Klein. Un tipo di geometria è assegnato quando sono dati un insieme X (non vuoto) e un gruppo G di trasformazioni su X.

Noti X e G, ci si propone di studiare le proprietà dei sottoinsiemi di X, le quali sono invarianti rispetto alle trasformazioni di G. Spesso X è dotato di una struttura, che determina il gruppo G. Per esempio, se X è dotato della struttura di spazio topologico, è naturale assumere come G il gruppo degli omeomorfismi di X e chiamare topologiche le proprietà dei sottoinsiemi di X invarianti per gli omeomorfismi di G.

Si noti che così si inquadra nel "programma di Erlangen" lo studio di un singolo spazio topologico, non lo studio di tutti gli spazi topologici, cosa che si fa invece abitualmente in topologia generale.

Anche assegnato uno spazio ambiente, ci si può porre, però, oltre al problema indicato sopra, anche un problema leggermente diverso.

Assegnamo ancora uno spazio topologico X; consideriamo tutti i suoi sottoinsiemi (non vuoti) e tutti i possibili omeomorfismi tra tali sottoinsiemi (non soltanto le restrizioni degli omeomorfismi dell'intero spazio X).

Gli omeomorfismi che consideriamo ora non formano più gruppo; si può parlare di un gruppoide di trasformazioni.

Per le proprietà di sottoinsiemi di X, abbiamo ora due tipi di invarianza:

1) invarianza rispetto ai soli omeomorfismi di X;
2) invarianza rispetto a tutti gli omeomorfismi tra sottoinsiemi di X.

La seconda invarianza implica la prima (tra gli omeomorfismi tra sottoinsiemi di X ci sono, in particolare, le restrizioni degli omeomorfismi di X), ma non viceversa.

Per esempio, si può considerare come X lo spazio euclideo tridimensionale e come proprietà quella di una curva chiusa semplice di essere annodata (con linguaggio più tecnico: la proprietà di un nodo di essere intrecciato). Si tratta di una proprietà invariante nel primo senso, ma non nel secondo.

Chiameremo "punto di vista di Klein" lo studio dell'invarianza nel primo caso, "punto di vista di von Staudt" lo studio dell'invarianza nel secondo. L'uso di questo secondo termine è forse un po' arbitrario: conviene precisare in quale senso sia stato adottato da alcuni autori, nell'ambito della geometria proiettiva.

Nel 1847, venticinque anni prima del "programma di Erlangen", von Staudt dimostrò che, nel piano proiettivo reale, esiste una e una sola proiettività tra due rette, che trasforma una terna ordinata di punti distinti della prima in una terna ordinata di punti distinti della seconda. È stato poi dimostrato:

a) in un qualunque piano proiettivo P, esiste almeno una proiettività tra due rette che trasforma una terna ordinata di punti distinti della prima in una terna ordinata di punti distinti della seconda;
b) si ha l'unicità se e solo se P è il piano proiettivo su un campo.

Per "punto di vista di von Staudt" si intende, propriamente, lo studio dei legami tra le proprietà di un piano proiettivo P e le proprietà del gruppo delle proiettività su una retta di P. In modo esteso, il termine è stato usato per strutture di incidenza diverse dai piani proiettivi. Con un'estensione ulteriore, e forse eccessiva, nella tesi useremo il termine anche nel senso indicato nel capoverso precedente.
Più in particolare, il contenuto della tesi è il seguente.
I primi due capitoli riguardano il "programma di Erlangen" del Klein. Si tratta di un argomento che si trova spesso esposto nei testi universitari; pertanto, non si è voluto darne una trattazione completa e si è preferito portare l'attenzione su due gruppi di trasformazioni degli spazi euclidei, meno frequentemente citati: il gruppo delle applicazioni bilipschitziane e il gruppo delle trasformazioni cremoniane intere. Entrambi contengono, come sottogruppo, il gruppo delle affinità.
Di conseguenza si inizia l'esposizione, nel primo capitolo, analizzando alcune proprietà invarianti rispetto al gruppo delle affinità, con particolare attenzione alla proprietà che lega la misura di Lebesgue di un insieme alla suddetta collezione.
In seguito, dopo alcuni richiami sulle applicazioni lipschitziane, si introduce la famiglia delle applicazioni bilipschitziane e si studia l'invarianza della dimensione di Hausdorff di un insieme.
Il secondo capitolo è dedicato alle trasformazioni cremoniane, in particolare alle trasformazioni cremoniane intere: alla caratterizzazione di alcune proprietà invarianti, segue la presentazione della "congettura dello jacobiano".
Si passa poi al "punto di vista" di von Staudt. È sembrato opportuno incominciare con alcuni richiami di geometria proiettiva; questi rappresentano il contenuto del capitolo successivo: si descrivono tre diverse impostazioni della geometria proiettiva, a cui si fa riferimento per definire le proiettività, le collineazioni e le involuzioni.
La costruzione grafica di un'involuzione permette di caratterizzare le quaterne armoniche: nel quarto capitolo, dopo una breve presentazione di carattere storico, si enuncia un risultato, noto come teorema di Staudt, che lega le proiettività alle corrispondenze staudiane, cioè alle corrispondenze biunivoche che mutano ogni quaterna armonica in una quaterna armonica.
Il quinto capitolo è dedicato alla discussione di alcune proprietà, prevalentemente topologiche, per le quali è possibile distinguere tra "punti di vista" di Klein e di von Staudt.
A conclusione della tesi, si presentano alcune situazioni di invarianza in altri ambiti della Matematica, con casi particolari in cui i due punti di vista coincidono.

CAPITOLO 1

In prima istanza, nell'ottica del programma di Erlangen, esamineremo l'invarianza di alcune delle più significative proprietà di sottoinsiemi di un certo ambiente (che verrà specificato di volta in volta), rispetto alle collezioni delle affinità e delle applicazioni bilipschitziane, di cui le stesse affinità fanno parte.
Spunti interessanti sono forniti anche dalla teoria della misura e, per questa ragione, risulterà efficace presentare alcune proprietà delle misure di Lebesgue e di Hausdorff, invarianti rispetto ai gruppi delle suddette trasformazioni.

1.1 Affinità

Def. Si dice affinità, un'applicazione biunivoca che può essere rappresentata con la seguente uguaglianza:

$y = \mathrm{A}x + \mathrm{b}$ A è una matrice nxn con determinante non nullo, x, y e b sono vettori di R^n.

Se n = 1, ogni affinità è una similitudine, perchè si rappresenta nella forma $y = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$, con rapporto di similitudine pari a |a|.

Se n = 2 si ha un'affinità del piano Π, cioè una trasformazione che conserva le rette.

Esempi di affinità nel piano:

1) Le similitudini (e le isometrie, in particolare) conservano le rette e sono, dunque, affinità.

2) Dati una retta r, un vettore v, non parallelo ad r e k positivo, si dice omologia di asse r, direzione v e rapporto k la trasformazione $\mathrm{O}_{\mathrm{R,V,K}}$ definita da $\mathrm{O}_{\mathrm{R,V,K}}(\mathrm{P})=\mathrm{P}$ se P è un punto di r; altrimenti $\mathrm{O}_{\mathrm{R,V,K}}(\mathrm{P})=\mathrm{P}'$, con P' punto ottenuto come segue:
si considera la retta s, passante per P e parallela a v e il punto Q di intersezione tra r ed s; P' è il punto appartenente alla semiretta con origine Q passante per P, tale che $d(\mathrm{P}', \mathrm{Q}) = kd(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$.

Prop. Le affinità conservano il parallelismo tra rette, i parallelogrammi e i rapporti tra le distanze di punti allineati.

Data cioè un'affinità α, e P, Q, R punti allineati distinti, sia h tale che

$$d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = hd(\mathrm{P}, \mathrm{R})$$

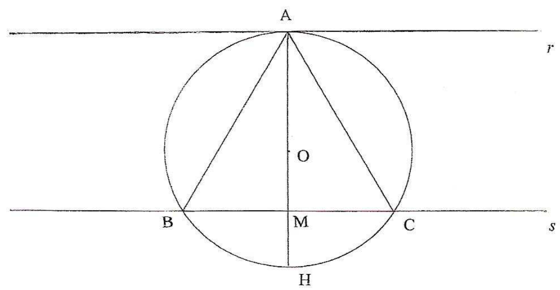
allora i punti α(P), α(Q), α(R), che sono allineati, verificano la condizione:

$$d(\alpha(\mathrm{P}), \alpha(\mathrm{Q})) = hd(\alpha(\mathrm{P}), \alpha(\mathrm{R})).$$

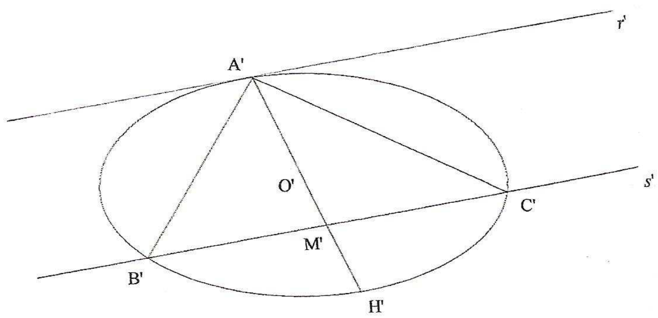
La proprietà di essere una curva algebrica piana è invariante per affinità; si può dimostrare che si conservano anche il grado della curva, il numero e la molteplicità delle sue componenti irriducibili.

Esercizio Si analizza come un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza, si trasforma sotto l'azione di un'affinità.

Sia f un'affinità: essa trasforma il triangolo ABC, inscritto nella circonferenza, in un triangolo A'B'C', inscritto in un'ellisse. Il centro della circonferenza si trasforma nel centro dell'ellisse.
Si vuole provare che, nota l'ellisse trasformata della circonferenza e fissato A'=f(A), il triangolo A'B'C', trasformato di ABC, è determinato.
Si costruisce la parallela r alla retta s per BC, passante per A e ivi tangente alla circonferenza; il segmento BC ha come punto medio M, che è punto medio anche del raggio OH (questo come conseguenza del fatto che il circocentro è anche baricentro del triangolo isoscele e le mediane risultano divise dal baricentro in due parti, una doppia dell'altra).



Essendo *f* un'affinità, le rette parallele *r* ed *s* sono da essa trasformate nelle rette parallele *r* ' ed *s*'.
Fissato A'=*f*(A), la tangente per A' all'ellisse (trasformata della circonferenza) risulta essere la trasformata di *r*. Per quanto detto prima, la trasformata di *s* è parallela a *r* ' e passa per M' = *f*(M), punto medio di O'H' (con O'=*f*(O), centro dell'ellisse). M' sarà anche punto medio di B'C', segmento che giace su *s*'. B' e C' sono i trasformati di B e C: si individua, pertanto, il triangolo A'B'C'.



Un'affinità può trasformare una circonferenza in un'ellisse arbitraria e un triangolo equilatero in un triangolo arbitrario, però non può trasformare un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza in un triangolo del tutto arbitrario inscritto nell'ellisse trasformata.

