Dieci esercizi sulla determinazione del dominio (insieme di esistenza) di una funzione
di Andrea Simoncelli

1 $f(x) = \dfrac{3+x}{5x-3}$

Il denominatore deve essere diverso da zero, quindi:

$5x - 3 \neq 0$

$5x \neq 3$

$x \neq \dfrac{3}{5}$

$D = \left\{ x \in R \mid x \neq \dfrac{3}{5} \right\}$

2 $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x+4}}$

Poiché l'indice è pari, l'operazione di estrazione di radice è possibile, nei reali, solo quando il radicando è positivo o nullo. Quest'ultima condizione, in questo caso è da escludere, perché la radice compare al denominatore, che deve essere diverso da zero, quindi:

$x + 4 > 0$

$x > -4$

$D = \{ x \in R \mid x > -4 \}$

3 $f(x) = \sqrt{x+8}$

Poiché l'indice è pari, l'operazione di estrazione di radice è possibile, nei reali, solo quando il radicando è positivo o nullo, quindi:

$x + 8 \geq 0$

$x \geq -8$

$D = \{ x \in R \mid x \geq -8 \}$

4 $f(x) = 8x^3 - 4x + 5$

Non ci sono condizioni, infatti, le operazioni che bisogna eseguire sulla x per ottenere f(x) sono sempre possibili, qualunque sia il valore che ad essa si attribuisce. In definitiva il dominio è l'insieme di tutti i numeri reali: $D = R$

5 $f(x) = \dfrac{x^2 + 10}{x^2 - 16}$

Il denominatore deve essere diverso da zero, quindi:

$x^2 - 16 \neq 0$

$x \neq \pm 4$

$D = \{ x \in R \mid x \neq \pm 4 \}$

6 $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x}}{\sqrt{1-x}}$

Bisogna mettere a sistema le due condizioni, ovvero:

$$\begin{cases} 3x \geq 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 1 \end{cases}$$

Quindi

$D = \{x \in R \mid 0 \leq x < 1\}$

7 $f(x) = \sqrt{\log(2x + 4 - x^2)}$

Il valore della funzione esiste solo quando alla x si sostituiscono i valori che soddisfano:

$\log(2x + 4 - x^2) \geq 0$

Affinché il logaritmo in base 10 sia positivo, è necessario che il suo argomento si maggiore di 1

$2x + 4 - x^2 \geq 1$

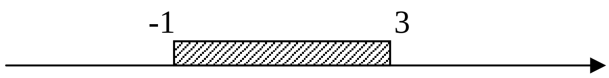
$x^2 - 2x - 3 \leq 0$

Risolviamo l'equazione associata:

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

Questa disequazione di secondo grado, con $\Delta > 0$, è soddisfatta all'interno dell'intervallo di estremi –1 e 3.



$D = \{x \in R \mid -1 \leq x \leq 3\}$

8 $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 3}$

Poiché l'indice è dispari, l'operazione di estrazione di radice è possibile per ogni x reale, quindi

$D = R$

9 $f(x) = \sqrt[3]{\frac{2x}{x-5}}$

Poiché l'indice è dispari, l'operazione di estrazione di radice è possibile per ogni x reale, tranne per x = 5 perché renderebbe nullo il denominatore, quindi

$x - 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$

$D = \{x \in R \mid x \neq 5\}$

10 $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{4}{\sqrt{x+2}}$

Bisogna mettere a sistema le due condizioni, ovvero:

$$\begin{cases} -x \geq 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x > -2 \end{cases}$$

In definitiva, $D = \{x \in R \mid -2 < x \leq 0\}$