Problema n. 2c

Partendo dalla relazione

$$\int_0^\infty \frac{Sinh(ux)}{Sinh(\frac{u}{2})}du = \pi Tan(\pi x), \qquad |x| < \frac{1}{2},$$

e derivando, (2n-1) volte, rispetto ad x, (n = 1,2,…), si ottiene:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n-1}Cosh(ux)}{Sinh(\frac{u}{2})}du = [\pi Tan(\pi x)]^{(2n-1)} = \pi^{2n}\sum_{h=0}^{n} a_h [Tan(\pi x)]^{2h}, \qquad (2c)$$

Si chiede di fornire:

1) l'espressione che definisce a_0 in funzione di n;
2) l'espressione che definisce la $\sum_{h=0}^{n} a_h$ in funzione di n;
3) l'espressione che definisce il rapporto $[\sum_{h=0}^{n} a_h]/a_0$ in funzione di n;
4) l'espressione che definisce a_n in funzione di n.

Risoluzione

Punto 1

Derivando, (2n-1) volte, rispetto ad x, (n = 1,2,3,…), la relazione:

$\int_0^\infty \frac{Sinh(ux)}{Sinh(u/2)}du = \pi Tan(\pi x)$, ricaviamo:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n-1}Cosh(ux)}{Sinh(u/2)}du = [\pi Tan(\pi x)]^{(2n-1)} = \pi^{2n}\sum_{h=0}^{n} a_h [Tan(\pi x)]^{2h} \qquad (2c.1)$$

Dalla (2c.1) ricaviamo:

$$[\pi Tan(\pi x)]^{(2n-1)} = [\frac{\pi}{i}(1-\frac{2}{e^{2\pi i x}+1})]^{(2n-1)} = \frac{-2\pi}{i}[\sum_{k\geq 0}(-1)^k e^{-2\pi i x(1+k)}]^{(2n-1)} =$$

$=\frac{-2\pi}{i}\sum_{k\geq 0}(-1)^k[-2\pi i(1+k)]^{2n-1}e^{-2\pi i x(1+k)}$, $i=\sqrt{-1}$; sostituendo k a (1+k), abbiamo:

$$[\pi Tan(\pi x)]^{(2n-1)} = 2^{2n}\pi^{2n}(-1)^n\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n-1}e^{-2\pi i x k} \qquad (2c.2)$$

Ponendo, nella (2c.1) e (2c.2), x = 0, troviamo:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n-1}}{Sinh(u/2)}du = \pi^{2n}a_0 = 2^{2n}\pi^{2n}(-1)^n\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n-1} \qquad (2c.3)$$

Osserviamo che:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n-1} = \sum_{k\geq 1}(2k)^{2n-1} - \sum_{k\geq 1}(2k-1)^{2n-1} =$$

$$\sum_{k\geq 1}(2k)^{2n-1} - [\sum_{k\geq 1}(2k-1)^{2n-1} + \sum_{k\geq 1}(2k)^{2n-1} - \sum_{k\geq 1}(2k)^{2n-1}] =$$

$$= \sum_{k\geq 1}(2k)^{2n-1} - \sum_{k\geq 1}k^{2n-1} + \sum_{k\geq 1}(2k)^{2n-1} = (2^{2n}-1)\zeta(1-2n); \qquad (2c.4)$$

ricordando che $\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}$, e $\zeta(-2n) = 0$, troviamo che: $\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n-1} = (2^{2n}-1)(-\frac{B_{2n}}{2n})$ (2c.5)

essendo B_{2n} il numero di Bernoulli di indice 2n, mentre $\zeta(s)$ è la funzione

Zeta di Riemann, definita da: $\zeta(s) = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^s}$, Re(s) > 1.