1.2 Affinità e misura di Lebesgue

Considerato lo spazio di misura (R^n, *L*, λ), con la σ-algebra dei misurabili secondo Lebesgue e la misura di Lebesgue; vale il seguente:

<u>Teor.</u> Ogni affinità altera la misura di Lebesgue di un sottoinsieme *B* di *L* di un fattore costante, pari a |det A|.

Si deve provare che, data un'affinità α, vale la seguente uguaglianza:

$$\lambda\,(\alpha(B)) = \rho\lambda\,(B), \qquad \text{con } \rho = |\det A|.$$

Premettiamo alla dimostrazione il seguente risultato:

Teor. Sia Ω un aperto di R^n e φ: $\Omega \rightarrow R^n$ un'applicazione iniettiva di classe C^1, tale che per ogni x in Ω, la matrice jacobiana $J\varphi(x)$ non sia singolare. Sia B un sottoinsieme misurabile di Ω, chiuso e limitato; allora anche $\varphi(B)$ è misurabile e vale la formula:

$$\int_{\varphi(B)} f(x')dx' = \int_B f(\varphi(x))\rho(x)dx, \qquad \text{ove } \rho(x) = |\det J\varphi(x)|,$$

per ogni funzione f: $\varphi(B) \rightarrow R$, continua.

Certamente si può considerare $\Omega = R^n$: una qualunque affinità α ($=\varphi$) soddisfa alle ipotesi del teorema.
È chiaro che vale la seguente relazione:

$$\int_{\alpha(B)} f dx = \int_B (f \circ \alpha)\rho dx \qquad \text{e } B \text{ è misurabile secondo Lebesgue.}$$

Essendo α un'affinità, nella forma y = Ax + b**,** è chiaro che la matrice jacobiana di α è proprio A: si ha dunque $\rho = |\det A|$.
Poichè la misura di Lebesgue dell'insieme $\alpha(B)$, può essere presentata come l'integrale sull'insieme stesso della costante 1, sfruttando il teorema di cui sopra si ottiene:

$$\lambda(\alpha(B)) = \int_{\alpha(B)} dx' = \int_B \rho dx = \rho \int_B dx = \rho\lambda(B) \qquad \blacklozenge$$

Oss. Nell'ottica del Programma di Erlangen, la misura di un sottoinsieme misurabile è invariante per isometrie.
Le proprietà di avere misura non nulla e misura finita sono, invece, invarianti per affinità.
Vale, inoltre, il seguente:

Teor. Dato un gruppo G, localmente compatto (cioè i punti hanno intorni compatti) e di Hausdorff, esiste un'unica misura μ finita sui compatti e positiva sugli aperti di G, invariante per traslazioni.

1.3 Applicazioni lipschitziane

Def. Sia X uno spazio metrico, un'applicazione f: X → X si dice lipschitziana se esiste una costante positiva L tale per cui:

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y).$$

Se lo spazio metrico è proprio la retta reale, come distanza si considera quella euclidea: $d(x, y)= |x-y|$.

Esempi:

* La funzione quadrato non è lipschitziana; fissata un'arbitraria costante L, basta scegliere $y = 0$ e $x > L$.

* La restrizione di tale funzione a un intervallo risulta invece lipschitziana: considerando l'intervallo [-5, 5]

$$\left|x^2 - y^2\right| = |x + y||x - y| \leq (|x| + |y|)|x - y| \leq 10|x - y|$$

  Si generalizza scegliendo un intervallo [-M, M] e L=2M.

* La funzione radice $f(x) = \sqrt{x}$ non è lipschitziana: scegliendo $y = 0$, $\sqrt{x} \leq Lx$ è falsa per tutti gli x positivi se $L = 0$, per $0 < x < L^{-2}$ se $L>0$. Si può ottenere la lipschitzianità restringendosi a particolari intervalli del tipo $[\delta, +\infty]$, con la scelta $L = \dfrac{1}{2\sqrt{\delta}}$.

* La funzione segno non è lipschitziana.

Def. Una funzione f: $[a, b]$→R si dice a variazione limitata se, suddiviso l'intervallo $[a, b]$ in un numero finito di parti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, la variazione $V = \sum_{i=0}^{n} \left| f(x_{i+1}) - f(x_i) \right|$ è finita.

Prop. Ogni funzione lipschitziana è a variazione limitata.

Per ipotesi sia f una funzione lipschitziana sull'intervallo [a, b], esiste allora una costante L tale per cui:

$$d(f(x), f(y)) = Ld(x, y).$$

Si ha:

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| = d(f(x_{i+1}), f(x_i)) \leq Ld(x_{i+1}, x_i) = L|x_{i+1} - x_i| = L(x_{i+1} - x_i)$$

L'ultimo passaggio è giustificato dalla scelta degli estremi dei sottointervalli.
Si ottiene:

$$V = \sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq L \sum_{i} (x_{i+1} - x_i) = L(b - a)\,,$$

poichè i termini intermedi si elidono a coppie.
La variazione è, dunque, finita. ♦

Il viceversa è falso.
Si può mostrare che ogni applicazione monotona è a variazione limitata: la funzione radice $f(x) = \sqrt{x}$ è monotona, perciò a variazione limitata, ma non è lipschitziana come già detto.

1.4 Applicazioni bilipschitziane

Def. Sia X uno spazio metrico, un'applicazione f: X → X si dice bilipscitziana se esistono due costanti positive c_1 e c_2 tali che:

$$c_1 d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \leq c_2 d(x, y), \text{ per ogni } x \text{ e } y \text{ in X.}$$

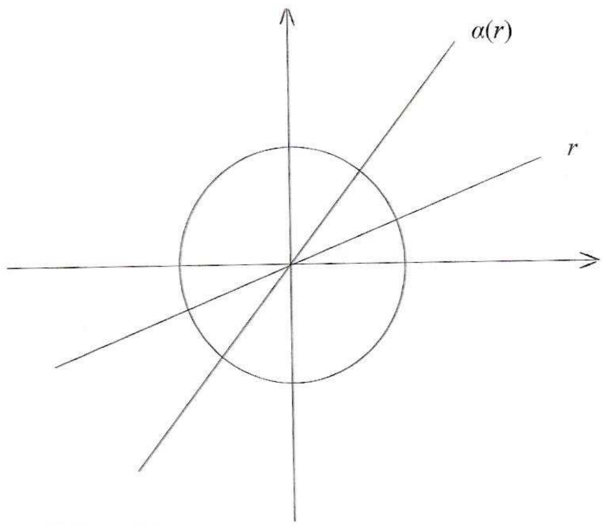
In altre parole, si richiede che f sia lipschitziana e invertibile e che anche l'inversa sia lipschitziana.

Prop. Ogni affinità è un'applicazione bilipschitziana.

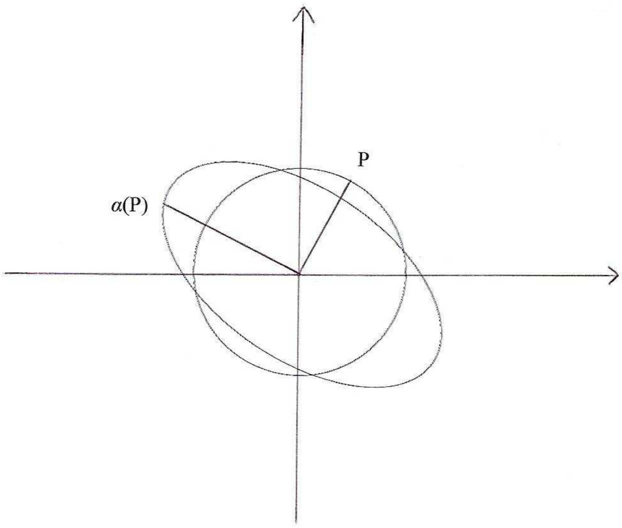
Per comodità grafica, ci si riferisce a un'affinità nel piano; la dimostrazione si estende facilmente a una qualunque affinità di R^n.
Sia, dunque α: $R^2 \rightarrow R^2$.
Si consideri un'arbitraria retta r, passante per l'origine O.

$\alpha|_r : r \rightarrow \alpha(r)$ è una similitudine di rapporto $\rho(r)$.

Si consideri, ora, la circonferenza unitaria S^1, centrata nell'origine; $\alpha(S^1)$ è un'ellisse centrata nell'origine, nell'ipotesi che si abbia $\alpha(O) = O$ (ipotesi certamente non limitativa, dato che a essa ci si può sempre ricondurre mediante una traslazione).



Sia P un punto della circonferenza e sia Q il suo trasformato: essendo OP=1, OQ fornisce il rapporto di similitudine, relativo alla retta per OP.
Essendo S^1 compatta ed α continua, $\alpha(S^1)$ è un compatto. Per cui la distanza dei punti di $\alpha(S^1)$ da O ha massimo M. Tale valore è una costante di Lipschitz per α.



Analogamente, α^{-1} è un'affinità e ci permette di trovare un valore N tale per cui:

M$d(x, y) \leq d(\alpha(x), \alpha(y)) \leq$ N$d(x, y)$, per ogni x e y in R. ♦

1.5 Misura di Hausdorff

La misura di Hausdorff può essere realizzata sfruttando il metodo di Caratheodory, che prevede la costruzione di una σ-algebra di misurabili e di una misura σ-additiva su tale collezione, a partire da una misura esterna.
Senza dilungarsi nei dettagli di tale costruzione, si danno le seguenti definizioni:

Def. Sia E un sottoinsieme di R^n e δ un reale positivo. Un δ-ricoprimento di E è una collezione di insiemi $\{E_i\}$, tali per cui:

$$E \subseteq \bigcup_i E_i \quad \text{e} \quad 0 < \text{diam}(E_i) \leq \delta.$$

Fissato, $s \geq 0$, si pone:

$$H_\delta^s(E) = \inf\left\{\sum_i [diam(E_i)]^s\right\}, \text{ con } \{E_i\}\ \delta\text{-ricoprimento di } E.$$

Def. Si dice misura di Hausdorff s-dimensionale di un insieme E, la quantità:

$$H^s(E) = \lim_{\delta \to 0^+} H^s_\delta(E).$$

Def. La dimensione di Hausdorff di un insieme E si definisce come:

$$\dim_H(E) = \inf\{s \geq 0 : H^s(E) = 0\}.$$

Teor. Data una funzione f: $E \to R^m$, lipschitziana con costante di Lipschitz L, $H^s(f(E)) \leq L^s H^s(E)$, per ogni $s \geq 0$.

