BASI NUMERICHE NON DECIMALI

Stefano Borgogni
stfbrg@rocketmail.com

SUNTO
Il presente articolo tratta il tema della numerazione in basi diverse da quella decimale, con l'intento di evidenziarne alcune regole, ricorrenze, curiosità.
Per brevità, saranno trattate solo alcune basi numeriche e tra queste, per motivi che saranno chiariti più avanti, sarà approfondita in modo particolare la base 12.
Prima di affrontare l'argomento, due precisazioni:
1) Per limitare le ambiguità insite nel tema trattato ("25" indica il numero decimale venticinque o il numero composto dalle cifre "2" e "5" in altra notazione?), si userà il carattere corsivo per indicare i numeri scritti in una base non decimale, tralasciando soluzioni come l'uso del pedice, che rischiano di appesantire troppo il testo.
2) Per rappresentare le cifre maggiori di *9* nelle basi superiori a quella decimale saranno utilizzate, nell'ordine, le lettere dell'alfabeto: *A,B,C* e così via.

INTRODUZIONE
Sistemi di numerazione
Un sistema di numerazione è un sistema utilizzato per rappresentare i numeri e le operazioni che si possono effettuare su di essi. Presso tutte le culture con qualche forma di organizzazione sono state sviluppate notazioni numerali, talora assai rudimentali, fino ad arrivare al sistema oggi più diffuso, quello posizionale decimale.
Vale la pena ricordare la differenza fondamentale tra un *sistema additivo*, come quello usato dai romani, in cui un simbolo rappresenta sempre la stessa quantità, e un *sistema posizionale* in cui, invece, ogni simbolo assume un diverso valore a seconda della posizione in cui si trova.
Così, ad esempio - mentre nel numero romano *XXX* le tre cifre *X* valgono tutte 10 e, dunque, il numero corrisponde al nostro 30 - nel sistema decimale il valore effettivo di 444 non è la somma 4+4+4, ma $4x10^2+4x10^1+4+10^0$.

Il sistema decimale
Com'è noto, l'affermarsi della base 10 tra i sistemi posizionali si deve al fatto che le mani umane hanno 5 dita ciascuna. Anche il sistema numerico dell'antico popolo Maya - che era in base 20 - ha la stessa origine, ma in questo caso venivano contate anche le dita dei piedi.
Nella storia sono state utilizzate anche basi diverse, delle quali restano ancora oggi tracce evidenti nella vita quotidiana, come il sistema sessagesimale dei babilonesi, usato nel calcolo del tempo (minuti, secondi) e degli angoli[1], ma la base 10 ha finito per prevalere ovunque.
Oggi il sistema decimale è considerato talmente "ovvio" che spesso non si pensa nemmeno alla possibilità di eseguire calcoli con un sistema diverso. Ma come sarebbe la matematica se gli uomini avessero 4 dita per mano, oppure 6, oppure avessero 3 mani composte da 3 dita ciascuna?

BASI NUMERICHE "VICINE" A 10
Operando in una base *b* diversa da 10, l'ordine di grandezza dei numeri - l'equivalente delle nostre unità, decine, centinaia etc. - viene definito dalle successive potenze di *b*. Ad esempio, il valore del numero *234* in base 8 è dato da: $2x8^2+3x8^1+4x8^0$ = 128+24+4 = 156 (in notazione decimale).
Proviamo ad esaminare più in dettaglio proprio la base 8 e le altre basi più vicine - come numero di cifre - a quella decimale.

[1] Altri esempi, relativi alla base 12, saranno ripresi più avanti.

Il sistema ottale

Immaginiamo un mondo in cui l'uomo abbia solo 4 dita oppure gli esseri pensanti siano simili ai polipi con i loro 8 tentacoli. La numerazione, allora, seguirebbe con ogni probabilità il sistema ottale, comprendente appunto otto cifre, da *0* a *7*.
Vediamo la tavola pitagorica completa relativa alla numerazione in base 8.

NUMERI IN BASE 8 - TAVOLA PITAGORICA

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*10*
2	*4*	*6*	*10*	*12*	*14*	*16*	*20*
3	*6*	*11*	*14*	*17*	*22*	*25*	*30*
4	*10*	*14*	*20*	*24*	*30*	*34*	*40*
5	*12*	*17*	*24*	*31*	*36*	*43*	*50*
6	*14*	*22*	*30*	*36*	*44*	*52*	*60*
7	*16*	*25*	*34*	*43*	*52*	*61*	*70*
10	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*	*70*	*100*

Le cifre terminali dei multipli di 2 e 6 si ripetono seguendo le successioni *6-4-2-0* e *2-4-6-0*.
Si tratta di una regola che vale per qualsiasi base pari: le cifre terminali dei multipli dei numeri pari che non dividono esattamente la base, si ripetono due volte con uno 0 a metà della tavola.