Sostituendo il risultato della (2c.5) nella (2c.3), otteniamo:

$$\pi^{2n} a_0 = 2^{2n}\pi^{2n}(-1)^{n-1}(2^{2n}-1)\frac{B_{2n}}{2n}$$

Ricordando che $(-1)^{n-1}B_{2n} = |B_{2n}|$, abbiamo:

$$a_0 = 2^{2n}(-1)^{n-1}(2^{2n}-1)\frac{B_{2n}}{2n} = 2^{2n}(2^{2n}-1)\frac{|B_{2n}|}{2n} \tag{2c.6}$$

che rappresenta il termine noto, in funzione di n, del polinomio in $Tan(\pi x)$, di grado 2n.

Osserviamo che, per n intero positivo, a_0 risulta sempre intero positivo; poiché $|B_{2n}|$ è dato dal rapporto di due numeri interi, indicando con p e q detti numeri interi, ($|B_{2n}|$ = p/q), l'espressione (2c.6) indica che a_0 è un multiplo intero del numero intero q e di 2n.

L'espressione di a_0 possiamo ricavarla anche utilizzando la relazione (2c.3), cioè:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n-1}}{Sinh(u/2)}du = \pi^{2n}a_0 = 2\int_0^\infty u^{2n-1}e^{-u/2}\sum_{k\geq 0}e^{-uk}du = 2\sum_{k\geq 0}\frac{(2n-1)!}{(\frac{1}{2}+k)^{2n}} =$$

$$= 2^{2n+1}(2n-1)!\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(1+2k)^{2n}}\text{; ma}$$

$$\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(1+2k)^{2n}} = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(1+2k)^{2n}} + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k)^{2n}} - \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k)^{2n}} = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(k)^{2n}} - \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k)^{2n}} =$$

$$= (1-2^{-2n})\zeta(2n)\,;$$

ricordando che: $$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}|B_{2n}|\,, \tag{2c.7}$$

otteniamo:

$$2^{2n+1}(2n-1)!\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(1+2k)^{2n}} = 2^{2n+1}(2n-1)!(1-2^{-2n})\,\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}|B_{2n}| = \pi^{2n}a_0\text{, da cui:}$$

$$a_0 = 2^{2n}(2^{2n}-1)\frac{|B_{2n}|}{2n}$$

La relazione (2c.6) è stata verificata con un programma di matematica.

Punto 2

Utilizzando le relazioni (2c.1) e (2c.2), e ponendo, x = ¼, troviamo:

$$\pi^{2n}\sum_{h=0}^{n}a_h = 2^{2n}\pi^{2n}(-1)^n\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n-1}e^{-2\pi ik/4} = 2^{2n}\pi^{2n}(-1)^n\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n-1}(-i)^k\text{, cioè:}$$

$$\sum_{h=0}^{n}a_h = 2^{2n}(-1)^n\sum_{k\geq 1}(i)^k k^{2n-1} = 2^{2n}(-1)^n[\sum_{k\geq 1}(-1)^k(2k)^{2n-1} + \sum_{k\geq 1}(i)^{2k-1}(2k-1)^{2n-1}];$$

uguagliando le parti reali, troviamo:

$$\sum_{h=0}^{n} a_h = 2^{2n}(-1)^n \sum_{k\geq 1}(-1)^k (2k)^{2n-1} \quad ;$$

utilizzando la (2c.4), abbiamo:

$$\sum_{h=0}^{n} a_h = 2^{2n}2^{2n-1}(-1)^n(2^{2n}-1)\zeta(1-2n) = 2^{4n-1}(-1)^{n-1}(2^{2n}-1)\frac{B_{2n}}{2n} =$$

$$= 2^{4n-1}(2^{2n}-1)\frac{|B_{2n}|}{2n}, \qquad (2c.8)$$

La relazione (2c.8) è stata verificata con un programma di matematica.

Punto 3

Dividendo il risultato della (2c.8) con quello della (2c.6), otteniamo:

$$(\sum_{h=0}^{n} a_h)/a_0 = 2^{2n-1} \qquad (2c.9)$$

Punto 4

Derivando successivamente, (2n-1) volte, rispetto ad x, la funzione $Tan(x)$, constatiamo facilmente che il coefficiente a_n del termine di grado 2n, del polinomio $\sum_{h=0}^{n} a_h [Tan(x)]^{2h}$, è uguale a (2n-1)!