La formula di Eulero

a cura di Flavio Cimolin

(ultimo aggiornamento: 09/09/2006)
Pubblicato su Matematicamente.it Magazine n.1, Gennaio 2007

La prima volta che ci si imbatte nella *formula di Eulero* non si può fare a meno di rimanere scioccati, oltre che un po' increduli, di fronte al mistero che la sua semplicità racchiude in così pochi simboli. Numeri che provengono da contesti della matematica completamente diversi incrociano i loro destini in un'uguaglianza che più semplice non si poteva:

$$\boxed{e^{i \cdot \pi} + 1 = 0}$$

Di fronte a quella che dalla maggior parte dei matematici è considerata "La" formula più bella della matematica, l'eminente professore, proprio come il suo allievo, trova una difficoltà insormontabile nel tentare di percepirne fino a fondo il significato, e non può che arrendersi nel constatare una profondità più grande di lui. Come mai le due costanti e e π, provenienti da differenti ambiti della matematica, sono legate tramite il numero immaginario i in un modo così bizzarro? Talvolta capita che gli studenti siano addirittura tentati di "rifiutare" l'esistenza dei numeri immaginari, in quanto lontani dalla realtà e apparentemente artificiosi, eppure mai come in questo caso entità così astratte si rivelano intimamente legate ai più elementari dei numeri naturali: l'uno e lo zero.

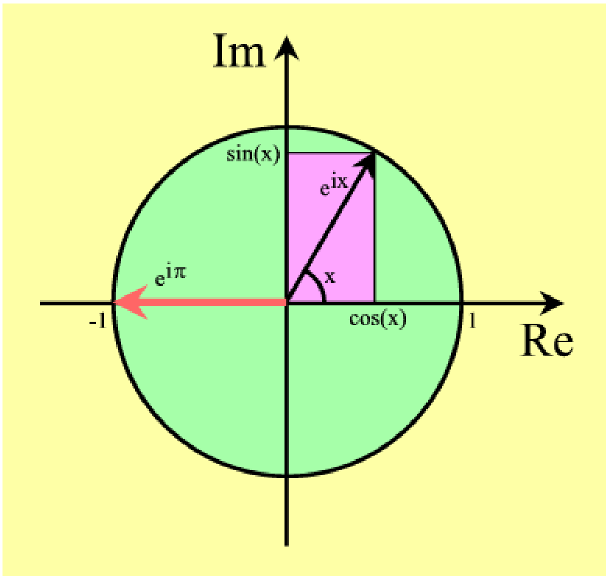
Si dice che Gauss, forse il più grande e prolifico matematico di tutti i tempi, un giorno abbia ironicamente commentato che, se ad una persona la formula non appare immediatamente ovvia, questi non potrà mai essere un grande matematico! In effetti la dimostrazione è relativamente semplice per chi abbia un minimo di dimestichezza con i numeri complessi e il calcolo integrale... Anche dopo averla accettata, però, la dimostrazione non darà mai la soddisfazione di svelare completamente il profondo segreto che la formula sembra nascondere in sé.

Richard P. Feynman, fisico americano premio Nobel nel 1965 per i suoi studi sull'elettrodinamica quantistica, fu uno dei primi ad eleggerla "formula più bella di tutti i tempi", quando all'età di 13 anni la inserì con tale appellativo nel suo quaderno di liceale. E come dargli torto? La prima cosa che si nota è che compaiono, una dopo l'altra, come in rassegna, tutte le entità fondamentali della matematica: la costante di Nepero (e = 2,7182818...), il valore di pi greco (π = 3,14159265...), l'unità immaginaria i (radice quadrata di -1), il numero 1 (elemento neutro per la moltiplicazione) e il numero 0 (elemento neutro per la somma). Anche dal punto di vista storico, i concetti che vengono evocati spaziano attraverso le epoche e i luoghi che hanno fatto la storia della matematica: si pensi al periodo aureo della geometria greca (costante π), agli influssi della matematica indiana, che introdusse il concetto di zero, al dibattito rinascimentale italiano fra Tartaglia e Cardano relativamente alla risoluzione delle equazioni di terzo grado (unità immaginaria *i*), per poi passare alla nascita dei logaritmi ai tempi di Nepero (costante *e*), e infine al numero 1, onnipresente in tutte le culture e in tutti i tempi. Com'è possibile che queste entità fondamentali e apparentemente lontane tra loro possano intrecciarsi elegantemente a formare un tutt'uno di così pregevole armonia? Che cosa ci può essere di più mistico di un numero immaginario che interagisce con costanti reali per produrre il niente?