La base 9

Utilizzare come base di un sistema posizionale un numero dispari crea una situazione decisamente strana, poiché siamo talmente abituati al concetto di pari e dispari che ci appare "innaturale" un sistema numerico privo di questa fondamentale bipartizione dei numeri.
Si possono verificare due situazioni molto diverse, a seconda che il numero scelto come base sia primo oppure composto. Esaminiamo dapprima la base 9 che, ovviamente, rientra nel secondo caso.

NUMERI IN BASE 9 - TAVOLA PITAGORICA

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*10*
2	*4*	*6*	*8*	*11*	*13*	*15*	*17*	*20*
3	*6*	*10*	*13*	*16*	*20*	*23*	*26*	*30*
4	*8*	*13*	*17*	*22*	*26*	*31*	*35*	*40*
5	*11*	*16*	*22*	*27*	*33*	*38*	*44*	*50*
6	*13*	*20*	*26*	*33*	*40*	*46*	*53*	*60*
7	*15*	*23*	*31*	*38*	*46*	*54*	*62*	*70*
8	*17*	*26*	*35*	*44*	*53*	*62*	*71*	*80*
10	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*	*70*	*80*	*100*

Visto che 9 è divisibile per 3, in questa base i numeri possono essere ripartiti - anziché nei due classici insiemi, pari e dispari - in tre gruppi “alfa”, “beta” e “gamma”, corrispondenti ai numeri 1, 2 e 0 (modulo 3).
Senza addentrarci troppo nell’analisi, vediamo soltanto come potrebbe essere la tabella con i risultati del prodotto tra numeri dei tre diversi gruppi, raffrontata con quella tra pari e dispari che conosciamo.

MOLTIPLICAZIONE IN BASE 10 E IN BASE 9

Base 10	
Pari x Pari	Pari
Pari x Dispari	Pari
Dispari x Dispari	Dispari

Base 9	
Alfa x Alfa	Alfa
Alfa x Beta	Beta
Alfa x Gamma	Gamma
Beta x Beta	Alfa
Beta x Gamma	Gamma
Gamma x Gamma	Gamma

Vale la pena di notare che, se sostituiamo rispettivamente “alfa”, “beta” e “gamma” con *“+1”*, *“-1”* e “*0*”, i risultati della tabella collimano perfettamente con quelli che otterremmo moltiplicando nel nostro sistema numerico *(+1*x*-1=-1; -1*x*-1=+1; +1*x*0=0* etc.)

Un’ultima annotazione riguardo ai numeri *3* e *6*: le cifre terminali di tutti i loro multipli si ripetono per tre volte nella tavola pitagorica in base 9, secondo le successioni *3-6-0* e *6-3-0*.

La base 11
Come detto, ben diverso è il caso di un’altra base dispari vicina a quella decimale, cioè la base 11.
Vediamo in primo luogo la tavola pitagorica relativa, per poi fare alcune considerazioni.

NUMERI IN BASE 11 - TAVOLA PITAGORICA

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*A*	*10*
2	*4*	*6*	*8*	*A*	*11*	*13*	*15*	*17*	*19*	*20*
3	*6*	*9*	*11*	*14*	*17*	*1A*	*22*	*25*	*28*	*30*
4	*8*	*11*	*15*	*19*	*22*	*26*	*2A*	*33*	*37*	*40*
5	*A*	*14*	*19*	*23*	*28*	*32*	*37*	*41*	*46*	*50*
6	*11*	*17*	*22*	*28*	*33*	*39*	*44*	*4A*	*55*	*60*
7	*13*	*1A*	*26*	*32*	*39*	*45*	*51*	*58*	*64*	*70*
8	*15*	*22*	*2A*	*37*	*44*	*51*	*59*	*66*	*73*	*80*
9	*17*	*25*	*33*	*41*	*4A*	*58*	*66*	*74*	*82*	*90*
A	*19*	*28*	*37*	*46*	*55*	*64*	*73*	*82*	*91*	*A0*
10	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*	*70*	*80*	*90*	*A0*	*100*

Si può notare come in questa tavola non vi sia alcuna ricorrenza simile a quella esistente in base 9 o come quelle relative ai numeri pari (nel caso di base anch’essa pari) cui si è accennato.
Al contrario, in base 11 i multipli delle cifre da *1* ad *A* terminano una e una sola volta con ciascuna cifra.

