Progetto m@t.abel

DIARIO DI BORDO

Titolo attività	**EREDITA' E BAGAGLI**
Docente	**GIACOMO DE LAURENTIS**
Classe	**2ª E**
Scuola	**IPSSART- CASTELLANA GROTTE (BA)**
Data inizio esperienza	**11/02/2009**
Data fine esperienza	**18/02/2009**

NODI CONCETTUALI
Esplicitare i principali nodi concettuali cui l’attività scelta fa riferimento.

1) Traduzione dal linguaggio algebrico al linguaggio naturale.
2) Traduzione dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico: formalizzazione.
3) Traduzione e messa in formula di problemi finalizzata alla loro matematizzazione e soluzione.
4) La ***tabella di traduzione.***
5) Le ***incognite e il dominio della variabile corrispondente.***
6) La ***condizione o informazione esplicita.***
7) La ***condizione o informazione implicita.***
8) L’***incognita aggiuntiva o ausiliaria.***
9) La costruzione di un semplice modello che, consentendo di ridurre al massimo le variabili utilizzate per la soluzione di un problema, risulti adottabile nel risolvere ogni problema che sia risolvibile o con una sola equazione o con un sistema di equazioni.

DESCRIZIONE DELL’ESPERIENZA
Descrivere dal punto di vista operativo l’esperienza svolta in classe (il contesto della classe, gli eventuali adattamenti necessari, i tempi di realizzazione, …) e la metodologia usata (schede di lavoro, lavoro di gruppo, discussione matematica in classe, software utilizzato…)

CONTESTO DELLA CLASSE

Ci si trova in una classe seconda dell’istituto professionale per i servizi alberghieri con sole quattro ore mattutine e settimanali di matematica. La programmazione prevede una ricapitolazione dei contenuti dell’anno precedente ma anche l’introduzione alla geometria analitica e lo studio dei sistemi di equazioni cui gli alunni sono stati introdotti poco prima delle vacanze natalizie dopo aver acquisito alcuni concetti di geometria analitica lineare con particolare riferimento alla retta e alla sua equazione in forma implicita ed esplicita; inoltre all’inizio di questo anno scolastico è stato risolto qualche problema avente per modello un’equazione lineare, focalizzando l’attenzione sull’aspetto linguistico e concettuale della matematica.

PREMESSA E ADATTAMENTI NECESSARI

Prima di poter attuare la sperimentazione si è preferito richiamare quanto già detto alla fine dell'anno scorso e ripreso agli inizi di questo anno in merito al concetto di ***condizione o informazione esplicita***, concetto cui conviene ricorrere e, ove possibile, far opportuno uso qualora ci si trovi ad affrontare la risoluzione di un problema risolvibile o con una sola equazione o con un sistema di equazioni.
Stabilito sulla base delle richieste del problema quali debbano considerarsi essere le incognite del problema, immediatamente dopo si cerca di cogliere tra le righe del problema l'esistenza di qualche ***condizione o informazione esplicita*** così da noi chiamata non tanto e solo perché essa debba essere chiaramente espressa dal problema quanto invece perché essa consente con rapidità e immediatezza di esprimere formalmente un'incognita prestabilita direttamente con un ***polinomio-funzione*** di altre incognite che sono o da formalizzare correntemente, congiuntamente e coerentemente con quanto espresso dalla condizione stessa o in parte già formalizzate perché già in precedenza si sono rilevate e tradotte formalmente altre condizioni esplicite.
Insomma, è stato detto agli alunni che, in un contesto di risoluzione di un problema, tutte le condizioni o informazioni in esso contenute o che ovviamente e scontatamente da esso scaturiscono, ***possono*** classificarsi e denominarsi ***esplicite*** o ***implicite*** (con ovvio riferimento alla loro successiva formalizzazione, più che al grado di evidenza con cui vengono indicate dal problema) semplicemente sulla base del fatto che, mentre le si legge o le si intravede scontatamente tra le righe, già si stabilisce per esse se le si intende tradurre rispettivamente in un ***polinomio-funzione*** oppure in una ***probabile equazione.***
È naturale che sarà facoltativo per lo studente interpretare una condizione del problema, anche se solo implicitamente scontata, come ***esplicita*** (con traduzione in un ***polinomio-funzione***) o come ***implicita*** (con traduzione in una ***probabile equazione***), ma è ovvio che la soluzione del problema avrà un buon avvio se egli sarà riuscito ad estrarre da esso almeno una condizione esplicita con la quale potrà tradurre formalmente almeno due incognite con rapidità e immediatezza.
È inoltre ovvio che lo studente dovrà essere messo al corrente **(**e l'attività che ci si appresta a svolgere mira anche a questo**)** non solo del fatto che comunque dovranno esistere nel problema tante ***equazioni***, per quante sono le ***variabili*** utilizzate per tradurre formalmente le incognite dichiarate (pari, queste ultime, al numero delle variabili, solo se nel problema non è stata rilevata alcuna condizione esplicita), ma anche del fatto che spesso si renderà necessario far emergere ***condizioni implicite*** che, pur non essendo a volte neppure menzionate dal problema, ci impongono di considerare, nella loro fase di formalizzazione in equazioni, l'esistenza di qualche nuova incognita non precedentemente considerata ma di cui è evidentemente necessario che si disponga per risolvere il problema: l'***incognita aggiuntiva o ausiliaria***.