Prima di vedere una pseudodimostrazione della formula di Eulero, è interessante farsi un'idea del settore della matematica da cui è scaturito lo stupefacente risultato: la rappresentazione sul piano cartesiano dei numeri complessi e la loro interazione con l'analisi matematica. Sul piano che viene comunemente detto di Argand-Gauss è possibile rappresentare un qualsiasi numero complesso $a + i\,b$ proprio come se fosse un vettore che, a partire dall'origine degli assi, raggiunge il punto (a, b) del piano. Le proprietà di questa rappresentazione sono notevoli, e vengono comunemente utilizzate in svariate applicazioni della matematica che spaziano dalla fisica all'elettronica. La proprietà fondamentale che si dimostra essere valida qualora la lunghezza del vettore sia unitaria è la seguente:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

Quest'ultima eguaglianza, ben più generale e interessante dal punto di vista teorico, è la vera e propria formula di Leonhard Euler, uno dei più importanti matematici del XVIII secolo, le cui ricerche, proprio come quelle del suo successore Karl Friedrich Gauss, ebbero influenze in svariate discipline della matematica pura e applicata. La formula apparve per la prima volta nella sua *Introductio in analysin infinitorum*, pubblicata a Losanna nel 1748. Il valore x costituisce l'angolo fra il vettore e l'asse delle ascisse (ovvero delle "parti reali"). Una rappresentazione schematica (*si veda la figura qui accanto*) chiarirà il concetto molto meglio delle parole, e questo ci aiuta appunto ad intuire la potenza del metodo di rappresentazione. Al variare dell'angolo x si individuano tutti i punti della circonferenza unitaria. Dalle leggi della trigonometria sappiamo che le loro proiezioni sugli assi coincidono rispettivamente con i valori del seno e del coseno dell'angolo. Cosa accade se usiamo come valore dell'angolo proprio π, ovvero se scegliamo un angolo piatto di 180°?



Sostituendo nella formula e svolgendo i calcoli si ottiene proprio l'identità di Eulero:

$$e^{i\pi} = -1 + i \cdot 0$$

Cerchiamo ora di fornire una vaga idea, nei limiti del possibile, di come abbia fatto il geniale Eulero a scoprire quest'interessante relazione. Il passaggio è in un certo senso l'inverso di quello appena descritto: si sfruttano certe proprietà di sviluppi in serie delle funzioni trigonometriche per mostrare che l'uguaglianza è valida. Ovviamente non possiamo che tralasciare una fetta fondamentale del discorso, ovvero l'estensione dell'operazione di elevamento a potenza al campo dei numeri complessi... Quanto siamo lontani dalla definizione di potenza che ci era stata data ai tempi delle scuole medie!

Una delle possibilità di definizione del numero di Nepero e, base dei logaritmi naturali, è data dalla seguente serie infinita (già di per sé notevole in eleganza):

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Analogamente è possibile dimostrare che:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Una serie di funzioni di questo tipo viene comunemente indicata con il nome di *sviluppo in serie di Taylor*, e può essere ricavata senza troppa difficoltà facendo uso di ben noti teoremi dell'analisi matematica. È interessante notare che la funzione e^x riveste un ruolo di primo piano nel contesto dell'analisi, in quanto è invariante rispetto all'operazione di derivazione (la derivata di e^x è ancora e^x). Da un punto di vista algebrico ciò significa che essa è un "elemento neutro" rispetto alle operazioni di integrazione e derivazione. Una proprietà decisamente di rilievo!

Altri due sviluppi fondamentali sono quelli delle funzioni seno e coseno, che si possono esprimere nella forma seguente:

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

È curioso notare il gioco di alternanza fra i segni “più” e “meno” e fra le potenze pari e dispari presenti negli sviluppi delle funzioni trigonometriche, in contrapposizione all’estrema regolarità della funzione esponenziale. Tenendo conto della proprietà fondamentale dell'unità immaginaria ($i \cdot i = -1$), cosa succede se si calcola lo sviluppo di e^{ix}? E se si calcola quello di $cos(x) + i \cdot sin(x)$? Come per magia ecco che i segni, le unità immaginarie, le potenze e i fattoriali si intrecciano alla perfezione e diviene limpida l’uguaglianza! Provare per credere...