Un altro dato interessante è che tutte le frazioni espresse in base 11 - nessuna esclusa - producono numeri illimitati periodici. Ad esempio, la frazione *1/2* equivale in base 11 a *0,555…*; *1/3* è *0,3737…* e così via.
Naturalmente, la stessa regola vale per qualunque base *b*, se *b* è un numero primo.

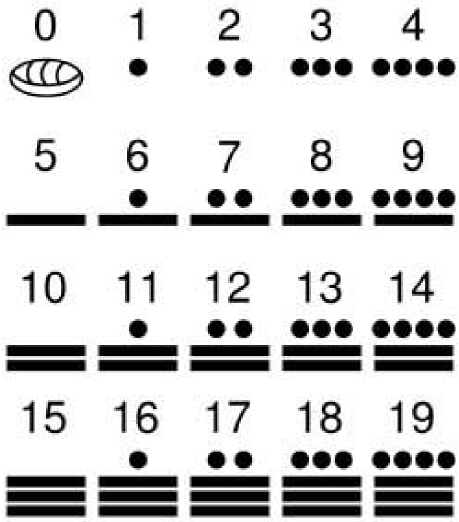
ALTRE BASI NUMERICHE

Le basi "informatiche": 2 e 16

Con la nascita dei primi elaboratori elettronici, il sistema binario ha assunto una grande importanza, dovuta alla possibilità di rappresentare le due cifre *1* e *0* con lo stato dei circuiti elettrici ed elettronici (acceso/spento, on/off) e, dunque, di fare calcoli o codificare informazioni.
Il sistema binario, ovviamente, non è assolutamente utilizzabile nella vita quotidiana, visto che anche numeri relativamente piccoli sarebbero composti da un gran numero di cifre: ad esempio, il numero decimale 1.024 in base 2 sarebbe *10.000.000.000* (1 seguito da 10 zeri).
Per ovviare a questo inconveniente, in informatica si usa anche il sistema esadecimale. Infatti, 16 è la quarta potenza di 2, per cui i numeri binari possono essere raggruppati in blocchi di 4 cifre, partendo da destra, e ciascun blocco si può riscrivere con una cifra esadecimale, da *1* a *F*.
Ad esempio, il numero binario *1011100* (corrispondente a 92 nel sistema decimale) si può esprimere in base 16 come *5C*, poiché i numeri binari *1100* e *101* equivalgono rispettivamente a *C* e a *5*.

Basi "grandi"

All'estremo opposto rispetto al sistema binario, si collocano le basi "grandi" (per fissare un limite, diciamo da 20 in su).
Ovviamente, usando tali basi si potrebbero esprimere i numeri in maniera molto più compatta rispetto al sistema decimale. Inoltre, si avrebbero diversi vantaggi scegliendo come base un numero con molti divisori[2]; ad esempio, 24 o addirittura 60, che è il minimo comune multiplo dei primi sei numeri interi.
Il rovescio della medaglia è evidente: la necessità di utilizzare un gran numero di cifre graficamente distinte tra loro, oppure combinazioni di pochi simboli che, però, diventano sempre più complicate e difficilmente leggibili al crescere dei numeri da rappresentare. Immaginiamo, ad esempio, un numero composto da 6 o 7 "cifre" Maya equivalenti al nostro numero 19 …



I numeri Maya

[2] Questo aspetto sarà ripreso nel capitolo dedicato alla base12.

LA BASE 12

Veniamo, infine, alla base 12, che potrebbe essere nella vita quotidiana una valida alternativa al sistema decimale.
Non sarebbe una novità, visto che i segni di un largo uso della base 12 nel passato sono ancora presenti in molti campi diversi; basti pensare al calcolo del tempo (i 12 mesi, le 12+12 ore del giorno) o all'uso abituale, per alcuni generi alimentari come ostriche e uova, della dozzina.
Che dire, poi, delle misure di lunghezza, peso o moneta tuttora usate nei paesi britannici: 1 piede = 12 pollici; 1 libbra = 12 once; 1 scellino = 12 pence … ?
Alcune tracce restano anche a livello lessicale: in inglese e in tedesco i numeri 11 e 12 hanno nomi specifici ("eleven / elf"; "twelve / zwölf"), mentre il suffisso "teen / zehn" si usa solo a partire dal numero 13.
La base 12 è stata studiata da matematici di diverse epoche, tanto che a più riprese c'è stato chi proponeva di convertire completamente il nostro sistema numerico da decimale a duodecimale.
I motivi sono chiari: la base 12 non ha gli inconvenienti delle basi troppo grandi ed ha il vantaggio di avere molti divisori. Mentre il 10 è divisibile soltanto per 2 e per 5, il 12 divide esattamente 2, 3, 4 e 6 (e, di conseguenza, anche 8, 9 e 10 - *A* nella notazione duodecimale - non sono primi rispetto ad esso).
Il 12 appartiene, infatti, all'insieme dei cosiddetti numeri "altamente composti", cioè numeri che hanno più divisori di qualsiasi intero minore; per trovare un numero che ne abbia di più bisognerebbe salire fino a 24.
Di seguito, riportiamo la tavola pitagorica relativa alla base 12, in cui sono evidenti gli effetti delle molteplici possibilità di suddivisione offerte da questo numero.