Il ricorso al concetto di ***condizione esplicita*** offre non solo il vantaggio di ridurre le variabili da utilizzare per la soluzione del problema e quindi anche il numero corrispondente di equazioni da risolvere fino alla possibilità di ridurle ad una sola, ma evidenzia anche l'aspetto concettuale della matematica che abitua il giovane a pensare e a ragionare autonomamente consentendogli in questo caso un'alternativa al metodo classico ma automatico e meccanico secondo cui ad ogni incognita deve corrispondere la ***propria lettera-variabile*** con la corrispondente equazione e secondo cui in generale un problema finisce col risolversi spesso e inevitabilmente solo con il ricorso a un sistema di equazioni.

TEMPI DI REALIZZAZIONE

- **1 ora**: descrizione e proposta dell'attività l'***eredità.***
- **1 ora**: descrizione e proposta dell'attività ***bagagli.***
- **2 ore**: somministrazione di 2 test come verifica finale.

METODOLOGIA

Le fasi attraverso cui si è sviluppata la presente attività didattica (sia per ***eredità*** che per ***bagagli***) sono le seguenti:

FASE 1- Proposta del problema da parte dell'insegnante.

FASE 2- Lettura e familiarizzazione col problema da parte dell'alunno.
In questa fase l'alunno cercherà, dopo un'attenta lettura e una sintetica rielaborazione, di individuare le incognite, le condizioni e i dati contenuti nel problema.
Gli alunni potranno inoltre porre varie e diverse domande che, se al momento possono anche rimanere senza risposta precisa, tuttavia esse costituiranno il filo conduttore dello sviluppo successivo. La difficoltà manifestata dagli studenti in questa fase non è da considerarsi totalmente negativa, giacché essa dipende essenzialmente dal non aver ancora sviluppato gli strumenti adatti ad affrontare il problema.

FASE 3- Inizio compilazione della *tabella di traduzione*.
In questa fase, subito dopo che si siano inserite in tabella in linguaggio naturale le incognite precedentemente designate, l'insegnante propone all'alunno di riconoscere tra le condizioni del problema quelle che possono considerasi esplicite (nel senso ovviamente di quanto anticipato e indicato in premessa) rispetto a qualche incognita designata: tali condizioni andranno scritte nel loro spazio riservato in tabella col serio proposito o di riconsiderarle nella successiva fase di formalizzazione del problema e in

particolare delle incognite oppure di utilizzarle subito per formalizzare le incognite correntemente in questa stessa fase.
Le condizioni implicite (sempre nel senso ovviamente di quanto anticipato e indicato in premessa) e i dati saranno invece scritti un po' più sotto col serio proposito di riconsiderarli nella successiva fase della loro formalizzazione in probabili equazioni, fase che, come già anticipato in premessa, potrà suggerire la necessità di introdurre qualche incognita aggiuntiva.
Viene sotto riportata la ***tabella di traduzione*** così come si presenta all'inizio della fase 3

