Il numero aureo ed i suoi sviluppi. Perimetri, aree e serie infinite nel rettangolo, nel triangolo (aurei e non) e nel quadrato

Guido Carolla[1]

Sunto. Si premettono dapprima alcune nozioni relative al numero aureo, ai suoi derivati e come si perviene ad essi anche per mezzo della successione di Fibonacci, della formula di Binet e con l'uso di un programma al computer. Il terzo paragrafo riporta due teoremi sulle progressioni e serie auree. Infine, si introducono e si dimostrano tre teoremi analoghi sui perimetri, sulle aree e serie infinite nel rettangolo, nel triangolo (aurei e non) e nel quadrato.

Abstract. At first the author premises some notions about the golden number and its derivatives, and about the way you attain them, also through Fibonacci's sequence, Binet's formula, and with a computer programme. The third paragraph presents two theoremas about progressions and golden series. Finally, the author demonstrates three theoremas about perimeters, areas and infinite series in rectangles, triangles and squares.

1. Numero, sezione, media, rettangolo e triangolo aurei

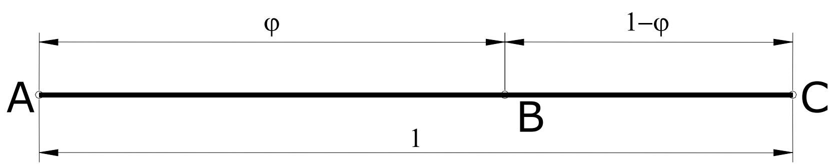

fig. 1

Si premette qualche nozione relativa all'oggetto. Dalla proporzione detta aurea (v. fig. 1)

$|AC|/|AB| = |AB|/|BC|$ si ha la media geometrica, detta media aurea: $|AB| = \sqrt{|AC| \cdot |BC|}$, nella quale sostituendo $|AB| = x$, AC=1, BC=1-x, si ha: $x^2 + x - 1 = 0$, che risolta permette di ottenere i

[1] Piazza G. Mazzini n. 24, 73100 Lecce. Telefono 0832-317045, cell. 347-4632979; e-mail: guidocarolla@libero.it

seguenti valori: $|\mathrm{AB}| = \mathrm{x}_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}61803398...$ e $|\mathrm{x}_2| = \left|\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right| = 1{,}61803398...$, rispettivamente piccoli numero aureo o sezione aurea o rapporto aureo da $|AB|/|AC|$ o $|BC|/|AB|$, cioè $\varphi = 0{,}61803398...$ e grandi numero aureo o sezione aurea da $|AC|/|AB|$ o $|AB|/|BC|$, cioè $\Phi = 1+\varphi = 1{,}61803398...$[2] o anche grande rapporto aureo da $\Phi/1 = 1/\varphi$.

Il rettangolo aureo è ogni rettangolo che ha le dimensioni che sono nei rapporti $|\mathrm{AC}|/|\mathrm{AB}| = |\mathrm{AB}|/|\mathrm{BC}|$.

Il triangolo aureo è un triangolo isoscele con un angolo di 36° e gli altri due di 72° ciascuno e i suoi lati stanno in rapporto aureo con la sua base.

2. Successione dei numeri di Fibonacci, formula di Binet e determinazione di numero e sezione aurei anche con l'uso del computer

Si richiama il significato di alcune voci e formule matematiche evidenziando che:
la SUCCESSIONE è una sequenza enumerabile aventi le componenti (termini) in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali o relativi; l'individuazione della successione dei numeri di FIBONACCI si ha mediante il suo legame con uno o più elementi precedenti, infatti $F_0 = F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$;
le formule per il calcolo diretto sono la binomiale $F_n = \sum_{k\geq 0}\binom{n-k}{k}$ e quella di BINET

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right];$$

la PROGRESSIONE GEOMETRICA è una successione di numeri non nulli il cui rapporto (ragione q) tra un termine e quello che lo precede è costante e il cui elemento generico si può esprimere mediante la formula $a_k = a_h \cdot q^{k-h}$; la PROGRESSIONE AUREA è una progressione geometrica di ragione φ i cui termini centrali sono $1+\varphi,\ 1,\ \varphi$ (decrescente) e di ragione $1+\varphi = \dfrac{1}{\varphi}$ con i termini cen-

