Problema n. 3c

Partendo dalla relazione:

$$\int_0^\infty \frac{Sinh(ux)}{Sinh(\frac{u}{2})}du = \pi Tan(\pi x), \qquad |x| < \frac{1}{2},$$

e derivando, (2n) volte, rispetto ad x, (n = 1,2,3,…), si ottiene:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n} Sinh(ux)}{Sinh(\frac{u}{2})}du = [\pi Tan(\pi x)]^{(2n)} = \pi^{2n+1}\sum_{h=0}^{n} b_h [Tan(\pi x)]^{2h+1}, \qquad (3c).$$

Si chiede di fornire :

1) l'espressione che definisce b_0 in funzione di n;
2) l'espressione che definisce la $\sum_{h=0}^{n} b_h$ in funzione di n;
3) l'espressione che definisce b_n in funzione di n.

<u>Risoluzione</u>

Punto 1

Derivando, (2n) volte, rispetto ad x, (n = 1,2,3,…), la relazione:

$$\int_0^\infty \frac{Sinh(ux)}{Sinh(u/2)}du = \pi Tan(\pi x), \text{ otteniamo:}$$

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n} Sinh(ux)}{Sinh(u/2)}du = \pi[Tan(\pi x)]^{2n} = \pi^{2n+1}\sum_{h=0}^{n} b_h [Tan(\pi x)]^{2h+1} =$$

$$= \frac{-2\pi}{i}[\sum_{k\geq 0}(-1)^k e^{-2\pi i x(1+k)}]^{(2n)} = \frac{-2\pi}{i}\sum_{k\geq 0}(-1)^k(-2\pi i)^{2n}(1+k)^{2n} e^{-2\pi i x(1+k)} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{2n+1}(-1)^n}{i}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n} e^{-2\pi i x k}, \qquad |x| < \frac{1}{2}, \qquad (3c.1)$$

Ponendo nella precedente (3c.1), x = ¼, abbiamo:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n} Sinh(u/4)}{Sinh(u/2)}du = \pi^{2n+1}\sum_{h=0}^{n} b_h = \frac{(2\pi)^{2n+1}(-1)^n}{i}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2n}(-i)^k \text{ , da cui:}$$

$$\sum_{h=0}^{n} b_h = \frac{2^{2n+1}(-1)^n}{i}\sum_{k\geq 1}(i)^k (k)^{2n} \text{ , ma } \sum_{k\geq 1}(i)^k (k)^{2n} = \sum_{k\geq 1}(-1)^k(2k)^{2n} + \sum_{k\geq 1}(i)^{2k-1}(2k-1)^{2n} ;$$

quindi: $\sum_{h=0}^{n} b_h = \frac{2^{2n+1}(-1)^n}{i}[\sum_{k\geq 1}(-1)^k(2k)^{2n} + \sum_{k\geq 1}(i)^{2k-1}(2k-1)^{2n}]$.

Dalla precedente, uguagliando le parti reali, ricaviamo:

$$\sum_{h=0}^{n} b_h = \frac{2^{2n+1}(-1)^n}{i}\sum_{k\geq 1}(i)^{2k-1}(2k-1)^{2n} = 2^{2n+1}(-1)^{n-1}\sum_{k\geq 1}(-1)^k(2k-1)^{2n} \text{, ma:}$$

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^k(2k-1)^{2n} = \sum_{k\geq 1}(-1)^k(1-2k)^{2n} = \sum_{k\geq 1}(-1)^k\sum_{h\geq 0}\binom{2n}{h}(-2k)^h =$$

$$= \sum_{k\geq 1}(-1)^k + \sum_{h\geq 1}\binom{2n}{h}(-2)^h\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^h ;$$

poiché $$\sum_{k\geq 1}(-1)^k = -\frac{1}{2}\ , \qquad (3c.2)$$
e ricordando che: $\zeta(-2n) = 0$, otteniamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^k(2k-1)^{2n} = -\frac{1}{2} + \sum_{h\geq 1}\binom{2n}{2h-1}(-2)^{2h-1}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2h-1}$$

Ricordando che : $\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2h-1} = (2^{2h}-1)\zeta(1-2h) = (2^{2h}-1)(-\frac{B_{2h}}{2h})$, abbiamo:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^k(2k-1)^{2n} = -\frac{1}{2} - \sum_{h\geq 1}\binom{2n}{2h-1}(-2)^{2h-1}(2^{2h}-1)\frac{B^{2h}}{2h};$$

osserviamo che: $\binom{2n}{2h-1}\frac{1}{2h} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{2h}$; pertanto:

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^k(2k-1)^{2n} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1}\sum_{h\geq 1}\binom{2n+1}{2h}(-2)^{2h-1}(2^{2h}-1)B_{2h}\text{, e quindi,}$$

essendo: $\sum_{h=0}^{n} b_h = 2^{2n+1}(-1)^{n-1}\sum_{k\geq 1}(-1)^k(2k-1)^{2n}$, abbiamo:

$$\sum_{h=0}^{n} b_h = 2^{2n}(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{2n+1}\sum_{h=1}^{n}\binom{2n+1}{2h}2^{2h}(2^{2h}-1)B_{2h} - 1\right] \qquad (3c.3)$$

La relazione (3c.3) è stata verificata con un programma di matematica.

Punto 2

Ponendo, nella (3c.1), $Tan(\pi x) = t$, da cui $\pi x = ArcTan(t)$, abbiamo:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n} Sinh[u\frac{1}{\pi}ArcTan(t)]}{Sinh(u/2)}du = \pi^{2n+1}\sum_{h=0}^{n} b_h [t]^{2h+1} \qquad (3c.4)$$

Derivando la precedente, rispetto a (t), e ponendo dopo, t = 0, troviamo:

$$\lim_{t\to 0} D_t \int_0^\infty \frac{u^{2n} Sinh[u\frac{1}{\pi}ArcTan(t)]}{Sinh(u/2)}du = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{u^{2n+1}}{Sinh(u/2)}du = \pi^{2n+1}b_0\text{, da cui:}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty u^{2n+1}e^{-u/2}\sum_{k\geq 0}e^{-uk}du = \frac{2}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{(2n+1)!}{(\frac{1}{2}+k)^{2n+2}} = \frac{2^{2n+3}(2n+1)!}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(1+2k)^{2n+2}};$$

ricordando che: $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(1+2k)^{2n+2}} = [1-2^{-(2n+2)}]\zeta(2n+2)$, otteniamo:

$$\pi^{2n+1}b_0 = \frac{2^{2n+3}(2n+1)!}{\pi}[1-2^{-(2n+2)}]\zeta(2n+2) = \frac{2(2n+1)!}{\pi}(2^{2n+2}-1)\zeta(2n+2);$$

ma: $\zeta(2n+2) = \frac{2^{2n+1}\pi^{2n+2}}{(2n+2)!}|B_{2n+2}|$, e quindi:

$$b_0 = \frac{1}{n+1}(2^{2n+2}-1)2^{2n+1}|B_{2n+2}| \qquad (3c.5)$$

La relazione (3c.5) è stata verificata con un programma di matematica.

Punto 3

Derivando successivamente, (2n) volte, rispetto ad x, la funzione $Tan(x)$, constatiamo facilmente che il coefficiente b_n del termine di grado 2n+1, del polinomio $\sum_{h=0}^{n} b_h [Tan(x)]^{2h+1}$, è uguale a (2n)!