Linguaggio naturale		***Linguaggio algebrico***
Incognite		
Condizioni esplicite		
Condizioni implicite		

FASE 4- Formalizzazione algebrica del problema

In questa fase si faranno emergere, finalmente con chiarezza e senza sottintesi, le condizioni implicite che saranno dettagliatamente trascritte in linguaggio naturale nell'apposito spazio loro riservato nella tabella di traduzione. Tradotte le incognite in linguaggio algebrico, si passerà quindi alla formalizzazione algebrica delle condizioni implicite, formalizzazione che dovrebbe sempre dar luogo a un numero di equazioni pari al numero delle variabili impiegate per la formalizzare le incognite. Qualora invece la formalizzazione algebrica delle condizioni implicite imponesse l'introduzione di qualche variabile non precedentemente considerata, allora questa sarà introdotta come ***incognita aggiuntiva*** nella casella del linguaggio naturale e formalizzata come quanto imposto dalla formalizzazione della condizione implicita che la contiene.

FASE 5- Si propone agli alunni di risolvere il problema mediante le regole del calcolo algebrico

Passiamo ora in rassegna l'attività svolta in classe separatamente per i due problemi.

IL PROBLEMA DELL'EREDITA'

Un padre di tre figli morì lasciando in eredità 1600 monete d'oro. Il testamento precisava che il maggiore dei tre doveva avere 200 monete più del secondo e che al secondo a sua volta spettavano 100 monete più dell'ultimo. Si domanda la quota di ciascuno.

Seguendo la metodologia appena indicata e facendo uso del concetto di condizione esplicita, la tabella di traduzione **alla fine della terza fase metodologica** si presentava, dopo la sua parziale compilazione nel modo sotto riportato. Si noterà che le incognite risultano già formalizzate; infatti si è ritenuto opportuno formalizzarle subito correlandole immediatamente con le condizioni esplicite.

Linguaggio naturale		*Linguaggio algebrico*
Incognite	**1) Quota del maggiore — per la a)** **2) Quota del secondo — per la a)** **3) Quota del minore — per la b)**	**x + 200** **x** **x - 100**
Condizioni esplicite	**a) La quota del maggiore è pari a quella del secondo aumentata di 200 monete** **b) La quota del secondo è pari a quella del minore aumentata di 100 monete**	
Condizioni implicite	**c) Eredità lasciata dal padre morendo: 1600 monete d'oro**	

Fatto emergere, dopo breve discussione, ma con chiarezza e senza sottintesi, che il dato delle 1600 monete in realtà determina la considerazione che la somma delle quote dei tre figli deve essere proprio pari a tale dato, **alla fine della quarta fase metodologica,**   la tabella di traduzione assumeva il seguente aspetto:

Linguaggio naturale		*Linguaggio algebrico*
Incognite	**1) Quota del maggiore — per la a)** **2) Quota del secondo — per la a)** **3) Quota del minore — per la b)**	**x + 200** **x** **x - 100**
Condizioni esplicite	**a) La quota del maggiore è pari a quella del secondo aumentata di 200 monete** **b) La quota del secondo è pari a quella del minore aumentata di 100 monete**	
Condizioni implicite	**c) La somma delle monete ereditate dai tre figli deve essere pari a 1600 monete**	**(x+200)+(x)+(x-100) =1600**

Si è quindi passati alla risoluzione del problema mediante le regole del calcolo algebrico.

Si è quindi posta agli alunni la seguente domanda:

"come ci saremmo comportati se avessimo deciso di considerare solo come implicite tutte le condizioni date dal problema?"

