

SCUOLA NORMALE SUPERIORE  
AMMISSIONE AL I ANNO DEL CORSO ORDINARIO

PROVA DI MATEMATICA PER MATEMATICA, FISICA, INFORMATICA  
30 AGOSTO 2017

**Esercizio 1.** Sia  $(a_n)$ , per  $n = 0, 1, 2, \dots$ , una successione infinita di numeri reali non tutti nulli e tali che  $a_{n+2} = \frac{6}{5}a_{n+1} - a_n$  per ogni  $n \geq 0$ .

- 1) Dimostrare che esiste un unico numero reale  $\theta$  con  $0 \leq \theta < 2\pi$  tale che  $\cos \theta = \frac{3}{5}$ ,  $\sin \theta = \frac{4}{5}$ .
- 2) Dimostrare che esistono unici  $r > 0$  e  $\alpha$  con  $0 \leq \alpha < 2\pi$  tali che per ogni  $n \geq 0$  si ha  $a_n = r \cos(\alpha + n\theta)$ .
- 3) Dalla parte (2) vediamo che la successione  $a_n$  è limitata. Fare vedere che nonostante ciò la successione  $a_n$  non è periodica, anzi, non può assumere uno stesso valore più di due volte.
- 4) Dimostrare che la successione  $a_n$  assume infiniti valori positivi e infiniti valori negativi.

**Esercizio 2.** Siano  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  numeri reali. Denotiamo con  $S$  l'insieme dei punti  $(x, y, z)$  dello spazio euclideo tali che  $z \leq \min(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ . Supponiamo poi che per certi numeri reali  $r, s$  accada che per ogni  $(x, y, z)$  in  $S$  si abbia  $z \leq rx + sy$ .

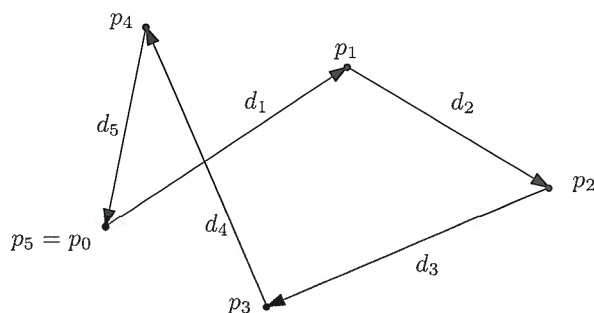
Dimostrare che in tal caso esiste un numero reale  $t$ , con  $0 \leq t \leq 1$  tale che  $r = t\alpha + (1-t)\gamma$  e  $s = t\beta + (1-t)\delta$ .

*Note:* nella soluzione potete assumere  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ,  $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$ , e che le rette date dalle equazioni  $\alpha x + \beta y = 0$  e  $\gamma x + \delta y = 0$  siano distinte.

**Esercizio 3.** Siano  $d_1, \dots, d_n$  numeri reali positivi, con  $n \geq 2$ . Si trovi una condizione necessaria e sufficiente sui  $d_i$  perché esista una successione  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n$  di punti del piano euclideo tali che

- 1) per ogni  $i = 1, \dots, n$ , la distanza tra  $p_i$  e  $p_{i-1}$  è  $d_i$ , e
- 2)  $p_n = p_0$ .

Ecco una successione di questo tipo con  $n = 5$ :



(Continua sul retro)