Supposta la misura di Hausdorff dell'insieme E finita, e supposta L strettamente positiva, fissati ε, $\delta > 0$, $H^s_\delta(E) < +\infty$. Esiste dunque un δ-ricoprimento di E per cui:

$$\sum_i diam(E_i) \leq H^s_\delta(E) + \varepsilon.$$

Poichè $\{f(E_i)\}$ è un $L\delta$-ricoprimento di $f(E)$:

$$H^s_{L\delta}(f(E)) \leq \sum_i diam(f(E_i))^s \leq L^s \sum_i diam(E_i)^s \leq L^s (H^s_\delta(E) + \varepsilon);$$

Passando al limite per ε, δ tendenti a 0^+, si ha la tesi. ♦

Una similitudine è una trasformazione che altera le distanze di un rapporto costante: la similitudine S è tale che $d(S(x), S(y)) = kd(x, y), \forall x, y$. Il numero k si dice rapporto di similitudine.
Si osserva che una similitudine è certamente un'applicazione lipschitziana.
Come corollario al teorema precedente, si ha:

Coroll. Sia S: $R^n \to R^m$ una similitudine di rapporto k, allora per ogni sottoinsieme E di R^n e per ogni $s \geq 0$, vale la formula:

$$H^s(S(E)) = k^s H^s(E), \quad s \geq 0.$$

In particolare, la misura di Hausdorff è invariante per isometrie.

La dimostrazione consiste nel provare che vale la doppia disuguaglianza.

Una similitudine è un'applicazione lipschitziana, dunque
$H^s(S(E)) \le k^s H^s(E)$.
Viceversa, considerato l'operatore π: $R^m \to S(R^n)$, proiezione ortogonale, l'applicazione $g = (S^{-1} \circ \pi)$: $R^m \to R^n$ è ben definita e lipschitziana con $L = 1/k$.
Poichè $E = g(S(E))$, sempre come conseguenza della proposizione valida per le funzioni lipschitziane, si ha:

$$H^s(E) \le L^s H^s(S(E)) = k^{-s} H^s(S(E))$$

che prova l'altra disuguaglianza. ♦

Poichè $H^s(f(E)) \le L^s H^s(E)$, con f lipschitziana, se il primo membro è finito lo è certamente anche il secondo; da cui: $\dim_H(f(E)) \le \dim_H(E)$.
Segue immediatamente che se f è un'applicazione bilipschitziana vale anche l'altra disuguaglianza e, quindi, l'uguaglianza; ciò prova la seguente

Prop. La dimensione di Hausdorff è invariante per applicazioni bilipschitziane.

Oss. La dimensione di Hausdorff non è invariante rispetto al gruppo degli omeomorfismi.
Come esempio si considera l'insieme di Cantor.
Si suddivide l'intervallo [0, 1] in tre parti uguali e si considerano le due più esterne F_1, F_2. Ciascuna di esse viene divisa in tre parti di cui si considerano quelle esterne F_3, F_4, F_5, F_6; iterando questa costruzione e intersecando gli F_n, si ottiene un insieme C, detto di Cantor.
Si può dimostrare che la dimensione di Hausdorff dell'insieme di Cantor è $\dim_H C = \frac{\log 2}{\log 3}$.
Partendo sempre dall'intervallo [0, 1], si può pensare di suddividerlo in cinque parti uguali, per considerare le due più esterne.
Iterando il procedimento, si ottiene un insieme K, intersezione delle parti considerate, la cui dimensione di Hausdorff è $\dim_H K = \frac{\log 2}{\log 5}$.
È evidente che C e K sono omeomorfi.
Nessun omeomorfismo $C \to K$ conserva la misura di Hausdorff di C.

CAPITOLO 2

La cosiddetta geometria birazionale muove i suoi primi passi studiando le proprietà degli spazi proiettivi che sono invarianti per trasformazioni birazionali. Agli inizi del Novecento, il concetto di trasformazione birazionale si estende alle varietà algebriche e gran parte della geometria algebrica diventa appunto quella birazionale, intendendo ora con questo termine lo studio delle proprietà delle varietà algebriche, invarianti per trasformazioni birazionali.
Ci occuperemo dello studio di alcune proprietà di invarianza, rispetto alla famiglia delle trasformazioni cremoniane intere, sottogruppo della collezione delle trasformazioni birazionali; si vedrà, in particolare, che le affinità sono trasformazioni cremoniane intere.

2.1 Trasformazioni cremoniane

Siano dati Π e Π' due piani proiettivi su un campo commutativo algebricamente chiuso e con caratteristica nulla, con coordinate proiettive (x, y, z) e (x', y', z'); ogni trasformazione C tra punti dei piani, che sia biunivoca e rappresentabile, insieme all'inversa, mediante funzioni razionali delle coordinate proiettive é detta cremoniana o birazionale.
Date C_1 e C_2 trasformazioni cremoniane tra i piani Π e Π', Π' e Π'', la trasformazione $C = C_1 \circ C_2$ è ancora cremoniana. La collezione delle trasformazioni cremoniane è un gruppo.
Se $C = C_1 \circ C_2$, si dice che C è decomposta nel prodotto C_1 per C_2.
Vale il seguente:

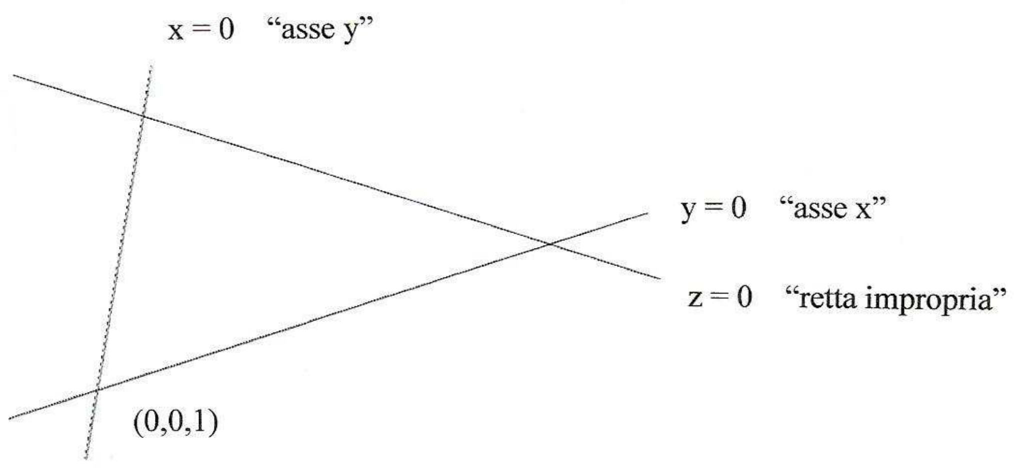
<u>Teorema di Noether</u> Ogni trasformazione cremoniana tra piani proiettivi può essere decomposta nel prodotto di un numero finito di trasformazioni quadratiche.

Si consideri il seguente esempio:

siano (x, y, z) e (x', y', z') coordinate proiettive omogenee in un piano proiettivo reale:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{x} \\ y' = \dfrac{1}{y} \\ z' = \dfrac{1}{z} \end{cases}$$ da cui, moltiplicando per *xyz*, si ottiene: $$\begin{cases} x' = yz \\ y' = xz \\ z' = xy \end{cases}$$

Si tratta di una corrispondenza biunivoca tra punti del piano proiettivo che abbiano tutte le coordinate diverse da 0.
I punti con due coordinate nulle ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)) non hanno immagine: se ciò accadesse, l'immagine avrebbe tutte e tre le coordinate nulle.



Il dominio della trasformazione non è, pertanto, l'intero piano proiettivo; inoltre, per i punti con una coordinata nulla, la trasformazione non risulta essere iniettiva (tutti i punti con la prima coordinata nulla, distinti da (0,1,0) e (0,0,1), hanno come immagine (1,0,0)).
La terna di punti (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), si dice dei punti fondamentali.
Ogni punto del piano proiettivo è punto fondamentale di qualche trasformazione cremoniana, perciò, mentre risulta che le trasformazioni cremoniane formano "gruppo astratto" rispetto alla composizione, appare difficile presentarle come gruppo di trasformazioni del piano.
Per questa ragione, si può concludere che è dubbio che si possa inquadrare il gruppo delle trasformazioni cremoniane nel programma di Erlangen.

2.2 Trasformazioni cremoniane intere

Non presenta la "complicazione" descritta nell'ultima parte del paragrafo precedente una particolare classe di trasformazioni cremoniane, dette intere.

Def. Dati Π e Π' due piani affini sul campo complesso, con coordinate affini (x, y) e (x', y'), una trasformazione tra punti dei piani esprimibile, con l'inversa, mediante polinomi è detta cremoniana intera.

Una trasformazione cremoniana intera ha la forma:

$$T: \begin{cases} x' = \vartheta(x, y) \\ y' = \xi(x, y) \end{cases}.$$

Prop. In coordinate non omogenee, il determinante della matrice jacobiana di una trasformazione cremoniana intera è una costante non nulla.

Si vuole provare che $\dfrac{\partial(f_1, f_2, \ldots f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots x_n)} = k \neq 0.$

Sia T una trasformazione cremoniana intera e J la sua matrice jacobiana, si ha che:

$$J(T \circ T^{-1}) = J(T) \circ J(T^{-1})$$
$$\det(J(T \circ T^{-1})) = \det(J(T)) \circ \det(J(T^{-1})) = \det(J(T)) \circ \det^{-1}(J(T)) = 1$$

Dunque det(J(T)) è un polinomio invertibile, perciò una costante. ♦

Chiamasi Corrispondenza di Möbius tra piani affini una corrispondenza di classe C^1 con jacobiano costante e non singolare.
Ogni trasformazione cremoniana intera è una corrispondenza di Möbius: la famiglia delle cremoniane intere è un sottogruppo della famiglia delle corrispondenze.
Se si considerano due piani affini reali contenuti nei piani affini complessi già definiti, si possono introdurre in quest'ultimi dei riferimenti reali. Una trasformazione cremoniana intera, espressa da polinomi reali su piani complessi è detta reale.

Prop. Ogni affinità è una trasformazione cremoniana intera; non vale il viceversa.

Le affinità si possono scrivere mediante le coordinate cartesiane, come:

$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ con f e g polinomi di primo grado nelle indeterminate x e y.

Si può dunque riscrivere nella forma:

$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{cases}$ con a_{ij} e b_k reali, i, j, k = 1, 2.

Una trasformazione cremoniana intera è biunivoca se e solo se il determinante della sua matrice jacobiana è non singolare: $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.
Dunque un'affinità è una cremoniana intera. ♦

Le trasformazioni cremoniane intere hanno come sottogruppo il gruppo delle affinità.

Prop. Sono invarianti per trasformazioni cremoniane intere le seguenti proprietà:

1. essere una curva algebrica;
2. il rapporto tra aree di regioni misurabili corrispondenti;
3. le proprietà topologiche di sottoinsiemi del piano.

La seconda proprietà discende dal fatto che il determinante di una cremoniana intera è costante, la terza dal fatto che le cremoniane intere sono omeomorfismi.

In generale non si conservano la proprietà di essere una conica e l'ordine di una curva algebrica.
Si vede, con un esempio, che non è invariante la proprietà di essere una retta.

Sia C: $\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1^2 + x_2 \end{cases}$ una trasformazione cremoniana intera di R^2.

$x_1 = x_2$ rappresenta una retta; applicando la trasformazione introdotta, si ottiene $y_1 = y_2 - y_1^2$, che rappresenta l'equazione di una parabola.

