

QUESTIONARIO 3

Q.1 Quella che segue è la celebre *formula di Eulero* (Leonhard Euler, 1707 – 1783) :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R} ,$$

fondamentale nella trattazione dei numeri complessi, dove le costanti e ed i rappresentano rispettivamente la base dei logaritmi naturali e l'unità immaginaria, definita dal fatto che: $i^2 = -1$.

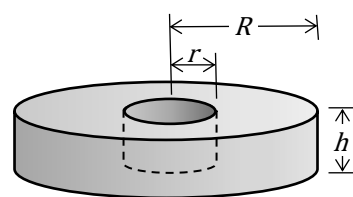
Per dimostrarla, si evidenzi il fatto che la funzione: $f(x) = \frac{\cos x + i \sin x}{e^{ix}}$, con $x \in \mathbb{R}$, è uguale ad una costante, di cui si chiede il valore.

Q.2 Risolvere la seguente equazione: $\binom{x}{3} + \binom{x}{2} = \frac{7}{2} \cdot \binom{x-1}{3}$.

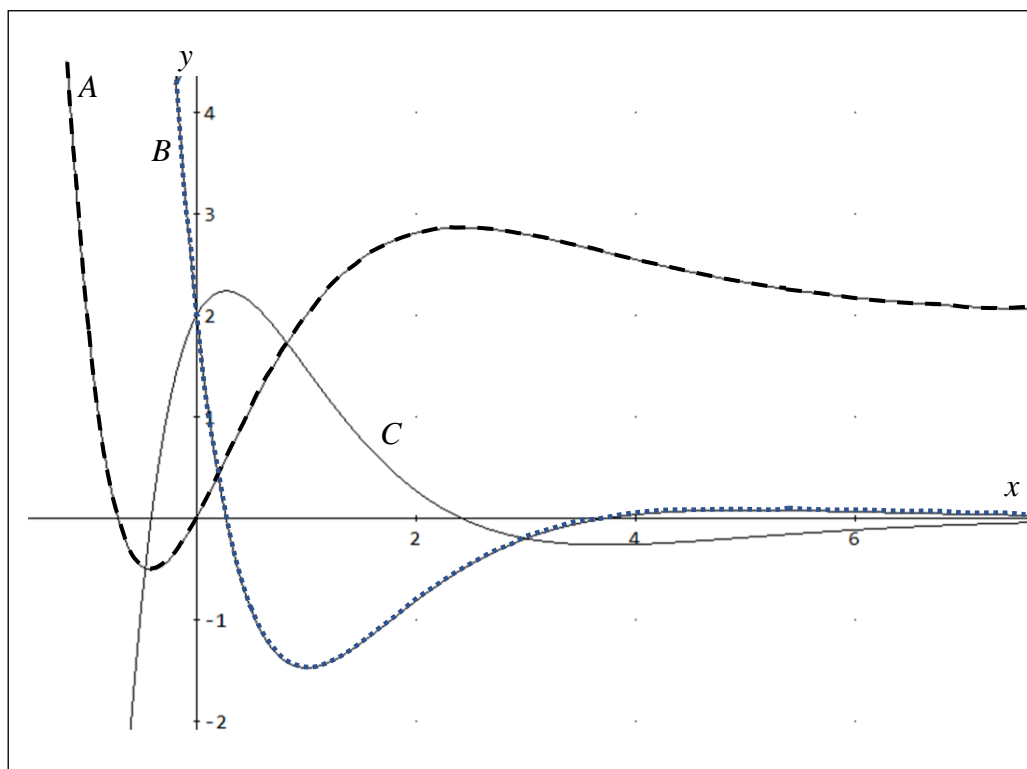
Q.3 Nel centro di un disco in ferro, di raggio R e di spessore $h = \frac{1}{4}R$, viene praticato un foro circolare passante, di raggio r ; per motivi di solidità, il raggio del foro dev'essere compreso tra $\frac{1}{10}R$ e $\frac{1}{2}R$.

L'intera superficie del solido che si ottiene (compresa quella della parte interna del foro cilindrico) viene rivestita con una patina di cromo, ed il procedimento ha un costo direttamente proporzionale all'estensione della superficie da trattare.

Per quali valori del raggio r del foro si avranno rispettivamente la spesa minima e quella massima per il processo di cromatura?



Q.4 Le tre curve A , B e C qui di seguito rappresentate sono (non nell'ordine) i grafici di una funzione $f(x)$, della sua derivata $f'(x)$ e di una sua primitiva $F(x)$. Stabilire le corrette associazioni tra curva e funzione motivando esaurientemente la scelta.



Q.5 Un punto materiale si muove su una retta orientata, e la sua ascissa $s(t)$ segue, per tempi $t \geq 0$, la legge oraria:

$$s(t) = At^3 - Bt^2 + C \quad ,$$

dove A , B e C sono coefficienti positivi opportunamente dimensionati.
Qual è la minima velocità del punto ?

Q.6 Dimostrare che il seguente limite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^k}$ è finito e non nullo solo se $k = 4$, ed in tal caso si calcoli il limite suddetto.

Q.7 Tra tutte le piramidi rette a base quadrata di dato apotema determinare quella di massimo volume.

Q.8 Quali ipotesi del teorema di Rolle non sono soddisfatte dalla funzione $f(x) = 2\sqrt{1 + |x|} + x$ nell'intervallo $[-1, +1]$?

Il teorema suddetto non ammette inverso, quindi può avvenire quanto descritto nella tesi senza che siano soddisfatte le ipotesi. In questo caso la conclusione prevista da Rolle si verifica?

Q.9 Scegliendo il metodo che si ritiene più opportuno, si discuta il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$\sin x + \cos x + k = 0$$

che al variare del parametro reale k risultano comprese nell'intervallo $\left[0, \frac{3}{4}\pi\right]$.

Q.10 In uno spazio cartesiano $Oxyz$ sono assegnate le due rette $a: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$, $b: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ ed

il piano $\delta: x + 10y + 9z - 10 = 0$.

Dopo aver verificato che le due rette hanno in comune il punto $C(1,1,3)$, si determinino i punti A e B in cui rispettivamente a e b intersecano il piano δ , e si calcoli il perimetro del triangolo ABC .