[2] Nei secoli passati per indicare la sezione aurea si usava la lettera greca "tau", ma all'inizio del secolo XX il matematico americano Mark Barr propose, come simbolo, l'altra lettera "phi", in omaggio al grande scultore ateniese Fidia che la ebbe sempre presente nel realizzare le sue sculture e nel costruire il Partenone di Atene.

trali $\varphi,\ 1,\ 1+\varphi$ (crescente). In particolare i rapporti consecutivi dei numeri di Fibonacci permettono di determinare il numero e la sezione aurei come segue:

$$F_{n-1}/F_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi = (\sqrt{5}-1)/2 \quad \text{e} \quad F_n/F_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi = 2/(\sqrt{5}-1) = (\sqrt{5}+1)/2\,.$$

Si riporta un *listato in QBasic* su quanto detto sopra, evidenziando che già con *n=20*, tanto con la successione che lega uno o più elementi precedenti (Fibonacci) che con la formula diretta di Binet si possono avere valori soddisfacentemente approssimati di φ e di Φ:

```
CLS : PRINT "NUMERI DI FIBONACCI;"
PRINT "NA=NUMERO AUREO=X1, SA=SEZIONE AUREA=VALORE ASSOLUTO X2 DELL'EQUAZ. x^2+x-1=0: X1=(-1+SQR(5))/2=.61803398...; X2=(-1)(-1-SQR(5))/2=1.61803398..."
PRINT "QUESTI SONO CALCOLATI ANCHE CON I RAPPORTI DEI N.RI DI FIBONACCI(F) E GLI STESSI DATI DALLA FORMULA DI BINET(B) AL TENDERE DI N AD ∞,CIOE' F(N-1)/ F(N) = B(N - 1) / B(N) = NA E F(N)/F(N-1)=B(N)/ B(N-1)=SA."
10 DIM I: DIM F(100): DIM B(100)
INPUT "DIGITA QUANTI N.RI di FIBONACCI VUOI(per una buona approssimazione dei rapporti se ne consigliano 20 o più) "; I
F(1) = 1: F(2) = 1: F(3) = F(1) + F(2): PRINT "I N.RI DI FIBONACCI SONO:"
PRINT F(1); F(2); F(3);
FOR N = 3 TO I - 1
R = SQR(5)
B(N) = (((1 + R) / 2) ^ N + ((1 - R) / 2) ^ N) / R
F(N + 1) = F(N - 1) + F(N)
PRINT F(N + 1);
NEXT N
PRINT
PRINT "NA=Numero aureo=F("; N - 2; ")/F("; N - 1; ")= "; F(N - 2) / F(N - 1)
PRINT "NA=Numero aureo=B("; N - 2; ")/B("; N - 1; ")= "; B(N - 2) / B(N - 1)
PRINT "SA=Sezione aurea=F("; N - 1; ")/F("; N - 2; ")= "; F(N - 1) / F(N - 2)
PRINT "SA=Sezione aurea=B("; N - 1; ")/B("; N - 2; ")="; B(N - 1) / B(N - 2)
PRINT "LA NOTEVOLE EQUAZIONE E'DATA DA 1+NA=1/NA, CIOE': ";
PRINT 1 + F(N - 2) / F(N - 1); "circa="; F(N - 1) / F(N - 2); "circa"; "( CON FIBONACCI)"
PRINT 1 + B(N - 2) / B(N - 1); "circa="; B(N - 1) / B(N - 2); "circa"; "( CON BINET)"
PRINT "Essendo il valore assoluto della seconda radice dell'equazione X2=(-1)*(-SQR(5)-1)=1.61803398..."
PRINT "che è proprio la sezione aurea o rapporto aureo."
```

```
INPUT "VUOI CONTINUARE? S/N"; G$
IF G$ = "S" THEN 10
END
```