2.3 Congettura dello jacobiano

Come notizia, si aggiunge la seguente congettura, nota come "congettura dello jacobiano":

Se le equazioni di una trasformazione T si possono scrivere nella forma:

$$T: y_i = f(x_i)\ , \qquad i=1,2$$

e se:

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = k \neq 0\,,$$

la trasformazione è cremoniana intera.

Tale congettura è, usualmente, formulata e studiata in campo complesso; si può dimostrare che se il risultato fosse vero in campo complesso, lo sarebbe anche in campo reale.
Nel 1939 O. H. Keller studiò la congettura e concluse che le ipotesi date sono sufficienti per caratterizzare le trasformazioni cremoniane intere con l'aggiunta di una delle seguenti:

- l'inversa della trasformazione è razionale;
- l'inversa della trasformazione è esprimibile mediante funzioni intere.

Le numerose dimostrazioni proposte, sembrano contenere diversi errori.
La congettura resta un problema aperto per la dimensione 2 e le dimensioni superiori, mentre è di ovvia dimostrazione in ambito monodimensionale:

<u>Prop.</u> Se l'equazione di una trasformazione T: R→R si può scrivere nella forma $y = f(x)$, con f polinomio e se $f'(x)$ è una costante non nulla, allora T è invertibile e T^{-1} si può esprimere come un polinomio.

Se $f'(x) = a$, con a numero reale non nullo, è chiaro che $f(x) = ax + b$.
f è invertibile e l'inversa può essere scritta nella forma:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}.$$

L'ipotesi f è un polinomio è, invero, sovrabbondante. ♦

CAPITOLO 3

La geometria proiettiva trae le proprie origini nelle regole della prospettiva: gli spazi in cui essa viene studiata sono caratterizzati da proprietà di natura grafica simili a quelle del disegno prospettico.
Richiameremo alcune delle principali proprietà e definizioni della geometria proiettiva, non senza dare importanza al gruppo delle proiettività, intese nell'ottica del programma kleiniano e l'impostazione assiomatica.
Nella discussione, saranno affiancate tre diverse impostazioni della geometria proiettiva.

3.1 Metodi di introduzione della geometria proiettiva

Per introdurre la geometria proiettiva, si possono seguire diverse strade: ne indicheremo, in questa sede, tre: la prima prevede di definire lo spazio proiettivo come ampliamento di quello affine, la seconda sfrutta proprietà dell'algebra lineare, la terza è di tipo assiomatico.

Descriviamo brevemente la prima impostazione.
Date nel piano affine due rette distinte, esse hanno in comune un punto, oppure la direzione: si conviene che due rette con la direzione in comune, hanno in comune un punto improprio.
Analogamente, diremo che due piani distinti, nello spazio tridimensionale, hanno in comune una retta, oppure una retta impropria se sono paralleli.
Si dice poi che punti e rette improprie giacciono su un medesimo piano, detto improprio.
Il piano affine, ampliato con l'aggiunta di una retta impropria, da luogo al piano proiettivo; lo spazio affine, a cui si aggiunge un piano improprio, da luogo allo spazio proiettivo.
Ripetiamo che in ambito proiettivo non esiste il concetto di parallelismo.
Con questi presupposti, nello spazio proiettivo è possibile dimostrare la validità delle seguenti "proposizioni fondamentali":

Per due punti distinti passa una e una sola retta.
Per un punto e una retta che non lo contenga passa uno e un solo piano.
Due piani distinti hanno in comune una e una sola retta.
Un piano e una retta, non giacente in esso, hanno in comune uno e un solo punto.

Un passo successivo nell'impostazione che stiamo descrivendo, consiste nell'introduzione delle coordinate proiettive (omogenee) a partire dalle coordinate affini.

Def. Una n-pla ordinata di variabili si dice omogenea se:
* non è costituita da n valori tutti nulli;
* n-ple di valori ordinatamente proporzionali vengono identificate.

Il secondo tipo di impostazione consiste nel generalizzare la nozione di coordinate omogenee. Si giunge alla definizione di spazio proiettivo, costruito su uno spazio vettoriale, solitamente di dimensione finita.
Più precisamente, si da la seguente definizione:

Def. Sia K un campo e sia V uno spazio vettoriale su K. Lo spazio proiettivo costruito su V, è l'insieme dei sottospazi vettoriali unidimensionali di V, cioè l'insieme delle rette per l'origine in V.

Lo spazio proiettivo su V viene usualmente indicato con **P**V. Per definizione, la sua dimensione è: dim **P**V = dim V − 1. Si parla di spazio proiettivo di dimensione n – 1 sul campo K; il campo K può essere generalizzato a un anello con divisione.

Il simbolo [v] indicherà il sottospazio vettoriale, di dimensione 1, generato da un elemento $v \neq 0$ di V.
Per definizione, i sottospazi proiettivi di **P**V sono gli insiemi della forma **P**W, con $W \neq \{0\}$ sottospazio vettoriale di V.
Gli iperpiani sono i sottospazi di dimensione dim **P**V – 1. Nello spazio proiettivo tridimensionale, gli iperpiani sono gli usuali piani.
In questa seconda impostazione, si può dimostrare la formula di Grassmann:

Dati S e T due sottospazi proiettivi di **P**V, se
dim S + dim T $\geq$ dim **P**V, allora $S \cap T \neq \varnothing$; inoltre:
dim $(S \cap T) \geq$ dim S + dim T – dim **P**V

Una conseguenza immediata della formula di Grassmann è che, in uno spazio proiettivo di dimensione 2, cioè in un piano proiettivo, due rette distinte si incontrano sempre in un solo punto. Più in generale, una retta e un iperpiano in uno spazio proiettivo di dimensione qualsiasi si incontrano sempre in un punto solo, a meno che la retta non sia contenuta nell'iperpiano.

Passiamo alla terza impostazione.
La costruzione assiomatica assume come postulati quelle quattro proposizioni fondamentali, che vengono invece dimostrate nella prima impostazione presentata e che nella seconda impostazione, seguono dalla formula di Grassmann.
Si potrà, così, parlare di spazio (o piano) grafico, oppure di spazio (o piano) proiettivo astratto.
È un fatto notevole che, per spazi di dimensione non inferiore a 3, qualsiasi spazio proiettivo astratto è lo spazio proiettivo costruito su uno spazio vettoriale, sia pure uno spazio vettoriale su un anello con divisione, non necessariamente su un campo.
In dimensione 2 invece gli assiomi di incidenza sono abbastanza restrittivi da definire delle strutture tutt'altro che banali, ma non abbastanza forti da imporre a queste di provenire da spazi vettoriali, se non sotto opportune condizioni aggiuntive.
Ciò ha dato spunto a numerose ricerche nell'ambito dei piani proiettivi astratti, in cui restano ancora numerosi problemi aperti.
Nel paragrafo successivo, ci soffermeremo sull'impostazione assiomatica accennando, altresì, agli assiomi di ordinamento e continuità, indispensabili per caratterizzare lo spazio proiettivo reale tridimensionale.

Concludiamo questo primo paragrafo sulla geometria proiettiva con la definizione delle cosiddette "forme fondamentali", alle quali faremo a volte riferimento nel seguito.
Si dicono "forme fondamentali" le seguenti:

1) la punteggiata: totalità dei punti di una retta (detta il sostegno);
2) il fascio di piani: totalità dei piani passanti per una retta;
3) il piano punteggiato: totalità dei punti appartenenti a un piano;
4) la stella di piani: totalità dei piani passanti per un punto;
5) il piano rigato: totalità delle rette appartenenti a un piano;
6) la stella di rette: totalità delle rette passanti per un punto;
7) lo spazio punteggiato: totalità dei punti;
8) lo spazio dei piani: totalità dei piani;
9) il fascio di rette: totalità delle rette passanti per un punto e contenute in un piano.

Sono forme di prima specie la punteggiata e i fasci, di seconda specie i piani e le stelle, di terza specie lo spazio punteggiato e lo spazio di piani.

3.2 L'impostazione assiomatica

Vengono assunti come concetti primitivi della geometria proiettiva, quelli di punto, retta e piano.

Def. Dato un insieme S e una famiglia R di suoi sottoinsiemi (chiamati rette), diremo che la coppia (S, R) è un piano proiettivo astratto, se valgono le quattro proprietà:

* Per due punti distinti di S passa una e una sola retta.
* Due rette in S si incontrano in almeno un punto.
* In S ci sono tre punti non allineati.
* Ogni retta in S contiene almeno tre punti.

Ogni piano proiettivo (su un campo o, più in generale, su un anello con divisione) è certamente un piano proiettivo astratto, ma il viceversa è falso.
Le quattro proprietà enunciate si dicono assiomi di incidenza, o di appartenenza, del piano proiettivo.

Si dice spazio proiettivo tridimensionale astratto (o spazio grafico) una terna (S, R, P), dove S è un insieme, R una famiglia di suoi sottoinsiemi, detti rette, P una famiglia di suoi sottoinsiemi, detti piani, tali che valgano i seguenti

Postulati di incidenza

1) Per due punti distinti di S passa una e una sola retta.

2) Per tre punti non allineati di S passa uno e un solo piano.

3) Una retta e un piano in S si incontrano in almeno un punto.

4) Due piani in S hanno almeno una retta in comune.

5) In S ci sono quattro punti non complanari, a tre a tre non allineati.

6) Ogni retta in S contiene almeno tre punti.

I postulati di incidenza non sono sufficienti a caratterizzare lo spazio proiettivo tridimensionale reale: sono necessari anche postulati di ordinamento e continuità.
Si può introdurre un ordinamento, dotato di due versi, che caratterizza gli elementi di una forma di prima specie.
Pensando i punti di una retta assimilabili a quelli di una circonferenza, passando da una forma F a una forma F' con operazioni di proiezione e sezione, all'ordinamento naturale (circolare) degli elementi di F corrisponde quello degli elementi di F': l'ordinamento circolare non è una relazione d'ordine, nel senso usuale della teoria degli insiemi.

Postulati dell'ordinamento

1) Fissati un qualunque elemento A di una forma e un verso, gli elementi della forma si succedono nell'ordinamento naturale in cui A è il primo elemento e si presentano le seguenti circostanze:

    - di due elementi distinti, ve n'è sempre uno che precede l'altro;
    - se B precede C e C precede D, B precede D;
    - tra due elementi distinti c'è sempre un elemento intermedio;
    - esiste sempre il successivo di un fissato elemento.

2) I due ordini naturali di una forma che hanno lo stesso primo elemento e versi opposti danno luogo all'ordinamento naturale circolare della forma.

3) Due ordini naturali con lo stesso verso, ma con primi elementi distinti, si deducono l'uno dall'altro, permutando circolarmente gli elementi di uno fino a far coincidere i primi elementi.

4) L'ordinamento circolare di una forma di prima specie ha carattere grafico.

