Calcolo di limiti utilizzando la regola di De L'Hopital e i limiti notevoli

Primo limite

Studiare il limite $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{-x}+e^{-2x}\right)$

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata ∞-∞. Per il suo studiosi può procedere come di seguito indicato:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{-x}+e^{-2x}\right)=\lim_{x\to-\infty}e^{-2x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^{-x}}+1\right)=+\infty\cdot\left[\left(H.\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\right)+1\right]=+\infty\cdot\left[\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}\right)+1\right]=$$

$$+\infty\cdot(0+1)=+\infty$$

* * * * * * * *

Secondo limite

Studiare il limite

$\lim\limits_{x\to0}x\cdot\log_3(1-\cos x)$

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0·∞; possiamo ricondurlo alla forma ∞/∞ ed applicare la regola di De l'Hopital.

Prima di passare al calcolo del limite facciamo notare che il punto x=0 è di accumulazione a destra e a sinistra per il dominio della funzione. Ciò premesso si ha:

$$\lim_{x\to0}x\cdot\log_3(1-\cos x)=\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1-\cos x)}{x^{-1}}\overset{H.}{=}\lim_{x\to0}\frac{1}{\log 3}\cdot\frac{\frac{senx}{1-\cos x}}{-x^{-2}}=-\frac{1}{\log 3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{senx}{\frac{1-\cos x}{x^2}}$$

A questo punto basta ricordare il limite notevole

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ per concludere che $-\dfrac{1}{\log 3}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{senx}{\frac{1-\cos x}{x^2}}=-\dfrac{1}{\log 3}\cdot\dfrac{0}{\frac{1}{2}}=0$