Esempio con input e output

NUMERI DI FIBONACCI;
NA=NUMEROAUREO=X1, SA=SEZIONEAUREA=VALORE ASSOLUTO X2 DELL'EQUAZ. x^2+x-1=0: X1=(-1+SQR(5))/2=.61803398...;
X2=(-1)*(-1-SQR(5))/2=1.61803398...
QUESTI SONO CALCOLATI ANCHE CON I RAPPORTI DEI N.RI DI FIBONACCI(F) E GLI STESSI DATI DALLA FORMULA DI BINET(B)
AL TENDERE DI N AD ∞,CIOE' F(N-1)/ F(N) = B(N - 1) / B(N) = NA E F(N)/F(N-1)=B(N)/B(N-1)=SA.
DIGITA QUANTI N.RI di FIBONACCI VUOI(per una buona approssimazione dei rapporti se ne consigliano 20 o più) ? 20
I N.RI DI FIBONACCI SONO:
1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597 2584 4181 6765
NA=Numero aureo=F(18)/F(19)= .6180339
NA=Numero aureo=B(18)/B(19)= .618034
SA=Sezione aurea=F(19)/F(18)= 1.618034
SA=Sezione aurea=B(19)/B(18)= 1.618034
LA NOTEVOLE EQUAZIONE E' DATA DA 1+NA=1/NA, CIOE': 1.618034 circa= 1.618034 circa(CON FIBONACCI)
1.618034 circa= 1.618034 circa (CON BINET)
Essendo il valore assoluto della seconda radice dell'equazione
X2=(-1)*(-SQR(5)-1)/2=1.61803398...
che è proprio la sezione aurea o rapporto aureo.

3. Due teoremi sulle progressioni auree, le serie auree

3.1 *Teorema*: Di una progressione geometrica, la cui ragione sia il numero aureo φ = 0,6180339…, la somma infinita dei suoi termini a_i, a partire da uno qualunque di essi a_k, è uguale al valore del termine che precede di due posti quello di partenza, cioè $\sum_{i=k}^{\infty} a_i = a_{k-2}$: tra di esse, dicesi aurea quella che ha i tre termini centrali $1+\varphi$, 1, φ.

3.2 *Teorema*: Considerata la progressione aurea del teorema 1.1 e prolungando la stessa indefinitamente con l'aggiunta di altri termini, sia a destra a_i che a sinistra a_{-i}, invertendone l'ordine dei termini, facendo coincidere quello centrale $a_0 = 1$, si ha una progressione geometrica aurea crescente i cui termini e la ragione sono rispettivamente i corrispondenti reciproci della prima e viceversa, cioè si ha $\forall n \in N \rightarrow \frac{1}{a_{\pm n}} = a_{\mp n}$.

Dimostrazione del teorema 3.1: Essendo noto che in una progressione geometrica decrescente, i cui termini indicheremo con a_i e la ragione q è -1<q<1, la somma infinita dei termini a partire da un qualunque a_k è $S_\infty = \frac{a_k}{1-q}$, nel caso della progressione aurea, per quanto detto sarà $\sum_{i=k}^{\infty} a_i = \frac{a_k}{1-\varphi}$, cioè $a_k \cdot \frac{1}{1-\varphi}$, per la peculiarità del numero aureo che è $\varphi = 0{,}6180339...$, avremo $\frac{1}{1-\varphi} = 2{,}6180339...$, quindi potremo scrivere $\frac{1}{1-\varphi} = \frac{1}{\varphi^2}$ o $\frac{1}{1-\varphi} = 2+\varphi$, sostituendo a seguire questi due valori nella formula iniziale ed operando con semplici passaggi si hanno: $\sum_{i=k}^{\infty} a_i = \frac{a_k}{1-\varphi} = \frac{a_k}{\varphi^2} = a_{k-2}$, oppure

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{\infty} a_i &= \frac{a_k}{1-\varphi} = a_k \cdot (2+\varphi) = 2a_k + a_k\varphi = 2a_{k-2}\varphi^2 + a_{k-2}\varphi^2 \cdot \varphi = \\
&= a_{k-2}(2\varphi^2 + \varphi^3) = a_{k-2}\left[2(0{,}6180339...)^2 + (0{,}6180339...)^3\right] = \\
&= a_{k-2}(0{,}7639318... + 0{,}236068...) = a_{k-2} \cdot 1 = a_{k-2}
\end{aligned}$$

c. v. d. .

