Problema n. 6c

Partendo dalla relazione:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n-1}Cosh(ux)}{Sinh(\frac{u}{2})}du = [\pi Tan(\pi x)]^{(2n-1)}, \qquad |x| < \frac{1}{2},$$

e ponendo, x = ¼, dimostrare che:

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}|B_{2n}|$$

dove B_{2n} rappresenta il numero di Bernoulli di indice 2n, (n = 1,2,3,…), mentre $\zeta(2n)$ rappresenta la funzione Zeta di Riemann.

<u>Risoluzione</u>

Utilizzando la relazione

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n-1}Cosh(ux)}{Sinh(u/2)}du = 2^{2n}\pi^{2n}(-1)^n\sum_{k\ge1}(-1)^k k^{2n-1}e^{-2\pi ixk},$$

e ponendo, x = ¼, troviamo:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2n-1}Cosh(u/4)}{Sinh(u/2)}du = \int_0^\infty \frac{u^{2n-1}}{2Sinh(u/4)}du = \sum_{k\ge0}\int_0^\infty u^{2n-1}e^{-u/4}e^{-uk/2}du =$$

$$= \sum_{k\ge0}\frac{(2n-1)!}{(\frac{1}{4}+\frac{k}{2})^{2n}} = 4^{2n}(2n-1)!\sum_{k\ge0}\frac{1}{(1+2k)^{2n}} = 2^{2n}\pi^{2n}(-1)^n\sum_{k\ge1}(-1)^k k^{2n-1}(-i)^k;$$

ricordando che $\sum_{k\ge0}\frac{1}{(1+2k)^{2n}} = (1-2^{-2n})\zeta(2n)$, (n = 1,2,3,…), abbiamo:

$$4^{2n}(2n-1)!\sum_{k\ge0}\frac{1}{(1+2k)^{2n}} = 2^{2n}(2^{2n}-1)(2n-1)!\zeta(2n) = 2^{2n}\pi^{2n}(-1)^n\sum_{k\ge1}k^{2n-1}(i)^k;$$

ricordando che la parte reale della sommatoria $\sum_{k\ge1}k^{2n-1}(i)^k$ è data da $\sum_{k\ge1}(2k)^{2n-1}(-1)^k$,

e poiché $\sum_{k\ge1}(2k)^{2n-1}(-1)^k = 2^{2n-1}\sum_{k\ge1}k^{2n-1}(-1)^k = 2^{2n-1}(2^{2n}-1)\zeta(1-2n) =$

$= 2^{2n-1}(2^{2n}-1)(-\frac{B_{2n}}{2n})$, abbiamo:

$$2^{2n}(2^{2n}-1)(2n-1)!\zeta(2n) = 2^{2n}\pi^{2n}(-1)^n 2^{2n-1}(2^{2n}-1)(-\frac{B_{2n}}{2n}), \text{ da cui :}$$

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}(-1)^{n-1}B_{2n} = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}|B_{2n}| \qquad (6c.1)$$

Ricordiamo che nel procedimento abbiamo utilizzato le formule:

$$\sum_{k\ge0}\frac{1}{(1+2k)^{2n}} = (1-2^{-2n})\zeta(2n), \quad \zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n} \quad , \quad (-1)^{n-1}B_{2n} = |B_{2n}|$$