Problema n. 1

Partendo dalla relazione dei complementi:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{Sin(\pi z)}, \quad 0 < z < 1, \tag{1c}$$

e ponendo $z = \frac{1}{2} - x$, (x, reale),

dimostrare che:

$$\int_0^\infty \frac{Sinh(ux)}{Sinh(\frac{u}{2})} du = \pi Tan(\pi x), \qquad |x| < \frac{1}{2}$$

$Tan(\pi x)$ è la tangente di (πx)

<u>Risoluzione</u>

E' nota la seguente relazione dei complementi:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{Sin(\pi z)}, \qquad 0 < z < 1 \tag{1c.1}$$

essendo, $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-z}$, la ben nota funzione di Eulero di seconda specie.

Ponendo, nella (1c.1), $z = \frac{1}{2} - x$, e prendendo il logaritmo naturale di ambo i membri della (1c.1), otteniamo:

$$\ln\Gamma(\frac{1}{2} - x) + \ln\Gamma(\frac{1}{2} + x) = \ln\pi - \ln Cos(\pi x) \tag{1c.2}$$

Derivando, rispetto ad x, i due membri della (1c.2), ricaviamo:

$$\Psi(\frac{1}{2} + x) - \Psi(\frac{1}{2} - x) = \pi Tan(\pi x), \tag{1c.3}$$

essendo $\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, e $Tan(\pi x)$ rappresenta la tangente di (πx).

Ricordando che $\Psi(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1} - 1}{t - 1} dt + \gamma$, essendo γ la costante di Eulero-Mascheroni, dalla (1c.3) ricaviamo:

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1/2} - t^{-x-1/2}}{t-1} dt = (t = e^{-u}) = \int_0^\infty \frac{e^{-u(x-1/2)} - e^{-u(-x-1/2)}}{e^{-u} - 1} e^{-u} du =$$

$$= \int_0^\infty \frac{(e^{ux} - e^{-ux})e^{u/2}}{e^u - 1} du = \int_0^\infty \frac{Sinh(ux)}{Sinh(u/2)} du = \pi Tan(\pi x), \quad |x| < \frac{1}{2} \tag{1c.4}$$