Dimostrazione del teorema 3.2: Essendo data la progressione geometrica aurea decrescente $1+\varphi$, 1, φ, la cui ragione positiva è $\varphi < 1$, sarà sempre possibile prolungarla a sinistra e a destra indefinitamente con l'aggiunta di altri termini, di cui facilmente ne calcoleremo alcuni con una formula generale che riporteremo avanti:

$$...,(5\varphi+8),(3\varphi+5),(2\varphi+3),(2+\varphi),(1+\varphi),1,\varphi,(1-\varphi),(2\varphi-1),(2-3\varphi),(5\varphi-3),...,$$

i quali termini indicheremo rispettivamente con $..., a_{-5}, a_{-4}, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...$

il cui calcolo si è fatto con la seguente formula: $\forall n \in N \rightarrow a_{\mp n} = a_{\mp n \pm 2} \pm a_{\mp n \pm 1} = \varphi^{\mp n}$.

Ora, facciamo coincidere il termine centrale $a_0 = 1$ e invertiamo l'ordine degli stessi $\ldots,(5\varphi-3),(2-3\varphi),(2\varphi-1),(1-\varphi),\varphi,1,(1+\varphi),(2+\varphi),(2\varphi+3),(3\varphi+5),(5\varphi+8),\ldots$, avremo così la progressione crescente aurea di ragione $1+\varphi$, per cui per dimostrare che partendo dal termine 1 i reciproci dei termini a destra sono rispettivamente uguali ai termini alla sinistra di 1, cioè $\forall n \in N \rightarrow \frac{1}{a_{\pm n}} = a_{\mp n}$, basterà scrivere la progressione geometrica aurea decrescente con i suoi valori equivalenti e cioè $\ldots,\frac{1}{\varphi^5},\frac{1}{\varphi^4},\frac{1}{\varphi^3},\frac{1}{\varphi^2},\frac{1}{\varphi},1,\varphi,\varphi^2,\varphi^3,\varphi^4,\varphi^5,\ldots$, dalla quale si rileva chiaramente che $\forall n \in N \rightarrow \frac{1}{\varphi^n} = \frac{1}{\varphi^n}$, cioè proprio quanto detto nell'enunciato del teorema $\forall n \in N \rightarrow \frac{1}{a_{\pm n}} = a_{\mp n}$

c. v. d. .

3.3 *Serie auree*

Riportiamo la serie aurea decrescente come somme di potenze del numero aureo con i relativi valori ottenuti applicando i teoremi 3.1 e 3.2:

$$1+\varphi+\varphi^2+\varphi^3+\ldots = 2+\varphi = \frac{1}{\varphi^2} = \frac{1}{1-\varphi}; \varphi+\varphi^2+\varphi^3+\ldots =$$
$$= 1+\varphi = \frac{1}{\varphi}; \varphi^2+\varphi^3+\varphi^4+\ldots = 1; \varphi^3+\varphi^4+\varphi^5+\ldots = \varphi;$$

$1-\varphi+\varphi^2-\varphi^3+\varphi^4-\ldots = \frac{1}{1+\varphi} = \varphi;$ riportiamo ora alcuni sviluppi di serie esponenziali e logaritmiche, che soddisfano per il valore di φ = 0,6180339…:

$$\ln(\varphi) = 2\left\{\frac{\varphi-1}{\varphi+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{\varphi-1}{\varphi+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\varphi-1}{\varphi+1}\right)^5 + \ldots\right\} = = -2\left(\varphi^3 + \frac{\varphi^9}{3} + \frac{\varphi^{15}}{5} + \ldots\right) = -0{,}4812119\ldots;$$

$$\ln(\varphi) = \frac{\varphi-1}{\varphi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi-1}{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\varphi-1}{\varphi}\right)^3 + \ldots =$$

$$= -\varphi + \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^3}{3} + \frac{\varphi^4}{4} - \ldots = -0{,}4812119\ldots;$$

$$\frac{\ln(1+\varphi)}{1+\varphi} = \varphi - \left(1+\frac{1}{2}\right)\varphi^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\varphi^3 - \ldots =$$

$$= \varphi - \frac{3}{2}\varphi^2 + \frac{11}{6}\varphi^3 - \frac{25}{12}\varphi^4 + \ldots = 0{,}2974052\ldots$$