NUMERI IN BASE 12 - TAVOLA PITAGORICA

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*A*	*B*	*10*
2	*4*	*6*	*8*	*A*	*10*	*12*	*14*	*16*	*18*	*1A*	*20*
3	*6*	*9*	*10*	*13*	*16*	*19*	*20*	*23*	*26*	*29*	*30*
4	*8*	*10*	*14*	*18*	*20*	*24*	*28*	*30*	*34*	*38*	*40*
5	*A*	*13*	*18*	*21*	*26*	*2B*	*34*	*39*	*42*	*47*	*50*
6	*10*	*16*	*20*	*26*	*30*	*36*	*40*	*46*	*50*	*56*	*60*
7	*12*	*19*	*24*	*2B*	*36*	*41*	*48*	*53*	*5A*	*65*	*70*
8	*14*	*20*	*28*	*34*	*40*	*48*	*54*	*60*	*68*	*74*	*80*
9	*16*	*23*	*30*	*39*	*46*	*53*	*60*	*69*	*76*	*83*	*90*
A	*18*	*26*	*34*	*42*	*50*	*5A*	*68*	*76*	*84*	*92*	*A0*
B	*1A*	*29*	*38*	*47*	*56*	*65*	*74*	*83*	*92*	*A1*	*B0*
10	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*	*70*	*80*	*90*	*A0*	*B0*	*100*

Si può notare che - oltre alle abituali ricorrenze delle basi pari di cui si è detto - anche le cifre finali dei multipli dispari di 3 e 9 si ripetono con regolarità per tre volte all'interno della tabella, seguendo le successioni *3-6-9-0* e *9-6-3-0*.

Operazioni in base 12

Ma come si potrebbe operare concretamente in base 12?

Con l'aiuto della tavola pitagorica appena vista e considerando che vi sono solo due cifre in più rispetto al sistema decimale, non risulta troppo faticoso eseguire qualche semplice operazione.

Per esempio, ecco una moltiplicazione tra due numeri a due cifre.

```
   3A x        2 | 9      (infatti 3+A=11 → 2; 1+8=9; 2x9=16 → 7; 6+4+8=16 → 7)
   18          7 | 7
-------
  268
  3A
----------
  648
```

Si può verificare la correttezza dell'operazione trasformando tutto in decimale: *3A*=3x12+10=<u>46</u>; *18*=1x12+8=<u>20</u>; *648*=6x12^2+4x12+8=864+48+8=<u>920</u>.

Si è riportato a fianco della moltiplicazione anche lo schemino relativo alla cara, vecchia (e sempre utile!) "prova del nove". Siamo però nel sistema duodecimale e, dunque, si deve utilizzare non il numero *9*, ma *B*, quello immediatamente inferiore alla base.

In generale, per qualsiasi base *b* esiste una "prova del *b*-1" esattamente equivalente alla prova del nove del sistema decimale.

Potenze in base 12

Passiamo adesso a un'altra tabella riguardante le potenze di tutti i numeri di una cifra nel sistema duodecimale.