Una delle più importanti applicazioni che l’identità di Eulero ebbe nella storia della matematica è stata quella di dimostrare la trascendenza di π. Sono detti *algebrici* quei particolari numeri irrazionali che possono essere ottenuti come soluzioni di equazioni algebriche, e si distinguono dagli altri irrazionali, che invece sono detti *trascendenti*: in un certo senso questi ultimi “trascendono” la potenza dell’algebra. Il primo a dimostrare l'esistenza dei numeri trascendenti fu il matematico francese Liouville verso la metà del XIX secolo, ma per decine di anni gli unici numeri trascendenti noti rimasero poche costanti costruite ad hoc, come ad esempio la *costante di Liouville*:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k!} = 0.110001000000000000000000100...$$

Nello sviluppo decimale del numero tutte le cifre sono 0 tranne quelle che si trovano nella posizione 1, 2, 6, 24, 120, ..., che valgono 1 (ricordiamo che la definizione di *fattoriale* di n è la seguente: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$, quindi $1!=1$, $2! = 2\cdot1$, $3!=3\cdot2\cdot1=6$, $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$, ...).

La prima costante che non fosse stata costruita appositamente allo scopo di cui si dimostrò la trascendenza fu il numero di Nepero e. Quando il matematico tedesco Ferdinand von Lindemann dimostrò che anche ogni sua potenza e^x (con x algebrico) lo è, bastò applicare la formula di Eulero per ottenere automaticamente la dimostrazione della trascendenza di π. Il numero immaginario i è infatti un numero algebrico per eccellenza, in quanto radice dell'equazione $x^2+1=0$, e dunque essendo $e^{i\pi}$ algebrico, ne segue che necessariamente π deve essere trascendente. Sempre in virtù della formula di Eulero, si può poi dimostrare che $log(x)$, $sin(x)$ e $cos(x)$ sono trascendenti per valori algebrici di x.

Il matematico russo Aleksandr Osipovich Gelfond, come Lindemann in precedenza, dedicò le sue ricerche alle tecniche per lo studio dei numeri trascendenti, e dimostrò tra l'altro la trascendenza di un altro numero particolarmente interessante: i^{2i}. E' curioso notare che la costante trascendente detta di Gelfond $e^{\pi} = 23{,}140692632...$, che a prima vista può apparire assolutamente stramba e insensata, alla luce dell'identità di Eulero risulta in realtà una sorta di radice i-esima del numero -1, dunque interessante eccome!

E' bello concludere questa celebrazione della formula di Eulero così come fece Benjamin Peirce, uno dei più eminenti matematici del XIX secolo, al termine di una sua lezione:

Signori, posso dirlo con certezza, è assolutamente paradossale:
non possiamo capirla, e non sappiamo che cosa significhi;
ma l'abbiamo dimostrata, e quindi sappiamo che deve essere vera.

Articolo a cura di Flavio Cimolin. Il testo comprende anche i contributi di Franco Pallozzi e Giacomo Postumi. Chi lo desiderasse può inviare un proprio commento/riflessione che potrà essere inserita in questa pagina.

Franco Pallozzi aggiunge:

Le scrivo a proposito della formula di Euler-Lindemann che è sicuramente la più bella in assoluto per concisione e profondità, non solo a mio modesto parere di amatore, ma anche a parere del tredicenne Richard P. Feynman. Infatti il famosissimo fisico premio Nobel nel '65 (con Sin-Itiro Tomonaga e Julian Schwinger) per la Elettrodinamica quantistica, riportò nel suo quaderno di liceale, proprio tale formula, con l'appellativo di Formula più bella di tutti i tempi! Ciò è riportato anche dall'interessantissimo libro di J. Gleik:"Genio" che è proprio la biografia di Feyman (invito tutti a leggerlo!).