Riportiamo anche alcuni sviluppi di serie esponenziali e logaritmiche che soddisfano per il valore di $1+\varphi=1{,}6180339\ldots$:

$$e^{1+\varphi}=2+\varphi+\frac{(1+\varphi)^2}{2!}+\frac{(1+\varphi)^3}{3!}+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi^2\cdot 2!}+\frac{1}{\varphi^3\cdot 3!}+\ldots=5{,}04316\ldots;$$

$$a^{1+\varphi}=e^{(1+\varphi)\ln(a)}=1+(1+\varphi)\ln(a)+\frac{[(1+\varphi)\ln(a)]^2}{2!}+\frac{[(1+\varphi)\ln(a)]^3}{3!}+\ldots=$$

$$=1+\frac{\ln(a)}{\varphi}+\frac{(\ln(a))^2}{\varphi^2\cdot 2!}+\frac{(\ln(a))^3}{\varphi^3\cdot 3!}+\ldots;$$

$$\ln(1+\varphi)=2\left\{\frac{\varphi}{2+\varphi}+\frac{1}{3}\left(\frac{\varphi}{2+\varphi}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{\varphi}{2+\varphi}\right)^5+\ldots\right\}==2\left(\varphi^3+\frac{\varphi^9}{3}+\frac{\varphi^{15}}{5}+\ldots\right)=0{,}4812119\ldots;$$

$$\ln(1+\varphi)=\frac{\varphi}{1+\varphi}+\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{1+\varphi}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\varphi}{1+\varphi}\right)^3+\ldots==\varphi^2+\frac{\varphi^4}{2}+\frac{\varphi^6}{3}+\ldots=0{,}4812119\ldots.$$

Dall'osservazione di alcuni dei suddetti sviluppi si possono notare delle ricorrenti equivalenze, inoltre, proprio dalla somma del terzo sviluppo soddisfatto per il valore di φ con l'ultimo soddisfatto per $1+\varphi$, riportati sopra, si ha:

$$\ln(1+\varphi)=\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{\varphi^2}{2}+\frac{\varphi^3}{3}-\frac{\varphi^4}{4}+\ldots+\varphi^2+\frac{\varphi^4}{2}+\frac{\varphi^6}{3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{\varphi^2}{2}+\frac{\varphi^3}{3}+\ldots\right)=0{,}4812119\ldots.$$

Gli sviluppi in serie sono stati ricavati con semplici passaggi dalla teoria generale delle serie esponenziali, logaritmiche e dalle relazioni equivalenti tra i valori dei "termini" evidenziate nella dimostrazione del teorema 3.2.

3.4 *Nota su alcuni esempi di algoritmi comprendenti* π, e, φ *, sin* φ, *cosp* φ

Allo scopo di una semplice curiosità teorica dalla progressione geometrica decrescente che ha un termine uguale a $\pi.e$, la ragione $1-\varphi$, abbiamo ricavato la somma infinita dei termini, a partire dallo stesso $\pi\cdot e$, che è

$S_\infty = \frac{\pi \cdot e}{1-(1-\varphi)} = \frac{\pi \cdot e}{\varphi}$, invece con la ragione $-\varphi$ avremo $S_\infty = \frac{\pi \cdot e}{1-(-\varphi)} = \pi \cdot e \cdot \varphi$; infine, con i due seguenti sviluppi $e^\varphi \sin\varphi = \varphi + \varphi^2 + ... + \frac{2^{n/2}\sin(n\pi/4)\varphi^n}{n!} + ... = 1{,}075012...$,

$\frac{e^\varphi \cos p(\varphi)}{1-\cos p(\varphi)} = 1 + \varphi + ... + \frac{2^{n/2}\cos p(n\pi/4)\varphi^n}{[1-\cos p(n\pi/4]n!} + ... = 1{,}512089...$, concludiamo le relazioni tra π, e, φ, sin φ, cosp φ, essendo questo ultimo il coseno parabolico[3] della parabola $y^2 + 2x = 1$.

