Problema n.4c

Partendo dalla relazione

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n} Sinh(ux)}{Sinh(\frac{u}{2})} du = [\pi Tan(\pi x)]^{(2n)}, \qquad |x| < \frac{1}{2},$$

e ponendo, x = 0, dimostrare che:

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{h=1}^{n}\binom{2n+1}{2h}(2^{2h}-1)B_{2h} = 1, \tag{4c}$$

dove B_{2h} rappresenta il numero di Bernoulli di indice 2h, (n = 1,2,3…).

<u>Risoluzione</u>

Utilizzando la relazione

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n} Sinh(ux)}{Sinh(u/2)} du = \pi[Tan(\pi x)]^{2n} = \frac{-2\pi}{i}\sum_{k\geq 0}(-1)^k(-2\pi i)^{2n}(1+k)^{2n} e^{-2\pi i x(1+k)},$$

e ponendo, x = 0, otteniamo:

$\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+k)^{2n} = 0$, da cui:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+k)^{2n} = 1+\sum_{k\geq 1}(-1)^k\sum_{h\geq o}\binom{2n}{h}k^h = 1+\sum_{k\geq 1}(-1)^k+\sum_{h\geq 1}\binom{2n}{h}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^h;$$

ricordiamo che: $\sum_{k\geq 1}(-1)^k = -\frac{1}{2}$, e $\zeta(-2h) = 0$, (h = 1,2,3,…); pertanto:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+k)^{2n} = \frac{1}{2}+\sum_{h\geq 1}\binom{2n}{2h-1}\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2h-1};$$

ricordiamo che: $\sum_{k\geq 1}(-1)^k k^{2h-1} = (2^{2h}-1)\zeta(1-2h) = (2^{2h}-1)(-\frac{B_{2h}}{2h})$, e quindi:

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1+k)^{2n} = \frac{1}{2}+\sum_{h\geq 1}\binom{2n}{2h-1}(2^{2h}-1)(-\frac{B_{2h}}{2h});$$

ricordando che: $\binom{2n}{2h-1}\frac{1}{2h} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{2h}$, troviamo:

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+1}\sum_{h\geq 1}\binom{2n}{2h}(2^{2h}-1)B_{2h} = 0$, da cui:

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{h=1}^{n}\binom{2n}{2h}(2^{2h}-1)B_{2h} = 1 \tag{4c.1}$$

La formula (4c.1) è stata verificata con un programma di matematica.