Il verso di una forma di prima specie viene individuato mediante l'assegnazione di una terna di punti.
Scelti due elementi A e B su di una forma di prima specie, si ottengono due segmenti proiettivi (tra loro complementari) costituiti dagli estremi A, B e dall'insieme degli elementi che, nell'ordinamento naturale, risultano tra essi compresi.
Due elementi C e D, diversi da A e B, si dice che separano A e B se appartengono a due diversi segmenti complementari di estremi A, B. Se C e D appartengono allo stesso segmento, essi non separano A e B; se anche C e D sono distinti può accadere che A e B separino, o non separino, C e D. Si

parla in questo caso di coppie di punti che si separano, o non si separano, in una forma di prima specie.

Vale, infine, il postulato della continuità, secondo Dedekind.

Postulato di continuità

Se in una forma di prima specie, gli elementi di un segmento ordinato AB sono ripartiti in due classi, prive di elementi comuni e tali che tutti gli elementi della prima precedano gli elementi della seconda, esiste un elemento C di AB tale che ogni elemento che precede C appartiene alla prima classe e ogni elemento che segue C appartiene alla seconda.

3.3 Prospettività e proiettività

Siano dati, nello spazio ordinario, un punto P e due piani Π_1 e Π_2 non contenenti P. Si definisce un'applicazione $\xi : \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$, chiamando ξ(Q) il punto di intersezione della retta passante per P e Q con Π_2. Se i piani non sono paralleli, ξ(Q) non è definito per tutti i Q, e precisamente non è definito per i Q che appartengono alla intersezione di Π_1 con il piano per P parallelo a Π_2.
Astrattamente, l'immagine di una retta *r*, giacente su Π_1 è la retta ottenuta intersecando Π_2 con il piano passante per P ed *r* (con le eccezioni dovute, per ora, al fatto che ξ non è definita su tutto Π_1).
L'applicazione $\xi : \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$ è una prospettività. La prospettività si può definire anche come la trasformazione in cui le rette che uniscono due punti corrispondenti passano tutte per uno stesso punto, chiamato centro di prospettiva.
Figure giacenti su due piani, ottenibili l'una dall'altra con una prospettività, si dicono equivalenti. Si osserva che la relazione tra figure, che si sono definite equivalenti, non è di equivalenza, infatti la composizione di due prospettività non è, necessariamente, una prospettività.
Si preferisce considerare equivalenti due figure, ognuna delle quali giaccia in un piano, se una può essere ottenuta dall'altra tramite la composizione di un numero finito di prospettività o, come si suole dire, attraverso una proiettività.
La relazione di proiettività è di equivalenza: due figure sono proiettivamente equivalenti se e solo se si corrispondono in una proiettività.

Le possibili definizioni di proiettività sono molteplici: si può chiamare proiettività una applicazione che conserva il birapporto, ad esempio; daremo, in questa sede, due diverse definizioni di proiettività, precisando che la prima ha scopo puramente conoscitivo.
Iniziamo con il ricordare alcune nozioni utili.

Def. Data una matrice quadrata nxn (n ≥ 2):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

si dice sostituzione lineare omogenea, definita da tale matrice, l'operazione che trasforma una fissata n-pla di valori **x**, in una n-pla **y**, data dalla risoluzione del sistema:

$$y_h = (a_{hk})x_k \qquad h,k = 1,2,\dots n$$

Def. Dati quattro numeri x_1, x_2, x_3, x_4, si definisce birapporto, la quantità:

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = \frac{(x_1 x_2 x_3)}{(x_1 x_2 x_4)} = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}.$$

È ora possibile caratterizzare le proiettività.

Def. 1 Si dice proiettività una corrispondenza biunivoca tra due forme fondamentali, analiticamente rappresentabile mediante una sostituzione lineare omogenea.

Def. 2 Dati **P**V e **P**W due spazi proiettivi su uno stesso campo, una proiettività tra i due spazi è un'applicazione π : **P**V→ **P**W della forma

$$\pi[v] = [\zeta(w)]$$

con ζ : V→ W isomorfismo.

A questo punto, dato uno spazio vettoriale V e due suoi iperpiani U e W, considerato un punto $[x]$ di **P**V, esterno sia a **P**U sia a **P**W, la prospettività di centro $[x]$ tra i due iperpiani proiettivi è l'applicazione ξ così definita: ξ(Q) è il punto d'intersezione tra **P**W e la retta per $[x]$ e Q.

Questa definizione di prospettività non si discosta molto da quella data poc'anzi, mentre appare una discrepanza tra la seconda definizione di proiettività e la costruzione di proiettività come composizione di prospettività.
In realtà, le definizioni sono equivalenti dal momento che, sfruttando diversi risultati, tra cui il fatto che ogni prospettività è una proiettività, si può provare che in uno spazio proiettivo, di dimensione arbitraria, ogni proiettività tra due iperpiani dello spazio è composizione di prospettività: la dimostrazione avviene per induzione sulla dimensione dello spazio.
Anche il risultato seguente, noto come "Teorema fondamentale" della geometria proiettiva, ricopre un ruolo molto importante, per lo scopo illustrato al capoverso precedente:

<u>Teor.</u> Sia Π un piano proiettivo ed l una retta; considerate due terne distinte di punti su l, esiste un'unica proiettività, la quale muta una terna nell'altra.

Si è dimostrato che questo risultato vale se e soltanto se il piano proiettivo è costruito a partire da un campo.
Con qualche complicazione nell'uso delle notazioni, il teorema può essere esteso a spazi proiettivi di dimensione arbitraria su un campo.

3.4 Invarianza per proiettività

Scopo primigenio di questa tesi è lo studio delle proprietà invarianti rispetto a gruppi di trasformazioni: la geometria proiettiva piana si occupa delle proprietà del piano, invarianti per proiettività.
I triangoli e i quadrangoli sono equivalenti per proiettività, quindi si conservano: esiste sempre qualche proiettività che muti triangoli e quadrangoli in triangoli e quadrangoli, così come esiste sempre qualche affinità, che goda della stessa proprietà – d'altra parte, si può dimostrare che ogni affinità è una proiettività.
Alcune proprietà che non si conservano rispetto alla collezione delle proiettività sono:

1) il parallelismo tra rette;
2) il rapporto fra le aree;
3) la convessità.

Il seguente esempio mostra chiaramente che una proiettività non conserva il rapporto tra le aree: una regione circolare del piano può essere trasformata nella regione dei punti interni di un'iperbole, che è illimitata e con area infinita.
La terza proprietà risulta essere la più complicata da giustificare: è facile parlare di convessità in geometria euclidea; chiamiamo convesso un sottoinsieme del piano che contenga il segmento, congiungente due qualunque suoi punti.
Per i sottoinsiemi del piano proiettivo, la definizione non è parimenti immediata.
Pensiamo come spazio totale a un cerchio; parlare di convessità per sottoinsiemi del cerchio ci pone in una situazione poco gestibile: presi due punti del bordo, risulta impossibile stabilire quale dei due archi sia il segmento di estremi i due punti.
Analogamente, dati due punti su una retta nel piano proiettivo, essi dividono la retta in due segmenti complementari.
La proprietà è da intendersi come segue: un convesso, nel senso della geometria euclidea, può essere trasformato da una proiettività, in una figura che, dal punto di vista euclideo, non è più convessa.

3.5 Collineazioni

Le applicazioni "naturali" tra spazi proiettivi, sono quelle che si possono costruire sfruttando il gruppo degli assiomi di incidenza, che si possono anche chiamare postulati grafici.

Def. Le applicazioni biunivoche tra spazi proiettivi, che mandano rette in rette, piani in piani, e così via, si dicono collineazioni.

La composizione di due collineazioni è una collineazione e l'inversa di una collineazione è sempre una collineazione: le collineazioni formano, perciò, un gruppo.
Se π è una proiettività, essa è chiaramente una collineazione. In generale il viceversa è falso; si può affermare che, per i campi reale e razionale vale anche il viceversa: vediamone la ragione.
Sia K un campo; un automorfismo σ di K è un isomorfismo da K in K, cioè una applicazione biunivoca di K in sè tale che

$\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$ e $\sigma(xy) = \sigma(x)\,\sigma(y)$ per ogni scelta di x e y.

Siano ora V e W due spazi vettoriali su K.

Def. Una applicazione $\alpha : V \to W$ si dice σ-semilineare se, per ogni scelta di u, v in V e x in K,

$$\alpha(u + v) = \alpha(u) + \alpha(v)$$
$$\alpha(xv) = \sigma(x)\ \alpha(v).$$

Per semplicità, α si dice semilineare.

Siamo ora in grado di enunciare il teorema che caratterizza le collineazioni:

Teor. Siano V e W spazi vettoriali sul campo K e sia $\xi : \mathbf{P}V \to \mathbf{P}W$ una collineazione. Se dim $\mathbf{P}V \geq 2$, esiste una applicazione semilineare biunivoca $\alpha : V \to W$ tale che $\xi[v] = [\alpha(v)]$ per ogni $v \neq 0$. Viceversa, ogni applicazione di questa forma è una collineazione senza limitazioni di dimensione.

Come conseguenza di questo teorema, si ha che gli unici automorfismi di R e di Q sono quelli identici - fatto molto importante, che verrà ripreso e dimostrato nel capitolo successivo – e che collineazioni tra spazi proiettivi di dimensione almeno 2 su R o su Q, sono proiettività.

A questo punto, si può dire che le proprietà proiettive del piano sono quelle invarianti per collineazioni piane.
Le proprietà affini sono quelle invarianti per collineazioni affini (o semplicemente affinità), cioè quelle trasformazioni che mutano in sè la retta impropria.
Le proprietà metriche sono le invarianti per similitudine.
Secondo un'osservazione di Cayley, tutte le proprietà rientrano nella famiglia delle proprietà proiettive.
Le proprietà affini di una figura possono presentarsi come proprietà proiettive della figura che se ne ottiene aggregando alla precedente una retta impropria; le proprietà metriche della stessa figura sono quelle proiettive della figura che se ne ottiene, aggregandovi i cosiddetti punti ciclici (o un'involuzione ciclica). Si noti, tuttavia, che per interpretare ogni proprietà come proprietà proiettiva, il prezzo da pagare è cambiare la figura geometrica di cui si parla.

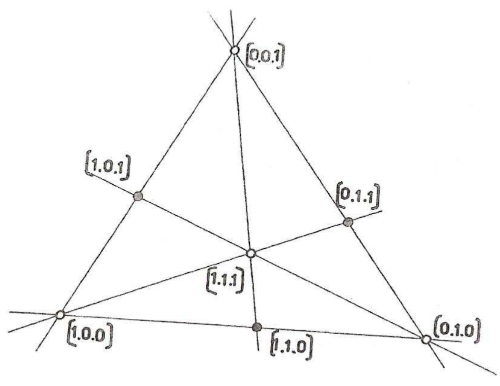
Da un punto di vista analitico appare opportuno utilizzare coordinate proiettive per descrivere le prime e coordinate cartesiane per le seconde.
Proprietà proiettive, affini e metriche si estendono, chiaramente, anche allo spazio tridimensionale.