4. Teorema sulle somme dei perimetri, delle aree del rettangolo aureo[4], del rombo inscritto e di tutti gli infiniti rettangoli aurei e rombi alternativamente inscritti (v. fig. 2)

Le somme dei perimetri di un rettangolo aureo, le cui dimensioni sono 1 e il numero aureo φ, e del rombo inscritto in esso, avente per vertici i punti medi dei lati del rettangolo, sono pari alle somme dei perimetri di tutti gli altri infiniti rettangoli aurei e rombi alternativamente inscritti nello stesso modo, sono uguali al doppio della somma tra la sezione aurea e la diagonale del rettangolo aureo; inoltre, l'area del rettangolo aureo è pari alla somma delle aree del rombo ad esso inscritto e di tutti gli altri infiniti rettangoli aurei e rombi alternativamente inscritti, che equivale al numero aureo.

La somma dei perimetri del rettangolo aureo ABCD, di dimensioni 1 e φ, e del rombo EFGH ad esso inscritto è $2 \cdot \left(1 + \varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)$, nella quale $1+\varphi$ è la sezione aurea e $\sqrt{1+\varphi^2}$ è la diagonale del rettangolo aureo; la somma dei perimetri di tutti gli altri infiniti rettangoli aurei e rombi alternativamente inscritti è

$$\left(1 + \varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right) \cdot (1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + ...),$$

questo ultimo fattore costituisce una serie della progressione geometrica di ragione $1/2 < 1,$ per cui

è $\frac{1}{1-1/2} = 2,$ quindi si ha $\left(1 + \varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right) \cdot 2$ c. v. d..

[3] V. Carolla G. [4]

[4] Si è preso in considerazione questo oggetto meraviglioso, il cui interesse non è solo matematico ma anche artistico, architettonico e inoltre presente sovente in natura: già noto agli architetti della Grecia del V secolo a. C. per la sua armonia, è dimostrato in psicologia che trattasi del rettangolo più bello ed appagante per l'occhio umano.

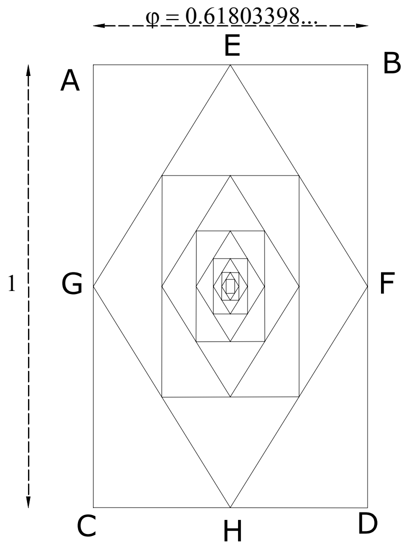

fig. 2

Inoltre, l'area del rettangolo aureo ABCD è φ, la somma delle aree del rombo EFGH ad esso inscritto e di tutti gli altri infiniti rettangoli e rombi alternativamente inscritti equivale a $\varphi \cdot (1/2 + 1/4 + 1/8 + ...)$, questo ultimo fattore costituisce una serie della progressione geometrica di ragione $1/2$, per cui è $\frac{1/2}{1-1/2} = 1$, quindi la somma delle aree è $\varphi \cdot 1 = \varphi$ c.v.d. . Detto teorema ha validità per un rettangolo qualunque le cui dimensioni siano *a*, *b*; infatti, per i perimetri e per le aree si avranno rispettivamente i seguenti riscontri:

$2 \cdot \left(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}\right) = (1 + 1/2 + 1/4 + ...) \cdot \left(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}\right), a \cdot b = (1/2 + 1/4 + 1/8 + ...) \cdot a \cdot b$ c. v. d. .