Stando a quanto esposto in premessa e dopo breve discussione, è emerso che, dovendo formalizzare quelle tre condizioni in tre probabili equazioni, le tre incognite potevano benissimo formalizzarsi ciascuna con una propria lettera variabile in modo da pareggiare il conto tra numero delle equazioni e numero di variabili presumibilmente contenute nel sistema che quelle stesse equazioni andrebbero a costituire.
Sicché la tabella di traduzione che si è ottenuta **alla fine della fase 4,** durante la sperimentazione in classe, assumeva il seguente aspetto:

Linguaggio naturale		*Linguaggio algebrico*
Incognite	**1) Quota del maggiore** **2) Quota del secondo** **3) Quota del minore**	**x** **y** **z**
Condizioni esplicite	**Nessuna**	
Condizioni implicite	**a) La quota del maggiore è pari a quella del secondo aumentata di 200 monete** **b) La quota del secondo è pari a quella del minore aumentata di 100 monete** **c) La somma delle monete ereditate dai tre figli deve essere pari a 1600 monete**	**$x = y + 200$** **$y = z + 100$** **$x + y + z = 1600$**

Anche in questo caso si è poi passati alla risoluzione del problema mediante le regole del calcolo algebrico e si è rilevato come nel seguire tale secondo percorso risolutivo, a differenza del primo che richiedeva il ricorso ad una semplice equazione, si sia dovuto necessariamente risolvere un sistema di equazioni. Fatto questo che evidenzia l'utilità del concetto di condizione esplicita che consentirebbe di proporre il primo percorso risolutivo come un modello proponibile e adottabile anche nelle prime classi in cui ancora non si sia affrontato l'argomento inerente i sistemi di equazioni.

IL PROBLEMA DEI BAGAGLI IN AEREO

Le linee aeree permettono a ciascun passeggero di portare in franchigia (cioè senza costi aggiuntivi) un bagaglio non superiore ad un certo peso, oltre il quale si deve pagare per il trasporto in ragione dei chilogrammi in eccedenza (un tanto per ogni chilogrammo). Il sig. Carlo e sua moglie fanno un viaggio in aereo con un bagaglio che complessivamente pesa 54 kg e, dividendolo in parti uguali fra loro, devono pagare € 21 per i chilogrammi oltre la franchigia. Il sig. Carlo pensa che se viaggiasse da solo con gli stessi bagagli (suoi e della moglie) dovrebbe invece pagare € 51.
Si chiede qual è il peso che ciascun passeggero può portare in franchigia.

Seguendo le fasi della metodologia precedentemente indicata e facendo uso del concetto di condizione esplicita, la tabella di traduzione, **alla fine della terza fase metodologica** durante la sperimentazione in classe, si presentava, dopo la sua parziale compilazione, nel modo sotto riportato.

Linguaggio naturale		*Linguaggio algebrico*
Incognite	**1) Il peso che ciascun paseggero può portare in franchigia**	
Condizioni esplicite	**Nessuna**	
Condizioni implicite	**a) Il peso complessivo del bagaglio è di 54 kg e deve considerarsi suddiviso in parti uguali tra i due passeggeri** **b)Carlo e sua moglie devono pagare insieme 21 € per i kg che superano il peso in franchigia** **c)Carlo viaggiando da solo con gli stessi bagagli pagherebbe invece 51 €**	

Si è quindi passati alla quarta fase metodologica.
Dopo aver deciso di formalizzare l'incognita con la lettera x, si è chiesto quindi agli alunni quali possono essere le considerazioni che si possono trarre a questo punto del percorso intrapreso. Si è constatato che dalla prima condizione, più che ottenere una formalizzazione della stessa in un'equazione, si può trarre invece il criterio secondo cui il peso di un bagaglio comune a più passeggeri deve suddividersi tra gli stessi, criterio che, oltre a consentirci di venire subito a conoscenza dei limiti entro cui x varia (infatti se ciascuno dei due passeggeri paga nel portare per sé un peso di 27 kg, vuol dire che x non potrà superare quel valore), è necessario considerare per poter formalizzare la seconda condizione b). Ma quando si è tentato di formalizzare la b) e si è scritto $2(27 - x) = 21$ è subito emersa l'incompletezza e l'erroneità di questa equazione nel momento in cui si poneva mente al fatto che i due membri indicavano