NUMERI IN BASE 12 - POTENZE DI *2-3-4-5-6-7-8-9-A-B*

Pot.	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***A***	***B***
2	*4*	*9*	*14*	*21*	*30*	*41*	*54*	*69*	*84*	*A1*
3	*8*	*23*	*54*	*A5*	*160*	*247*	*368*	*609*	*6B4*	*92B*
4	*14*	*69*	*194*	*441*	*900*	*1.481*	*2.454*	*3969*	*5954*	*8581*
5	*28*	*183*	*714*	*1.985*	*4.600*	*9.887*	*16.B68*	*2A.209*	*49.A54*	*79.24B*
6	*54*	*509*	*2.454*	*9.061*	*23.000*	*58.101*	*107.854*			
7	*A8*	*1.323*	*9.594*	*39.265*	*116.000*	*338.707*	*851.768*			
8	*194*	*3.969*	*31.B14*							

La tabella dà una chiara idea del fatto che in base 12 le potenze seguirebbero una regolarità assai maggiore che nel sistema decimale. In particolare, riguardo alle cifre con cui terminano i diversi numeri, valgono le regole seguenti:

- potenze di *2*: l'ultima cifra è alternativamente *4* e *8*
- potenze di *3*: le ultime due cifre sono ciclicamente *09-23-69-83*
- potenze di *4*: le ultime due cifre sono ciclicamente *14-54-94*
- potenze di *5*: l'ultima cifra è alternativamente *1* e *5*
- potenze di *6*: terminano con un numero crescente di zeri, sempre preceduti da *3, 6* o *9*
- potenze di *7*: l'ultima cifra è alternativamente *1* e *7*
- potenze di *8:* le ultime due cifre sono alternativamente *54* e *68*
- potenze di *9*: le ultime due cifre sono alternativamente *09* e *69*
- potenze di *A*: terminano tutte per *54* (tranne la seconda, che termina per *B4*)

- potenze di *B*: l'ultima cifra è alternativamente *1* e *B*

A titolo di curiosità, vediamo ancora come si presenterebbero alcune note serie numeriche se si utilizzasse la base 12:

- Quadrati: *1-4-9-14-21-30-41-54-69-84-A1-100…* (tutti i quadrati terminano per *1-4-9-0)*.
- Cubi: *1-8-23-54-A5-160-247-368-509-6B4-92B-1.000…*
- Quarte potenze: *1-14-69-194-441-900...* (tutte le quarte potenze terminano per *1-4-9-0)*.
- Altre potenze pari: come per le potenze 2 e 4, i numeri terminano sempre per *1-4-9-0.*
- Fattoriale: *1-2-6-20-A0-500-2.B00-1B.400-156.000-1.270.000...* Si nota la presenza di un numero "tondo" come *500* (equivalente al numero decimale 720).
- Numeri di Fibonacci: *1-1-2-3-5-8-11-19-2A-47-75-100...* In questo caso troviamo un numero ancora più "tondo": *100* (144 nel sistema decimale).

Frazioni in base 12

Infine, passando dai numeri interi a quelli con la virgola, si riporta una tabella che - mettendo a confronto alcune semplici frazioni nella notazione decimale e in quella duodecimale - mostra in maniera immediata alcuni vantaggi del sistema in base 12.

FRAZIONI - CONFRONTO TRA BASE 10 E BASE 12

Numero decimale	**Frazione decimale**	***Frazione duodecimale***	***Numero in base 12***
0,5	1/2	*1/2*	*0,6*
0,333…	1/3	*1/3*	*0,4*
0,25	1/4	*1/4*	*0,3*
0,2	1/5	*1/5*	*0,244…*
0,166…	1/6	*1/6*	*0,2*
0,125	1/8	*1/8*	*0,16*
0,111…	1/9	*1/9*	*0,14*
0,1	1/10	*1/A*	*0,122…*
0,666…	2/3	*2/3*	*0,8*
0,75	3/4	*3/4*	*0,9*
1,333…	4/3	*4/3*	*1,4*
1,5	3/2	*3/2*	*1,6*

Come si vede, usando la base 12 scomparirebbero tutti i numeri periodici nelle frazioni aventi come denominatore 3 o un suo multiplo. In altre parole, sarebbe sempre possibile dividere esattamente una quantità (ad esempio, una somma in denaro) in tre, quattro o sei parti uguali.
Il contrario vale, ovviamente, per le frazioni con 5 (o un suo multiplo) al denominatore, ma è chiaro che, nella pratica, sono molto più comuni frazioni come 1/4, 1/3, 2/3 e 3/4 rispetto a 1/5 o 2/5. In base 12 le quattro frazioni elencate sarebbero esprimibili con numeri aventi una sola cifra dopo la virgola (*0,3; 0,4; 0,8; 0,9* rispettivamente), laddove nel sistema decimale troviamo, invece, due numeri con doppia cifra dopo la virgola e due numeri periodici.
In conclusione, la base 10 è ormai talmente radicata che l'ipotesi di cambiare sistema di numerazione appare del tutto remota. Ma se ciò dovesse avvenire, magari in un lontano futuro, la base 12 sarebbe indubbiamente la naturale candidata alla "successione".

Ottobre 2010