5. Teorema sui quadrati (v. fig. 3)

La somma dei perimetri di due quadrati che si ottengono inscrivendo nel primo di lato *a* un secondo avente per vertici i punti medi dei lati del primo è uguale alla somma dei perimetri di tutti gli altri infiniti quadrati che si ottengono inscrivendo nello stesso modo nel secondo un terzo, in questo un quarto e così di seguito. Inoltre, l'area del quadrato di lato *a* è equivalente alla somma delle aree di tutti gli altri infiniti quadrati inscritti.

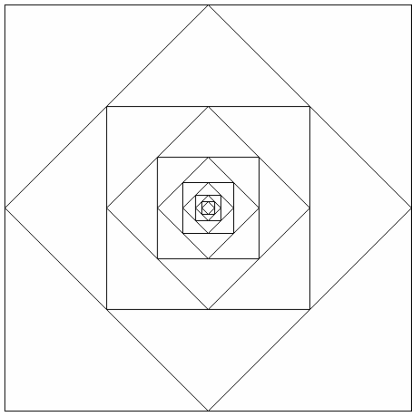

fig. 3

Sia *a* il lato del primo quadrato. Il lato del secondo quadrato è metà della diagonale del primo $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \mathrm{a}$, il lato del terzo $\frac{1}{2} \cdot \mathrm{a}$, il lato del quarto quadrato $\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \mathrm{a}$, ecc. La somma dei perimetri del primo e secondo quadrato è $\mathrm{a} \cdot \left(4 + 2 \cdot \sqrt{2}\right) = 6.8284271... \cdot \mathrm{a}$; la somma dei perimetri di tutti gli altri infiniti quadrati, a partire dal terzo è $\mathrm{a} \cdot \left(2 + \sqrt{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + ...\right)$, questo ultimo fattore costituisce una serie della progressione geometrica di ragione $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, per cui è uguale a $\frac{2}{1 - \sqrt{2}/2} = 6.8284271...$, quindi la somma dei perimetri di cui sopra è proprio $6.8284271... \cdot \mathrm{a}$

c. v. d. .

Ora, dimostreremo che l'area del quadrato di lato *a* è equivalente alla somma delle aree degli infiniti quadrati inscritti, infatti si ha

$$\left[\left(\sqrt{2}/2\right)^2 + (1/2)^2 + \left(\sqrt{2}/4\right)^2 + ...\right] \cdot a^2 = (1/2 + 1/4 + 1/8 + ...) \cdot a^2 = a^2 \quad \text{c.v.d..}$$

6. Teorema sui triangoli (v. fig. 4)

Il perimetro e l'area di un triangolo equilatero sono rispettivamente uguali ed equivalenti alla somma dei perimetri ed a tre volte la somma delle aree di tutti gli altri infiniti triangoli che si ottengono inscrivendo nel triangolo dato un secondo triangolo avente per vertici i punti medi dei lati del primo, e nello stesso modo inscrivendo nel secondo un terzo triangolo e così di seguito.