grandezze diverse: il primo, il peso del bagaglio che eccedeva il peso in franchigia concesso dal criterio, il secondo, il prezzo pagato dalla coppia per quel peso.
Si è quindi posta agli alunni la seguente domanda:
"quale aggiustamento è necessario apportare al primo membro di quella equazione perché anch'esso come il secondo possa indicare una grandezza monetaria espressa in € dando così un senso all'equazione stessa? "
È subito emerso che era necessario considerare, con riferimento a quel "***(un tanto per ogni chilogrammo)***" posto tra le righe del problema, il prezzo per ogni kg eccedente il peso in franchigia da pagare da parte di ciascun passeggero, prezzo che, formalizzato con la lettera p, consentiva l'aggiustamento richiesto dell'equazione, definitivamente formalizzata in $2p(27- x) = 21$. Non sono emerse difficoltà nella formalizzazione della condizione c). Alla fine della quarta fase metodologica quindi la tabella di traduzione si presentava nel seguente modo:

Linguaggio naturale		*Linguaggio algebrico*
Incognite	**1) Il peso che ciascun paseggero può portare in franchigia** **2) (incognita aggiuntiva) Il prezzo (€/kg) per ogni kg di bagaglio che supera il peso in franchigia**	**x** **p**
Condizioni esplicite	**Nessuna**	
Condizioni implicite	**a) Il peso complessivo del bagaglio è di 54 kg e deve considerarsi suddiviso in parti uguali tra i due passeggeri** **b) Carlo e sua moglie devono pagare insieme 21 € per i kg che superano il peso in franchigia** **c) Carlo viaggiando da solo con gli stessi bagagli pagherebbe invece 51 €**	$0 < x < 27$ $2p(27- x) = 21$ $p(54 – x) = 51$

Contestualmente, in questa fase, si è evidenziato che non necessariamente le incognite da dichiarare in tabella devono limitarsi soltanto a quelle richieste dal problema, ma che anzi, qualora a priori le si ritenga utili ai fini della soluzione dello stesso, possono introdursene delle altre, ausiliarie, da formalizzare con attenzione possibilmente come polinomio funzione di quelle richieste dal problema stesso.

Si è quindi passati alla risoluzione del problema mediante le regole del calcolo algebrico.

COMPORTAMENTO DEGLI STUDENTI
Valutare come l'attività è stata accolta dagli studenti e il modo in cui hanno assolto al loro compito. Descrivere il clima di lavoro e le forme di collaborazione.

L'attività è stata accolta favorevolmente e al tempo stesso con curiosità ed entusiasmo. Gli alunni hanno partecipato con attenzione e impegno e lavorato interagendo con l'insegnante avvalendosi dei suoi stimoli, suggerimenti, interventi e della sua stessa collaborazione.
In uno stadio più avanzato dell'attività però essi hanno prima lavorato in piccoli gruppi, e infine individualmente, partecipando sempre attivamente a tutte le fasi dello svolgimento dell'attività.

APPRENDIMENTO: SUCCESSI E DIFFICOLTA'
Rilevare i risultati positivi o le difficoltà incontrate dagli studenti nella comprensione dei vari concetti matematici e le metodologie di superamento

Risultati positivi Gli alunni - hanno acquisito maggior confidenza e dimestichezza con la tecnica di forma - lizzazione. - Hanno compreso la differenza concettuale tra condizione esplicita e condizione im - licita. - Hanno compreso il concetto di incognita aggiuntiva	**Commenti ai risultati** L'attività, che ovviamente è inerente a una situazione problematica, si è mostrata utile nello sviluppare sia le capacità espressive degli alunni sia quelle critiche e intuitive nonché nel consolidare le regole necessarie alla risoluzione di equazioni e sistemi di equazioni.
Difficoltà Alcuni alunni hanno incontrato difficoltà: - in particolari traduzioni in formalizzazione; - nella comprensione della differenza tra .condizione implicita ed esplicita e nella re-lativa modalità d'uso; - nell'intuire la necessità dell'incognita ag - giuntiva e nella individuazione della stessa; - nell'uso delle regole del calcolo algebrico.	**Metodologie di superamento** - Fornendo altri esempi con numerose pro - poste di affermazioni e problemi da for - malizzare algebricamente; - richiamando le regole del calcolo algebri-co.

