Calcolare, al variare dell'eventuale parametro reale α, il limite per n→+∞ delle successioni seguenti:

1) $\lim_{n\to+\infty} a_n$ con $a_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^7 - 1}{ln\left(1+\frac{2}{n}\right)cos\left(\frac{2}{n^4}\right)}$ (forma d'indecisione 0/0).

Dalle stime asintotiche notevoli e dalle proprietà della relazione ~ , si ottiene:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^7 - 1 \sim \frac{7}{n}$, $ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$, $cos\left(\frac{2}{n^4}\right) \sim 1$, pertanto risulta

$a_n \sim \frac{\frac{7}{n}}{\frac{2}{n}1}$ da cui $a_n \to 7/2$

2) $\lim_{n\to+\infty} b_n$ con $b_n = \frac{\sqrt{3+\frac{1}{2n}} - \sqrt{3}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right) arctg\, n}$ (forma d'indecisione 0/0) . Risulta

$$b_n = \frac{\sqrt{3+\frac{1}{2n}} - \sqrt{3}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right) arctg\, n} = \frac{\sqrt{3\left(1+\frac{1}{6n}\right)} - \sqrt{3}}{sin\left(\frac{1}{n}\right) arctg\, n} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{6n}} - 1\right)}{sin\left(\frac{1}{n}\right) arctg\, n} = \frac{\sqrt{3}\left[\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right]}{\sin\left(\frac{1}{n}\right) arctg\, n}$$

Dalle stime asintotiche notevoli e dalle proprietà della relazione ~ , si ottiene:

$\left[\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] \sim \frac{1}{12n}$, $sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, $arctg\, n \sim \frac{\pi}{2}$, pertanto risulta

$b_n \sim \frac{\sqrt{3}\frac{1}{12n}}{\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}}$ da cui $b_n \to \frac{\sqrt{3}}{6\pi}$

3) $\lim_{n\to+\infty} c_n$ con $c_n = \frac{\ln\left(1+sin\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\, tg\left(\frac{2}{n^3}\right)}$ (forma d'indecisione 0/0).

Dalle stime asintotiche notevoli risulta: $tg\left(\frac{2}{n^3}\right) \sim \frac{2}{n^3}$, $\ln\left(1+sin\frac{5}{n^2}\right) \sim sin\frac{5}{n^2}$,

$sin\frac{5}{n^2} \sim \frac{5}{n^2}$; ricordando che la relazione ~ è transitiva si ha $\ln\left(1+sin\frac{5}{n^2}\right) \sim \frac{5}{n^2}$ e dalle altre

proprietà della relazione stessa, risulta $c_n \sim \frac{\frac{5}{n^2}}{n^2\frac{2}{n^3}}$, da cui $c_n \to 0^+$

4) $\lim_{n\to+\infty} s_n$ con $s_n = \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}$ (forma d'indecisione 0/0).

Risulta $s_n = \frac{\left(e^{ln2}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{e^{\frac{ln2}{n}} - 1}{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}$, da cui, essendo ln2/n infinitesimo e notando che al

denominatore la parte principale è data dall'infinitesimo d'ordine inferiore cioè $\frac{3}{n}$, si ottiene

$S_n \sim \frac{\frac{\ln 2}{n}}{\frac{3}{n}}$ da cui $S_n \rightarrow \frac{\ln 2}{3}$

5) $\lim_{n\to+\infty} a_n$ con $a_n = \frac{n^{\alpha} arcsin\frac{5}{n^3}}{ln\left(1+\frac{7}{n}\right)}$.

Risulta $arcsin\frac{5}{n^3} \sim \frac{5}{n^3}$, $\ln\left(1+\frac{7}{n}\right) \sim \frac{7}{n}$, quindi, per le proprietà della relazione ~ , si ha

$a_n \sim n^{\alpha}\frac{5}{n^3} : \frac{7}{n} = \frac{5}{7} n^{\alpha-2}$. Ricordando inoltre che $\lim_{n\to+\infty} n^p = \begin{cases} +\infty \; se \; p > 0 \\ 1 \; se \; p = 0 \\ 0 \; se \; p < o \end{cases}$,

si ha che $a_n \rightarrow \begin{cases} +\infty \; se \; \alpha - 2 > 0 \; cioè \; se \; \alpha > 2 \\ \frac{5}{7} \; se \; \alpha - 2 = 0 \; cioè \; se \; \alpha = 2 \\ 0 \; se \; \alpha - 2 < 0 \; cioè \; se \; \alpha < 2 \end{cases}$

6) $\lim_{n\to+\infty} b_n$ con $b_n = \alpha^n \frac{n^{100} + 2^n}{3^n + (\ln n)^{20}}$.

Ricordando che le esponenziali a base maggiore di 1 sono infiniti d'ordine superiore a potenze con esponente positivo, e che queste sono infiniti d'ordine superiore a qualunque potenza a esponente positivo di ln n, si ha che $b_n \sim \alpha^n \frac{2^n}{3^n}$, quindi $b_n \sim \left(\frac{2}{3}\alpha\right)^n$; ricordando inoltre i limiti delle "successioni geometriche" , si ha che : b_n diverge a $+\infty$ se $\frac{2}{3}\alpha > 1$ cioè se $\alpha > \frac{3}{2}$, b_n converge a 1 se $\frac{2}{3}\alpha = 1$ cioè se $\alpha = \frac{3}{2}$, b_n converge a 0 se $-1 < \frac{2}{3}\alpha < 1$ cioè se $-\frac{3}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$, b_n è irregolare se $\frac{2}{3}\alpha \leq -1$ cioè se $\alpha \leq -\frac{3}{2}$.

Francesco Camia