3.6 Involuzioni

L'identità è una particolare proiettività tra forme sovrapposte e gode della proprietà di coincidere con la propria inversa.

Def. Si dice involuzione ogni proiettività non identica, che coincide con la propria inversa.

Si può dire, in modo del tutto analogo, che un'involuzione è una proiettività che applicata due volte da l'identità.
Elementi che si corrispondono in un'involuzione si dicono coniugati, gli elementi uniti si dicono doppi.
Ogni involuzione è individuata da una coppia di elementi coniugati.
È possibile costruire geometricamente un'involuzione, ricorrendo alla figura del quadrangolo piano completo, costituito da quattro vertici e dalle sei rette che li congiungono a due a due. Le rette si distribuiscono in tre coppie di lati opposti; i punti di incontro dei lati opposti si dicono punti diagonali. I punti diagonali sono non allineati e, pertanto, vertici di un triangolo detto triangolo diagonale del quadrangolo.



Vale il seguente risultato:

Teor. Le tre coppie di lati opposti di un quadrangolo piano segnano su una retta, non passante per alcun vertice, tre coppie di punti coniugati in una medesima involuzione.

Def. In una forma di prima specie, si dice quaterna armonica l'insieme costituito dagli elementi doppi di un'involuzione e da una coppia di elementi coniugati.

Sulla congiungente due punti diagonali di un quadrangolo piano, è armonica la quaterna costituita dai due punti diagonali e dalle intersezioni di due lati opposti del quadrangolo, che passano per il terzo vertice diagonale.
Si osserva che le quaterne armoniche sono costruibili graficamente, sfruttando la figura di un quadrangolo piano.

CAPITOLO 4

La volontà di Staudt di costruire una geometria “sintetica”, che sfrutti solo proprietà di carattere grafico, trova compimento nello studio di una particolare classe di corrispondenze biunivoche, dette appunto staudiane.
Lo scopo di queste poche pagine, è soprattutto quello di presentare l’importanza storica dell’operato di Staudt nell’ambito della geometria proiettiva, senza la pretesa di costruire una trattazione rigorosa degli argomenti toccati.

4.1 Contributi di C. von Staudt alla geometria proiettiva

Per costruire nuove geometrie, i matematici si sono spesso serviti di considerazioni e risultati inerenti la metrica: si pose il problema di evitare l’adozione di questa strategia nei casi di non necessità.
Christian von Staudt tentò di risolvere la questione, poichè sentiva il bisogno di fondare una nuova geometria, basandosi sul rigore antico e di discutere le proprietà delle figure, slegandosi dal concetto di misura.
Egli definì proiettività tra forme di I specie, una corrispondenza biunivoca che trasforma una quaterna armonica in una quaterna armonica.
Tale definizione, con le dovute condizioni, è estendibile anche a forme di II e III specie.
I predecessori di von Staudt, avevano definito le forme come trasformazioni che agivano secondo determinate regole sul birapporto: introducendo il birapporto si è costretti a parlare di metrica.
Ad esempio Jacob Steiner (1796-1863), caratterizzava una forma a partire dal numero di coordinate necessarie a definire gli elementi primitivi. Una proiettività tra forme di I specie è una trasformazione biunivoca tra due forme, che conserva il birapporto.
Fissata una proiettività tra due forme di seconda specie, mediante l’introduzione di una sostituzione lineare, si può dimostrare il teorema di Staudt:

<u>Teor.</u> Una corrispondenza biunivoca tra forme di seconda specie F e G, che muti forme di prima specie di F in forme di prima specie di G, è una proiettività tra F e G.

Von Staudt si occupò anche della cosiddetta “introduzione geometrica dei punti immaginari”, basata sull’assimilazione di un punto immaginario a una

involuzione su di una retta orientata. Su una retta reale, un'involuzione reale individua la coppia dei suoi punti doppi e, reciprocamente, una coppia di punti entrambe reali, ovvero immaginario-coniugati.
Alle coppie di punti immaginario-coniugati sono associate biunivocamente le involuzioni di tipo ellittico, cioè individuate da due coppie di punti reali che si separano.

4.2 Corrispondenze staudiane e teorema di Staudt

La possibilità di costruire graficamente delle quaterne armoniche sfruttando solo proprietà di carattere grafico (cfr. Capitolo 3, par. 6), conferisce importanza alle corrispondenze biunivoche tra forme di prima specie: esse infatti mutano quaterne armoniche in quaterne armoniche. Tali corrispondenze vengono dette staudiane.
Una proiettività è una corrispondenza staudiana.
Si deve a von Staudt il seguente:

Teor. Nella geometria proiettiva reale, le corrispondenze staudiane tra due forme di prima specie sono proiettività, cioè conservano il birapporto.

La dimostrazione è alquanto articolata e complessa, conviene, perciò, suddividerla in alcuni punti.

1) Scelti tre elementi distinti nella prima forma, cioè introdotta una coordinata proiettiva x, si assumono come elementi fondamentali dell'altra forma quelli associati in una fissata corrispondenza Ω, del tipo $y = f(x)$, con y coordinata proiettiva nella seconda forma.
   Si ha:

   $$f(\infty) = \infty, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

   Dalla prima uguaglianza si ricava che Ω può essere presentata come corrispondenza biunivoca del campo delle coordinate in sè.

2) L'ipotesi che Ω sia staudiana, equivale all'implicazione:

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = -1 \Rightarrow [\, f(x_1)\, f(x_2)\, f(x_3)\, f(x_4)] = -1$$

Qualunque siano i numeri *a*, *b*, *c*, sono equivalenti le due relazioni:

$$(a\ b\ c\ \infty) = -1 \qquad , \qquad c = \frac{a+b}{2}$$

Infatti:

$(a\ b\ c\ \infty) = (a\ b\ c)\ \dfrac{a-c}{b-c} = -1$ per la definizione di birapporto;

$$a - c = c - b \quad \Rightarrow \quad \frac{a+b}{2} = c\,.$$

Da ciò segue che $f(c) = \dfrac{f(a) + f(b)}{2}$ e che *f* soddisfa all'equazione funzionale:

$$f\left[\frac{a+b}{2}\right] = \frac{f(a) + f(b)}{2}\,.$$

Ponendo $b = 0$, poichè $f(0) = 0$, si ottiene:

$$f\left[\frac{a}{2}\right] = \frac{f(a)}{2}\,.$$

Per questo fatto, ponendo $a = 2u$ e $b = 2v$, si ha:

$$f(u + v) = f(u) + f(v).$$

Quest'ultima equazione funzionale include le relazioni $f(0) = 0$ (ponendo $v = 0$), $f\left[\dfrac{a}{2}\right] = \dfrac{f(a)}{2}$ (ponendo $u = v = \dfrac{a}{2}$), $f\left[\dfrac{a+b}{2}\right] = \dfrac{f(a) + f(b)}{2}$ (ponendo $u = \dfrac{a}{2}$ e $v = \dfrac{b}{2}$) e $f(-u) = -f(u)$ (che si ottiene ponendo $v = -u$).

Si vede facilmente che sono equivalenti anche le relazioni:

$$(-a\ a\ b\ 1) = -1 \qquad , \qquad b = a^2.$$

Infatti:

$(-a\ a\ b\ 1) = -1 \quad \Leftarrow \quad b = a^2;$ sfruttando la definizione di birapporto:

$$\frac{-a-a^2}{a-a^2}\cdot\frac{a-1}{-a-1}=\frac{a\cdot(-a-1)}{a\cdot(1-a)}\cdot\frac{a-1}{-a-1}=-1$$

Viceversa:

$$-1=\frac{-a-b}{a-b}\cdot\frac{a-1}{-a-1}=\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{a-1}{a+1}$$
$$0=(a+b)\cdot(a-b)+(a-b)\cdot(a+1)=2a^2-2b$$

da cui $b = a^2$.

Tenendo presente che $f(1) = 1$ si deduce che $f(a^2) = [f(a)]^2$.
Ponendo ora $a = u + v$ e tenendo conto, dove occorra, delle relazioni già trovate si ottiene:

$$f(u^2+2uv+v^2)=\left[f(u)+f(v)\right]^2$$
$$f(u^2)+2f(uv)+f(v^2)=\left[f(u)\right]^2+2f(u)f(v)+\left[f(v)\right]^2$$
$$f(uv)=f(u)\cdot f(v)$$

L'ultima relazione funzionale, oltre a includere $f(1) = 1$ (con le scelte $v = 1$ e $u \neq 0$) e $f(a^2) = [f(a)]^2$ (ponendo $u = v = a$), comprende anche l'uguaglianza $f\left[\frac{1}{v}\right]=\frac{1}{f(v)}$ (supposto $v \neq 0$ e $u=\frac{1}{v}$).

Si prova facilmente che valgono anche le seguenti relazioni:

$$f(u-v)=f(u)-f(v)$$
$$f\left[\frac{u}{v}\right]=\frac{f(u)}{f(v)}.$$

3) Ricordando l'espressione del birapporto, dalle relazione trovate al punto precedente, si ha che se k è il birapporto di quattro elementi nella prima forma, il birapporto dei quattro elementi a essi associati dalla corrispondenza staudiana nella seconda forma, è $f(k)$.
Se k è un numero razionale, necessariamente si ha $f(k) = k$: infatti, poichè $f(1) = 1$, per induzione su ogni intero positivo n, $f(n) = n$.
Dalle relazioni:

$$f(0)=0 \qquad f(-n)=-f(n) \qquad f\left[\frac{m}{n}\right]=\frac{f(m)}{f(n)}$$

si ha la tesi.

4) Se le coordinate si assumessero in campo razionale, dal momento che al punto 3 si è provato che Ω conserva tutti i birapporti, la corrispondenza staudiana sarebbe una proiettività.
   Tali proprietà si estendono anche a coordinate, pensate in campo reale.
   Se u è un numero reale positivo, posto $u = a^2$, $f(u) = f(a^2) = [f(a)]^2$; tale quantità è certamente positiva e non si può annullare, altrimenti si avrebbe che, essendo $f(a) = 0$, a sarebbe 0 e di conseguenza, contro l'ipotesi anche u si annullerebbe.
   Più in generale, se $u > v$, da cui $u = v + w$ con w positivo, si ha:

   $$f(u) = f(v+w) = f(v) + f(w) > f(v).$$

   Se x è un numero irrazionale ed r ed s sono due numeri razionali qualunque con $r < x < s$, si ha $f(r) < f(x) < f(s)$, cioè, per quanto provato al punto 3, $r < f(x) < s$.
   La sezione del campo razionale che individua x è, pertanto, la stessa che individua il numero reale $f(x)$, da cui si ha:

   $f(x) = x = y$, che rappresenta una proiettività. ♦

Seguono alcune osservazioni.