VALUTAZIONE
Quali prove di verifica sono state somministrate? Riportare e commentare le prove di verifica proposte e i relativi risultati.

Sono stati somministrati due test di verifica.

TEST DI VERIFICA N°1

Individua la formalizzazione algebrica dell'affermazione proposta.

1) La somma tra il doppio di un numero e quattro è il triplo del numero stesso.

☐ $2(x + 4) = 3x$ ☐ $2x + 4 = 3x$ ☐ $2x = 3x + 4$

2) La metà del successivo di un numero naturale è 1,5.

☐ $\frac{1}{2}x + 1 = 1{,}5$ ☐ $\frac{1}{2}(x + 1) = \frac{3}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}(x + 1) = \frac{1}{5}$

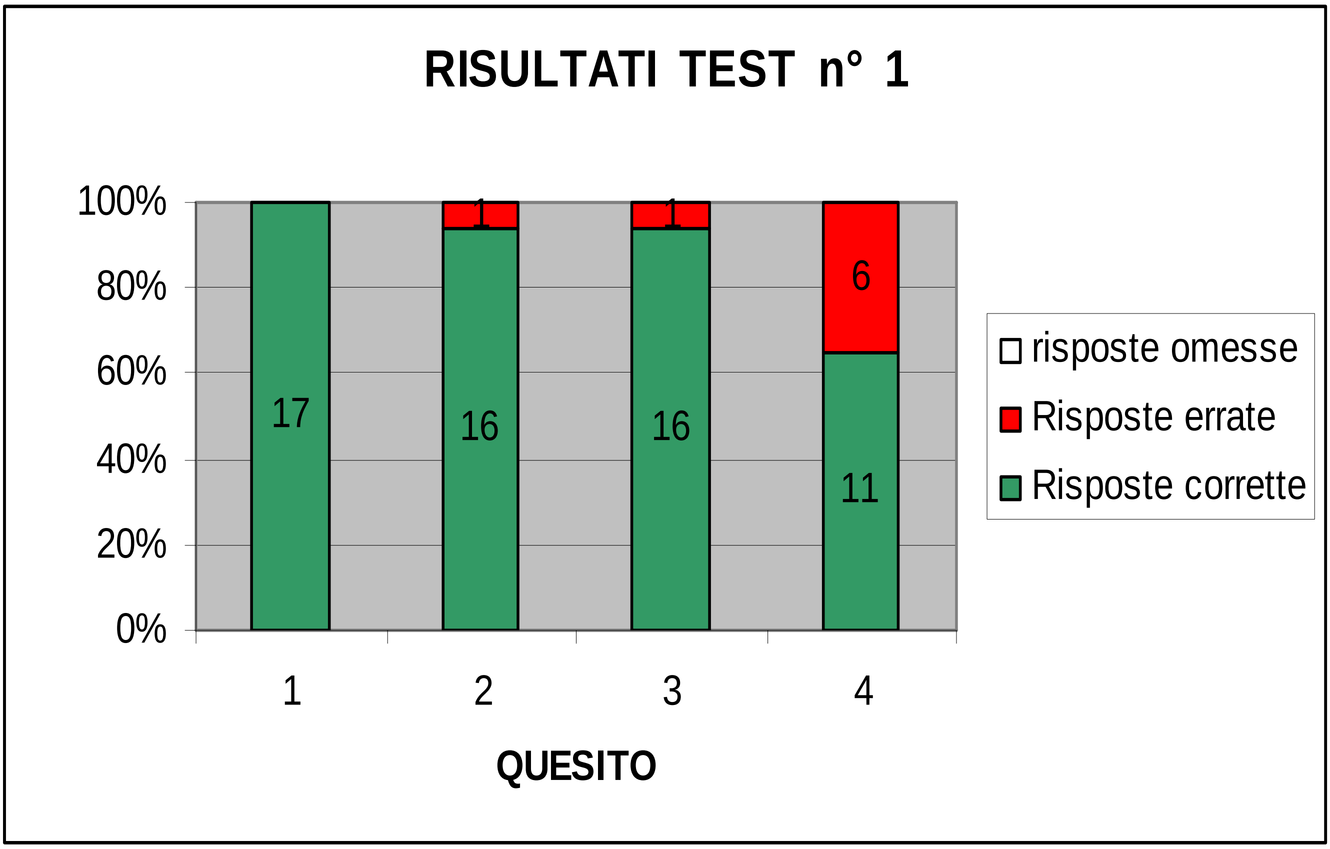
3) Il triplo del primo numero, diminuito del doppio del secondo è uguale a 2, mentre il doppio del primo supera di una unità il secondo.