Giacomo Postumi aggiunge:

Un'altra caratteristica di quella formula è quelle di racchiudere al suo interno "citazioni" di diversi periodi storici matematici. In essa, infatti, troviamo:

pi greco, *che richiama la matematica greca e il suo periodo aureo;*
0, *le cui prime manifestazioni provengono dalla matematica indiana;*
i, *che richiama la matematica rinascimentale italiana (la sua comparsa, infatti, è riconducibile al "dibattito" epistolare tra gli italiani Tartaglia e Cardano relativamente alla risoluzione delle equazioni di terzo grado);*
e, *Napier e la nascita dei logaritmi (fine 1500), così come il vulcanico Euler (1700);*
1, *onnipresente in tutte le culture e i tempi.*

Marcello Euro Mafucci aggiunge:

Mi è gradito enfatizzare ulteriormente l'aspetto estetico della formula di Euler, scrivendola in forma del tutto analoga, ma più estesa

$$e^{2kpi} - 1=0$$

In questo modo, alle citazioni riportate da Postumi, possiamo aggiungerne altre due:

*6) **k** costante arbitraria, tanto frequente in tutti gli ambiti della matematica (elementare e superiore); nell'ambito delle funzioni trigonometriche, dell'analisi armonica... altrettanto importante dell'argomento delle funzioni stesse;*

*7) **2** numero non meno interessante dell' "1"; rappresenta la duplice faccia che può assumere qualsiasi espressione della vita umana: l'essere e il divenire, il bene e il male, il maschile e il femminile.... Insomma: l'espressione binaria del "Rhytmos" dell'antica estetica ellenica (...Archiloco...). Ma, soprattutto, rimanendo al campo della matematica, rappresenta la logica a due valori (vero – falso; 1 – 0), con tutte le applicazioni dell'informatica attuale.*

Per quanto riguarda il resto, mi si permettano due osservazioni.

Scrivete spesso "pi greco" , con la lettera "o" finale. Vorrei far presente che, nella lingua italiana, le lettere sono femminili (una volta tanto accontentiamo le nostre compagne). Il lemma "pi", come i lemmi "emme", "enne, "erre", "zeta"... sono attributi del sostantivo "lettera", che è, appunto, femminile. Pertanto si deve pronunciare "la pi" e non "il pi". Con questo, il numero p va letto "pi greca" e non "pi greco". In modo del tutto analogo, le città sono femminili. Non si dice: Torino è bello, Palermo è caldo, Milano è nebbioso... Proprio perché il nome della città (Torino, Palermo, Milano...) è attributo del sostantivo "città". Al massimo posso capire l'espressione "Torino è bello" in bocca ad un tifoso del Toro, quando inneggia alla sua squadra del cuore.

Avrei da aggiungere, inoltre, alcune considerazioni sul numero 0, "zero", che il Postumi lega esclusivamente alla cultura indiana. Ciò non è del tutto vero. Il concetto di "zero" era ben presente e radicato nella cultura ellenica, sia per quanto concerne il suo significato posizionale nella scrittura dei numeri (era rappresentato dalla lettera "omicron"), sia per quello più metafisico di "nulla". Non è vero che i greci avessero paura del nulla, del vuoto. A questo riguardo si cita spesso, a sproposito, la frase: "Natura abhorret a vacuo", per descrivere il sacro terrore che la cultura greca provava di fronte al nulla; dimenticandosi che essa fu pronunciata per la prima volta non da un filosofo greco, ma da Cartesio o, più probabilmente da un suo allievo.

Il vuoto era un concetto ben consolidato nella cultura greca. Basti pensare che per Democrito il "clinamen" fra gli atomi avveniva nel vuoto. Un vuoto che occupava nell'universo uno spazio molto più grande di quello occupato dalla materia composta di atomi. E chi oserebbe contraddirlo, oggi?

Merito dei grandi matematici indiani (Brahamagupta, soprattutto) fu quello di aver capito che il significato posizionale dello zero nella scrittura dei numeri e il concetto di zero come "nulla" erano identici; rappresentavano, cioè, lo stesso concetto.

In pratica, quei grandi matematici indiani operarono la prima grande unificazione nella storia della scienza.

L'esigenza di unificare concetti apparentemente diversi, manifestazioni complementari, forze di diversa origine apparente, rappresenta una sorta di fil rouge che collega i grandi periodi del progresso scientifico. Ai nostri giorni, il desiderio di unificazione è più vivo che mai; e non solo nella matematica, ma anche nelle scienze sperimentali, a cominciare dalla fisica. L'unificazione operata dagli indiani sul concetto di zero è, forse, la prima e, forse, la più importante.