Con le debite avvertenze, la trattazione si può estendere alla geometria proiettiva su un qualunque corpo commutativo: la f risulta una corrispondenza biunivoca che conserva le somme e i prodotti (quindi tutte le operazioni razionali) è quindi un isomorfismo di K in K, cioè un automorfismo di K.
Poichè si è provato che $f(uv) = f(u)f(v)$, si deve escludere che il campo abbia caratteristica 2: questo è giustificato dal fatto che in un siffatto campo, i tre punti diagonali di un quadrangolo piano completo sono allineati. La proprietà dei tre punti diagonali di non essere allineati, non è quindi radicata in questioni di esclusivo carattere grafico.
Nei campi con caratteristica 2, ad esempio quello delle classi mod. 2, essendo 2 = 0, -1 = 1 e la trattazione perde di interesse, poichè ogni corrispondenza biunivoca risulta automaticamente staudiana.
I risultati del punto 3 possono essere ricavati sostituendo al campo razionale il campo fondamentale o minimo, cioè quello ottenuto dalle operazioni razionali sull'unità. Il campo fondamentale può essere isomorfo a quello razionale e, quindi, astrattamente assimilabile a esso.
Se K = R, l'automorfismo è necessariamente quello identico – lo si è provato nel quarto punto della dimostrazione (cfr. anche Capitolo 3, par. 5); assumendo questo fatto come ipotesi, la terza e la quarta parte della dimostrazione possono essere omesse.

In particolare, il teorema di Staudt può essere esteso alla geometria dei soli corpi che ammettono l'identità come unico automorfismo. L'estensione è ammissibile nei campi fondamentali, cioè nel campo razionale e nei campi Z. Tutti i campi finiti, che non siano fondamentali, ammettono automorfismi diversi da quello identico.
In campo complesso si trova un esempio significativo: l'operazione di coniugio è un automorfismo non identico; il coniugato di un birapporto k è diverso da k, se k non è reale. Nella geometria proiettiva sul campo complesso esistono, dunque, corrispondenze staudiane che non sono proiettività.
Anche in sottoinsiemi del campo reale esistono casi in cui il teorema cade in difetto: l'insieme dei numeri del tipo $a+b\sqrt{2}$, con a e b razionali, è chiuso rispetto alle operazioni razionali (i.e. è un sottocampo di R). In tale sottocampo, la corrispondenza che associa al numero $y=u+v\sqrt{2}$ il numero $y=u-v\sqrt{2}$ è un automorfismo non identico nel campo.
Nel campo reale, il teorema di Staudt permette di presentare le proiettività tra forme di prima specie come corrispondenze staudiane, cioè come nozioni puramente grafiche; questo fatto interviene in modo essenziale nella trattazione sintetica della geometria proiettiva, dovuta appunto a Staudt.

CAPITOLO 5

Ci si occupa ora di spiegare e giustificare alcune situazioni, che mostrano le differenze tra i due indirizzi di studio, che abbiamo chiamato “punti di vista” di Klein e di von Staudt.
Saranno discusse alcune proprietà topologiche, invarianti per omeomorfismi tra sottoinsiemi dello spazio euclideo, inoltre, dopo aver presentato la nozione di similitudine tra nodi, verrà descritta la singolare configurazione dei cosiddetti “anelli borromaici”, che ha sempre suscitato l’interesse degli studiosi, in diversi ambiti del sapere scientifico.

5.1 Klein e von Staudt

Un punto saliente nel Programma di Erlangen risiede nel fatto che non è possibile l’approccio a un indirizzo di ricerca per il quale manchi un ambiente in cui tutto ciò che si studia sia immerso.
Come già osservato, in origine per “punto di vista” di von Staudt si intendeva lo studio delle proiettività, come prodotto di prospettività, su una retta e gli sviluppi legati alle proprietà del piano proiettivo: si tratta delle proprietà esaminate nel capitolo precedente.
Nello studio di ambienti sempre più diversificati, si perde il fatto che i morfismi siano costruiti a partire dall’ambiente stesso (come nel caso delle prospettività). Comunque, come già detto, abbiamo chiamato, in modo un po’ arbitrario, “punto di vista” di von Staudt lo studio di morfismi tra sottostrutture, i quali non siano i quali non siano necessariamente indotti da morfismi della struttura ambiente.
Cerchiamo di esaminare questo “punto di vista” a proposito della topologia generale.
Un omeomorfismo è una funzione continua e biunivoca, con l’ inversa continua.
L’approccio nei confronti dello studio delle proprietà invarianti per omeomorfismi è diverso, a seconda che ci si riferisca al “punto di vista” di Klein o a quello di von Staudt.
Si può osservare che i vari spazi topologici non sono sottospazi di un unico ambiente. Parlando di proprietà invarianti per omeomorfismi, in generale non ci si riferisce a un gruppo: tutti gli omeomorfismi tra sottoinsiemi di uno spazio topologico non formano gruppo, perchè in generale non è definita l’operazione di composizione.
Dati f e g omeomorfismi, se

f: X →Y e g: Z →W

e se Y $\neq$ Z, non è possibile comporre f e g.
Le proprietà invarianti in sottoinsiemi di uno spazio topologico possono essere così studiate riferendosi agli omeomorfismi dello spazio stesso, oppure a tutti gli omeomorfismi tra i sottoinsiemi dello spazio.
Ad esempio la proprietà di un intervallo di essere limitato è invariante rispetto agli omeomorfismi di R, ma non lo è rispetto a tutti gli omeomorfismi tra intervalli della retta reale; diremo che si tratta di una proprietà invariante, secondo il "punto di vista" di Klein e non secondo quello di von Staudt.

Vediamo in dettaglio un esempio:

X = R

Siano

$$\begin{array}{l} A = \{0\} \cup [1,2] \cup \{3\} \\ B = [0,1] \cup \{2\} \cup \{3\} \end{array} \text{ intervalli di R.}$$

È facile trovare un omeomorfismo ω: *A*→*B* che trasformi *A* in *B*, ma nessun omeomorfismo Ω: R → R può agire nello stesso modo. Gli omeomorfismi di R devono conservare l'ordine dei punti.

5.2 Il punto di vista di von Staudt in topologia

Riportiamo in questo paragrafo alcuni risultati e alcune osservazioni tratte dal testo di James Dugundji, "*Topology*"; usiamo la terminologia dell'autore, mostrandone, comunque, la corrispondenza con quella usata nella presente tesi.
Siano dati due spazi topologici X e Y e si supponga che X possa essere immerso in Y. Tutte le immersioni di X in Y danno luogo a sottospazi omeomorfi, ma non necessariamente a sottospazi che si comportano nello stesso modo rispetto all'ambiente Y, che sono, cioè, trasformati l'uno nell'altro da un opportuno omeomorfismo di Y in Y.
Un sottoinsieme A $\subseteq \mathcal{P}$ (Y) si dice una "restrizione posizionale" di X, in relazione a Y, se ogni immersione di X in Y appartiene ad A, oppure se nessuna immersione di X in Y appartiene ad A.
Ogni proprietà che caratterizza una restrizione posizionale è detta "invariante posizionale" di X rispetto a Y: si tratta di invarianza dal punto

di vista di von Staudt, poichè riguarda lo studio rispetto a tutti gli omeomorfismi tra sottoinsiemi di Y.
Ad esempio, è chiaro che le proprietà di connessione e compattezza di X e Y sono invarianti nel senso di cui si sta parlando, qualunque sia lo spazio Y, perchè sono addirittura invarianti per applicazioni continue e suriettive; inoltre, non è ovvio, ma si può dimostrare che la proprietà di un compatto di separare uno spazio euclideo e la proprietà di essere un aperto dello spazio euclideo sono invarianti nel senso specificato.

Riporteremo di seguito gli enunciati dei risultati più significativi.

Sia R^{n+1} lo spazio euclideo di dimensione $n+1$.

Def. Il sottoinsieme A di R^{n+1} separa R^{n+1}, se $R^{n+1} - A$ è non connesso.

Esempio

Siano $X = R$, $Y = R^2$. Considerando l'immersione $x \to (x, 0)$, il complementare di X risulta non connesso; poichè è connesso sotto l'immersione $x \to (\frac{x}{1+|x|}, 0)$, la proprietà "X separa Y" è non invariante di X in relazione a Y.

Teor. Sia X uno spazio compatto. La proprietà "X separa R^{n+1}" è invariante di X in relazione a R^{n+1}.

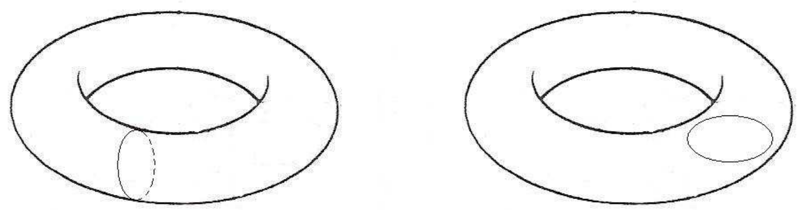
Un'applicazione immediata di questo risultato è il seguente teorema di separazione di Jordan:

Teor. Ogni immagine omeomorfa F^n di S^n in R^{n+1} separa R^{n+1}; nessun sottoinsieme proprio chiuso di F^n separa R^{n+1}.

S^n è la superficie sferica n-dimensionale, è compatta e separa R^{n+1}; poichè la proprietà di separazione è invariante, ogni F^n a sua volta separa R^{n+1}.
Ogni sottoinsieme proprio F di $S^n \subset R^{n+1}$, non separa R^{n+1}, dal momento che $R^{n+1} - F$ è connesso. Se F è chiuso, nessuna immagine omeomorfa di F può separare R^{n+1}. ♦

Si può dimostrare, inoltre, che la superficie sferica n-dimensionale non è omeomorfa ad alcun suo sottoinsieme proprio. Infatti: sia F un sottoinsieme proprio di S^n; se F non è chiuso, allora non è compatto e dunque non è omeomorfo a S^n; se F è chiuso, allora - per il risultato precedente - non separa R^{n+1}, mentre ogni immagine omeomorfa di S^n in R^{n+1} separa R^{n+1}.

Non sempre la proprietà di un compatto X di separare uno spazio Y è invariante.
Se Y è una superficie torica e X è la circonferenza standard, non tutte le immersioni di X in Y separano Y.
Le figure mostrano due situazioni in cui la circonferenza X separa e non separa Y.



L'invarianza della proprietà "essere aperto di" è mostrata dal seguente teorema di Brouwer:

<u>Teor.</u> Per ogni spazio X, la proprietà "essere aperto di R^{n+1}" è invariante.

Come corollario del teorema di Brouwer, se B è un arbitrario sottoinsieme di R^{n+1} e h: B $\rightarrow$ R^{n+1} è un omeomorfismo, ogni punto x, interno a B o sulla sua frontiera, ha immagine interna a h(B), o sulla sua frontiera.
Sfruttando solo proprietà di connessione, si può asserire che R è non omeomorfo a R^{n+1}, per ogni $n > 1$; infatti il teorema di Brower, permette di dimostrare il seguente teorema di invarianza del numero della dimensione:

<u>Teor.</u> R^n ed R^m non sono omeomorfi se $n \neq m$.