$\begin{cases} 3y - 2x = 2 \\ 2x + 1 = y \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 1 = y \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x = 1 + y \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 3y - 2x = 2 \\ 2x = 1 + y \end{cases}$ ☐

4) La media aritmetica di due numeri è 6 e la somma del doppio del primo con il triplo del secondo è 12.

$\begin{cases} \frac{x + y}{2} = 6 \\ 2x = 3y + 12 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 6 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 0{,}5(x + y) = 6 \\ 2x = 3y + 12 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} 0{,}5(x + y) = 6 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$ ☐

I risultati sono riportati nel seguente grafico:



Si potrà notare che ai primi tre quesiti hanno risposto quasi tutti gli alunni, mentre al quarto quesito ha risposto correttamente solo il 65% circa di essi.
Trattandosi di un test a scelta multipla è risultato abbastanza semplice perché in realtà non richiedeva direttamente la traduzione algebrica dell' affermazione proposta, ma solo la riflessione necessaria per individuare e verificare la formalizzazione giusta.
Il risultato non certo esaltante del quarto quesito probabilmente è stato dovuto all'ansia di dover quanto prima iniziare il secondo test cui è stato associato un punteggio maggiore rispetto al primo.

TEST DI VERIFICA N° 2

Formalizza algebricamente ogni seguente problema, indicando prima la corrispondente formalizzazione algebrica delle incognite assunte per risolverlo:

