Trasformata di Fourier

da **Allee** Inviato: **21/08/2017, 19:19**

Salve, vi scrivo per un aiuto sul seguente esercizio

Sia G il prolungamento a zero della funzione

$$x \in \left] -\pi, \pi \right] \to x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)$$

Si calcoli il valore dell'integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega \widehat{G}(\omega) \cos(\pi\omega) d\omega$$

Mi sono da poco approcciato all'argomento e non ho ben capito come applicare operativamente la trasformata di Fourier al calcolo di un integrale improprio. Penso che nel caso descritto si debba applicare la proprietà della trasformata di Fourier di una derivata, ma come si utilizza operativamente? Vi ringrazio anticipatamente per le eventuali risposte

da **Sergeant Elias** Inviato: **24/08/2017, 18:31**

Utilizzando le seguenti notazioni:

$$\left[\widehat{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} g(x) dx\right] \wedge \left[g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \widehat{G}(\omega) d\omega\right]$$

e considerando che $\left[g(x) = x - \frac{1}{\pi^2}x^3\right]$, la trasformata di Fourier della funzione $\left[g'(x) = 1 - \frac{3}{\pi^2}x^2\right]$ è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} g'(x) dx = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\omega x} g'(x) dx = \left[e^{i\omega x} g(x)\right]_{-\pi}^{\pi} - i\omega \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\omega x} g(x) dx$$

$$= e^{i\omega\pi} g(\pi) - e^{-i\omega\pi} g(-\pi) - i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} g(x) dx = -i\omega \widehat{G}(\omega)$$

Inoltre, poiché:

A volte scriveremo anche (naturalmente qui T ed A sono gli operatori di "Trasformata" ed "Antitrasformata")

$$\widehat{f} = T[f]\,; \quad \widetilde{f} = A[\widehat{f}]\,.$$

Si dimostra che per $f \in L^1[R]$, ma non necessariamente continua, si ha $\widetilde{f} = f$ quasi ovunque (cioè a meno di un insieme di misura nulla); per questa ragione la $\widetilde{f}$ è anche detta *rappresentazione integrale di Fourier* per la f.

Inoltre, in tutti i punti $x \in R$ in cui f è continua, si ha

$$\widetilde{f}(x) = f(x)\,.$$

Nei punti di discontinuità x_0, indichiamo i limiti destro e sinistro con

$$f^{\pm}(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0^{\pm}} f(x_0 + \varepsilon)$$

avremo allora

$$\widetilde{f}(x_0) = \frac{f^+(x_0) + f^-(x_0)}{2}$$

vale la seguente formula di inversione:

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} -i\omega e^{-i\omega x}\widehat{G}(\omega)d\omega = \frac{g'_+(x) + g'_-(x)}{2}\right] \to$$

$$\to \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \omega e^{-i\omega x}\widehat{G}(\omega)d\omega = \pi i[g'_+(x) + g'_-(x)]\right] \to$$

$$\to \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \omega e^{-i\omega \pi}\widehat{G}(\omega)d\omega = \pi i[g'_+(\pi) + g'_-(\pi)]\right] \to$$

$$\to \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \omega\widehat{G}(\omega)\cos(\pi\omega)d\omega - i\int_{-\infty}^{+\infty} \omega\widehat{G}(\omega)\sin(\pi\omega)d\omega = -2\pi i\right]$$

Infine, poichè $\left[g(x) = x - \frac{1}{\pi^2}x^3\right]$ è una funzione dispari:

$$\widehat{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega x)g(x)dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega x)g(x)dx$$

è immaginario puro. In definitiva:

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \omega\widehat{G}(\omega)\cos(\pi\omega)d\omega = -2\pi i\right]$$

P.S.
L'immagine allegata è tratta da una risorsa del corso di Fisica Matematica 2, a.a. 2013-2014, Dipartimento di Matematica, Università di Milano. Insomma, mi sono fidato.

Re: Trasformata di Fourier

da **Allee** Inviato: **27/08/2017, 13:54**

Innanzitutto ti ringrazio infinitamente per la risposta. Inoltre vorrei chiederti come mai si studia la trasformata di Fourier di G e perchè è importante nella determinazione del risultato che essa dia come risultato un immaginario puro, cioè perchè questo risultato porti ad annullare il termine
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega\widehat{G}(\omega)\sin(\pi\omega)d\omega$$

da **Sergeant Elias** Inviato: **01/09/2017, 20:39**

> ***Allee ha scritto:***
> ... come mai si studia la trasformata di Fourier di G ...

Se ti stai riferendo alla seguente scrittura:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x}\widehat{G}(\omega)d\omega$$

io parlerei, piuttosto, di antitrasformata di Fourier di G.

> ***Allee ha scritto:***
> ... perchè è importante nella determinazione del risultato che essa dia come risultato un immaginario puro ...

Solo se $\widehat{G}(\omega)$, la trasformata di fourier di $g(x)$, è immaginario puro:

$$\widehat{G}(\omega) = i\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega x)g(x)dx$$

nel primo membro della seguente equazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega\widehat{G}(\omega)\cos(\pi\omega)d\omega - i\int_{-\infty}^{+\infty} \omega\widehat{G}(\omega)\sin(\pi\omega)d\omega = -2\pi i$$

il primo addendo è immaginario puro e il secondo è reale, vista la presenza di i davanti all'integrale. Quindi:

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \omega\widehat{G}(\omega)\cos(\pi\omega)d\omega = \ -2\pi i\right] \wedge \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \omega\widehat{G}(\omega)\sin(\pi\omega)d\omega = 0\right]$$