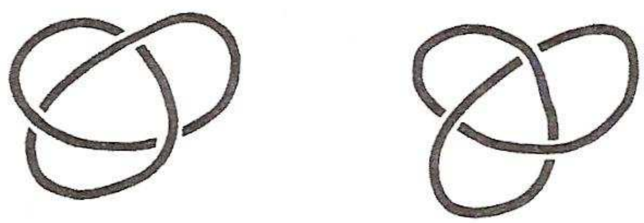
Se R^n è omeomorfo a R^m e $m > n$, allora, per il teorema di Brouwer, l'immagine di R^n , sotto ogni immersione in R^m , è aperta in R^m.
Considerando l'immersione $(x_1, x_2, ... x_n) \rightarrow (x_1, x_2, ... x_n, 0, 0, ... 0)$;

l'immagine risulta non aperta: ciò prova la tesi. ♦

Esistono sottoinsiemi per cui la proprietà di essere aperto è non invariante. Siano Y = $\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\frac{1}{n},\ldots\right\}$ un sottoinsieme di R e X un singolo punto: le immersioni $x \to 0$ e $x \to 1$ mostrano che la proprietà “essere aperto in Y” è non invariante di X in relazione a Y.

5.3 I nodi

Sempre rifacendosi alla topologia, verranno ora analizzate altre due situazioni, in cui è possibile distinguere tra ottica kleiniana e ottica staudiana.
Un nodo è un sottospazio di R^3 omeomorfo a una circonferenza.
Un nodo è non intrecciato se esiste un omeomorfismo h: $R^3 \to R^3$ che lo trasformi nella circonferenza standard, viceversa è intrecciato.
Si dice che due nodi H e K sono simili se esiste un omeomorfismo h di R^3 tale che h(K) = H. Più semplicemente, due nodi sono simili se uno può essere deformato in modo da ottenere l’altro.
Questo procedimento non è sempre fattibile.
Talora, per ottenere una similitudine tra nodi occorre sfruttare movimenti che non sono continui su R^3.
Consideriamo il seguente esempio:

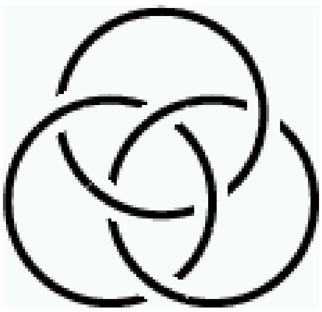


Per ottenere la similitudine tra i due nodi, bisogna riflettere il primo rispetto a un piano: tale operazione non conserva l’orientazione dei triedri (un triedro destro viene trasformato in un sinistro).
Nodi invarianti rispetto a un omeomorfismo, che conservi l’orientazione dei triedri, sono detti equivalenti.
Dunque, questa situazione mostra che la similitudine tra nodi può essere ottenuta tramite un movimento che non sia globalmente continuo su R^3.

La proprietà di similitudine tra nodi è, dunque, invariante secondo il "punto di vista" di von Staudt.
In generale non esiste alcun omeomorfismo di R^3 che trasformi un nodo intrecciato in un nodo non intrecciato.

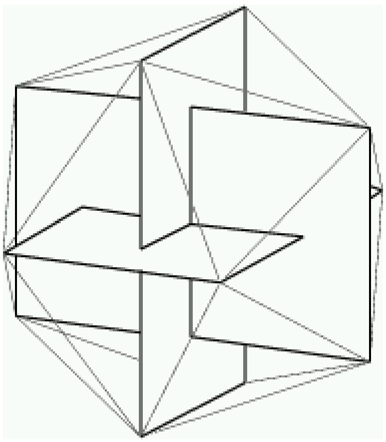
5.4 Gli anelli borromaici

Nello stemma della famiglia Borromeo, compaiono tre anelli d'oro a punta di diamante, gemmati di rosso e intrecciantisi su un campo azzurro: diverse sono le interpretazioni araldiche di questo "marchio" e altrettanti sono gli ambiti disciplinari nei quali si studiano le proprietà di questa singolare struttura.
Gli anelli sono visibili nella metà sinistra dello stemma, in basso.
La singolare proprietà degli anelli sta nel fatto che, pur non essendo separabili, non sono legati a due a due: in poche parole, se un anello venisse tagliato, gli altri si separerebbero.
Per quanto riguarda la presente tesi, la situazione è invariante rispetto agli omeomorfismi dell'ambiente (lo spazio euclideo tridimensionale), non rispetto agli omeomorfismi tra sottoinsiemi dell'ambiente: è cioè invariante dal punto di vista di Klein, non secondo quello di von Staudt; la configurazione è, infatti, omeomorfa all'unione di tre anelli separati.



Gli anelli borromaici sono stati oggetti di ricerche da parte del geometra Peter Tait che, nel 1876 ne pubblicò uno studio accurato. Mostrò che la nostra concezione di "non annodato" non è sufficiente a spiegare la natura geometrica e topologica dei nodi.
Nell'opera "*A quick trip through knot theory, Topology of 3-manifolds and Related Topics*" del 1962, Ralph Fox dimostrò che gli anelli borromaici si comportano effettivamente come nodi, omeomorfi ad anelli separati; è

importante osservare che proprio grazie a Fox, il termine anelli borromaici è entrato nella letteratura.
Si verifica che gli anelli borromaici non sono realizzabili, se non limitatamente alla rappresentazione iconografica: ciò significa che non è possibile “annodare” tre cerchi per ottenere gli anelli.
È possibile, invece, realizzare la configurazione se al posto di tre cerchi si considerano tre rettangoli, tra loro isometrici; anzi si possono considerare tre rettangoli ortogonali inscritti in un icosaedro regolare: le loro frontiere hanno la stessa caratteristica degli anelli borromaici.



Non ci sono controindicazioni nel sostituire ai tre rettangoli tre ellissi isometriche tra loro.

5.5 Alcune osservazioni conclusive

Il confronto tra “punto di vista di Klein” e “punto di vista di von Staudt” si potrebbe estendere a molti altri rami della Matematica; ci limiteremo, però, a riportare soltanto poche osservazioni.

Considerati un insieme X e il gruppo delle applicazioni biunivoche di X in X, ci si occupa dello studio dell’invarianza secondo Klein; viceversa, considerati $\mathcal{P}$ (X) – insieme delle parti di X – e tutte le applicazioni biunivoche tra i sottoinsiemi di X, lo stesso studio avviene secondo l’ottica staudiana.
Se Y è un sottoinsieme di X, la sua cardinalità è invariante rispetto alle applicazioni biunivoche, in entrambe i casi.

Se X è un insieme infinito, la cardinalità di X \ Y è invariante secondo Klein, ma non secondo von Staudt: lo si può notare con le scelte di X = N, l'insieme dei numeri naturali, e Y = {2*n*, con *n* in X}. X e Y sono in corrispondenza biunivoca e l'insieme X \ Y (cioè i numeri dispari) ha la cardinalità di X.
Altri esempi: se Y = N \ {0}, X \ Y = {0} e ha cardinalità 1;
se Y = N \ {0, 1}, X \ Y = {0, 1} ha cardinalità 2; se Y = N \ {0, 1, 2, ... n}, X \ Y ha cardinalità n.

Considerato un sottoinsieme *E* di R^n vale il seguente risultato: se $f : E \to R^m$ è lipschitziana, allora *f* è prolungabile a una funzione lipschitziana definita in tutto R^n e avente la stessa costante di Lipschitz di *f*.
Sembra di poter concludere che, studiando l'invarianza per applicazioni bilipschitziane, i punti di vista di Klein e von Staudt vengano a coincidere.
La stessa cosa succede tutte le volte che ogni isomorfismo tra sottostrutture può essere esteso a un isomorfismo dello spazio ambiente. Un esempio facile è dato dagli spazi vettoriali di dimensione finita e dalle applicazioni lineari.

BIBLIOGRAFIA

ARTICOLI

H. Boss, E. H. Connell, D. Wright
The jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse
Bullettin of the American Mathematical Society
Volume 7, numero 2

Luigi Campedelli
I cento anni del Programma di Erlangen
pagg. 113-122
Rivista Archimede (anno 1972)

Oscar Chisini
Sulle trasformazioni cremoniane
Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, 5 (1931)
pagg. 63-78

G. Mellerio, A. Stella
Gli anelli borromaici (storia, arte e scienza)
IL NUOVO SAGGIATORE
Bollettino della società italiana di Fisica
N. 3: maggio-giugno 2004

Beniamino Segre
Corrispondenze di Möbius e trasformazioni cremoniane intere
Atti Acc. Sc. Torino 91
pagg.. 1-17

TRATTATI

Umberto Bottazzini
Il Flauto di Hilbert
pagg. 200-202, 211-212, 220-227
UTET

Carl B. Boyer
Storia della Matematica
pagg. 577-710
OSCAR SAGGI MONDADORI

Julian Lowell Coolidge
A History of Geometrical Methods
pagg. 98-105, 287-292
OXFORD AT THE CLARENDON PRESS

Luigi Cremona
Opere Matematiche
Tomo Terzo
pagg. 241-259, 298-325
ULRICO HOEPLI

James Dugundji
Topology
pagg. 356-360
ALLYN AND BACON, INC., BOSTON

K.J. Falconer
The geometry of fractal sets
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Gino Loria
Storia delle Matematiche
Volume Terzo
pagg. 448-455
STEN

P. Plaumann, K. Strambach
Geometry - von Staudt's Point of view
Prefazione, pagg. 401-425
NATO ADVANCED STUDY INSTITUTES SERIES

TESTI UNIVERSITARI

Haïm Brezis
Analisi Funzionale
Teoria e applicazioni
Appendice - Integrazione astratta, di Carlo Sbordone
LIGUORI EDITORE

Maurizio Cornalba
Piccola introduzione alla geometria proiettiva
Disponibile in rete

Vittorio Emanuele Galafassi
Lezioni di Geometria
Parte Terza

Gianni Gilardi
Analisi matematica di base
MC-GRAW HILL

Gianni Gilardi
Misure di Hausdorff e applicazioni
Disponibile in rete

Czes Kosniowski
Introduzione alla Topologia algebrica
pagg. 240-243
ZANICHELLI

Edoardo Sernesi
Geometria 1
Seconda Edizione
Programma di Matematica, Fisica, Elettronica
Parte 3
BOLLATI BORINGHIERI

SITI INTERNET CONSULTATI

Sugli anelli borromaici:
http://www.liv.ac.uk/~spmr02/rings/maths.html

Sul programma di Erlangen
http://matematica.uni-bocconi.it/klein/klein01.htm

Sulla geometria proiettiva:
http://matematica.uni-bocconi.it/klein/klein03.htm

Sulle trasformazioni cremoniane:
http://www.scienzaesperienza.it/news/new.php?id=0145

Discussa il 22 settembre 2005, alle ore 15.35.

Commissione: prof. Pozzi Arrigo, Presidente
prof. Ferrari Mario
prof. Bernardi Marco Paolo
prof. Della Croce Lucia
prof. Schimperna Giulio

Punteggio: 108/110