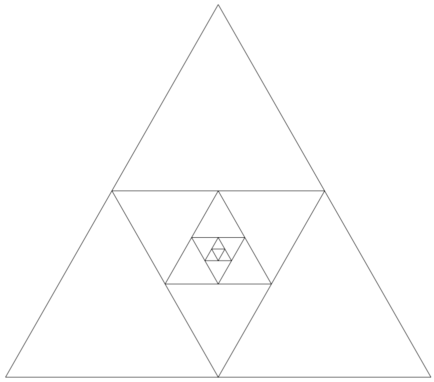

fig. 4

Sia *a* il lato del triangolo equilatero esterno della fig. 4 , per cui il perimetro è $3 \cdot a$.
La somma dei perimetri di tutti i triangoli che hanno i vertici nei punti medi dei lati dei triangoli nei quali sono inscritti, a partire dal secondo, è $3 \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right)$, questo ultimo fattore in parentesi è uguale ad 1 in quanto costituisce la serie della progressione geometrica di ragione $\frac{1}{2}$, già vista sopra, perciò detta somma dei perimetri è $3 \cdot a$ c. v. d. .
L'area del triangolo di lato a è $\frac{a \cdot \sqrt{a^2 - (a/2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$; la somma delle aree di tutti gli infiniti triangoli inscritti a partire dal secondo è $\sqrt{3} \cdot a^2 \cdot \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \ldots\right)$, questo ultimo fattore in parentesi è una serie della progressione di ragione $\frac{1}{4} < 1$, per cui il suo valore è $\frac{1/16}{1 - 1/4} = \frac{1}{12}$, quindi 3 volte la somma di dette aree è proprio $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$ c. v. d. .
Questo ultimo teorema ha validità per un triangolo qualunque ed in particolare per quello aureo; infatti, se il perimetro del triangolo è $2 \cdot p$, la somma dei perimetri degli infiniti triangoli inscritti è

$\left(1+1/2+1/4+...\right)\cdot \mathrm{p}$, il cui primo fattore è una serie della progressione geometrica di ragione $1/2<1$, che è $\dfrac{1}{1-1/2}=2$, per cui questa ultima somma è $2\cdot \mathrm{p}$ c. v. d.;

inoltre, se l'area del triangolo è S, tre volte la somma delle aree degli infiniti triangoli inscritti sarà $3\cdot \mathrm{S}\cdot\left(1+1/4+1/16+...\right)$ ed essendo l'ultimo fattore una serie della progressione geometrica di ragione $1/4$, il cui valore è dato da $\dfrac{1}{1-1/4}=1/3$, si ha che questa ultima somma delle aree è $3\cdot \mathrm{S}\cdot 1/3=\mathrm{S}$ c. v. d. . Infine, nel caso del triangolo aureo, nel quale, essendo isoscele, il lato obliquo di lunghezza 1 è in rapporto aureo con la base φ, si ha che il perimetro del triangolo aureo e la somma dei perimetri di tutti i triangoli inscritti sono rispettivamente $2p=2+\varphi=\dfrac{1}{\varphi^2}$ e $\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+...\right)\cdot\dfrac{1}{2\varphi^2}=\dfrac{1}{\varphi^2}$ c. v. d. ; infine , per quanto detto sopra, se l'area del triangolo aureo è $S=\varphi\sqrt{1-\varphi^2/4}/2=\varphi\sqrt{4-\varphi^2}/4=\sqrt{1+\varphi^2}/4=\sqrt{2-\varphi}/4$, equivalente sarà tre volte la somma delle aree di tutti i triangoli aurei inscritti a partire dal primo.

7. Conclusioni

Si conclude dicendo che quanto riportato nel presente articolo avrebbe di per sé poco valore se si perdesse di vista il vero scopo di esso, che è quello di una parziale modesta ricerca e di mettere in risalto come da un punto di vista didattico sia opportuno fornire agli alunni mezzi di osservazione che li possano condurre ad intravedere e scoprire formule o leggi che trovano sempre riscontro nella Matematica.

BIBLIOGRAFIA

[1] Pappas Theoni, “Le Gioie della Matematica”, Franco Muzzio Editore, Padova, 1995.

[2] Mascella R. del Nucleo di Ricerca Didattica ALMPRT, “Triangolo di Tartaglia e numeri di Fibonacci: storia e nuovi problemi” in Atti Corso d’aggiornamento “La Metodologia storica nell’insegnamento della Matematica e della Fisica”, 9/11 novembre 1998, Ripattoni di Bellante (TE) e Università di Teramo, 1998.

[3] Murray R. Spiegel, Manuale di Matematica, McGraw-Hill, 1994.

[4] Carolla G., “Le funzioni paraboliche” in Atti del Congresso MATHESIS “Il ruolo della Matematica nella Società contemporanea”, 17/19 ottobre 2000, Editrice Rotas, Barletta, 2001, pagg. 97-112.

.