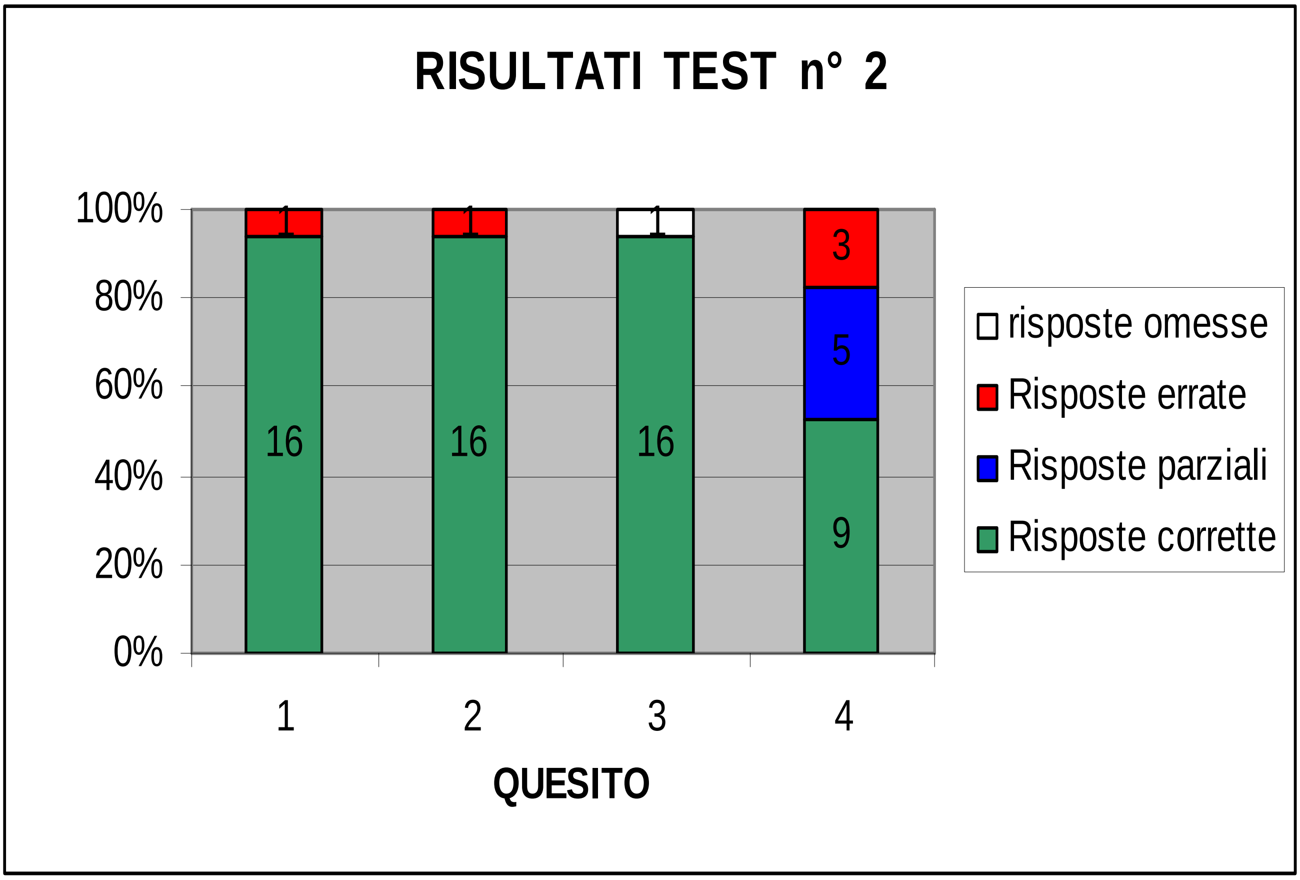
1) In una pizzeria del centro il sabato la pizza margherita costa 1 euro in più rispetto ai giorni infrasettimanali. Con la stessa somma il sabato si possono mangiare 5 pizze mentre nei giorni infrasettimanali se ne possono mangiare 6. Quanto costa la pizza il sabato?

2) A una festa ci sono ragazzi e ragazze per un totale di 36 persone. Stabilisci quanti sono i ragazzi e quante sono le ragazze, sapendo che un terzo delle ragazze porta i pantaloni e che ci   sono alla festa esattamente 26 persone che portano i pantaloni.

3) Dodici anni fa l'età di marco era un terzo dell'età che aveva Anna. Fra tre anni, l'età di Anna sarà il doppio di quella che avrà Marco. Che età hanno oggi Marco e Anna?

4) Un rettangolo ha perimetro di 24 cm. Diminuendo ciascun lato di 1 cm, si ottiene un rettangolo di perimetro 20 cm. Determina la base del rettangolo originario. Per questo problema dire almeno se esso è determinato o indeterminato o impossibile.

I risultati sono riportati nel seguente grafico:



Anche in questo secondo test l'ultimo quesito è risultato essere fatale; ansia di consegnare e quindi di porre fine alla fatica? Può darsi, ma in questo caso piuttosto propendo a credere che un certo numero di alunni, avendo dimenticato o non chiaramente compreso il criterio dei rapporti relativo alla determinatezza o meno di un sistema, si sia lasciato prendere dal panico fino al punto da commettere anche banali errori.
Come si evince dall'esito del secondo quesito, e anche se solo dopo qualche perplessità, la gran parte degli alunni è riuscita comunque a prendere coscienza del fatto che solo i ragazzi, a differenza delle ragazze, portano tutti sempre e comunque i pantaloni.

Giacomo De Laurentis
Febbraio 2009