## 3.2.1) **CONVERGENZA GLOBALE DEL METODO DI NEWTON**

*Teorema*
Sia $f \in C^2[a,b]$ ed $\exists! \xi \in [a,b]\ t.c.\ f(\xi) = 0$ con $f'(x), f''(x) \neq 0\ \forall x \in [a,b]$, detto $x_0 \in [a,b]$ stima iniziale di $\xi$ allora se $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ la successione $\{x_k\}$ generata dal metodo di Newton è monotona, limitata e convergente

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \xi$$

*Dimostrazione*
Notare che nella condizione $f''(x) \neq 0\ \forall x \in [a,b]$ stiamo chiedendo che la funzione sia strettamente concava o strettamente convessa, cioè imponiamo che la funzione non cambi di concavità, mentre la condizione $f'(x) \neq 0$ serve per poter applicare Newton.
Focalizziamoci sul caso in cui la funzione $f$ assuma rispettivamente i valori $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ agli estremi di $[a,b]$ e che $f''(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$. Posto $x_0 = b$, la condizione $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ è verificata in quanto $f(x_0) = f(b) > 0$ e $f''(x_0) > 0$ poiché per ipotesi $x_0 \in [a,b]$ (l'estremo che soddisfa questa condizione è chiamato anche *estremo di Fourier*). Di conseguenza, dato che $\xi$ è unico in $[a,b]$ possiamo affermare per continuità che nell'intervallo $(\xi, x_0]$ $f'(x) > 0$ e $f(x) > 0$.
Essendo la successione di Newton definita come

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Posso affermare che $\{x_k\}$ è monotona decrescente in quanto $x_{k+1} < x_k$ poiché il fattore $-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} < 0\ \forall x \in (\xi, x_0]$ essendo $f'(x) > 0$ e $f(x) > 0$ nel suddetto intervallo.
Inoltre $\xi < x_k\ \forall k$, questa è una condizione geometrica, le rette tangenti stanno sempre sotto la curva del grafico, conseguentemente ci si trova sempre a destra del limite.

$$\xi < \cdots < x_k < \cdots < x_1 < x_0$$

Abbiamo provato che la successione è anche limitata inferiormente, a questo punto è banale dimostrare la convergenza poiché, per un noto teorema, una successione monotona ammette sempre limite, inoltre essendo anche limitata inferiormente questo limite deve essere $\xi$. ■

Si noti che la dimostrazione appena data è solo una traccia, tutti gli altri casi si provano analogamente. Il fatto che nel caso in questione $f$ sia convessa ($f''(x) > 0$), $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, ed esista unico lo zero nell'intervallo $[a,b]$ implica che la funzione è ovviamente crescente. La condizione $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ serve a capire se siamo nella parte di intervallo corretta per garantire la monotonia della successione (in questo caso la decrescenza), sostanzialmente se la funzione è convessa dobbiamo partire da punti $x_0$ positivi, se è concava da punti $x_0$ negativi.

3.2.2) **CONVERGENZA LOCALE METONDO DI NEWTON**

*Teorema*

Sia $f \in \mathcal{C}^2(I_\delta)$, con $I_\delta = [\xi - \delta, \xi + \delta], \delta > 0$ intorno arbitrariamente piccolo di $\xi$, $f(\xi) = 0$, $f'(\xi), f''(\xi) \neq 0$. Se

$$\exists C > 0 \; t.c. \frac{|f''(x)|}{|f'(y)|} \leq C, \;\; \forall x, y \in I_\delta$$

allora preso $x_0$ sufficientemente vicino ad $\xi$ ($x_0 \in I_\delta$), la successione di Newton $\{x_k\}$ converge ad $\xi$.

*Dimostrazione*

Approssimando la funzione $f$ con la serie di Taylor centrandola nel punto $x_k \in I_\delta$ otteniamo

$$f(x) \approx f(x_k) + (x - x_k) f'(x_k) + \frac{(x - x_k)^2}{2} f''(\mu_k), \qquad con\ \mu_k \in [\xi, x_k] \subset I_\delta$$

Se ora poniamo $f(\xi) = 0$

$$0 = f(\xi) \approx f(x_k) + (\xi - x_k) f'(x_k) + \frac{(\xi - x_k)^2}{2} f''(\mu_k)$$

Dividendo tutto per $f'(x_k)$ nella relazione precedente otteniamo la seguente espressione

$$0 \approx \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - x_k + \xi + \frac{(\xi - x_k)^2}{2} \frac{f''(\mu_k)}{f'(x_k)} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \approx (\xi - x_{k+1}) + \frac{(\xi - x_k)^2}{2} \frac{f''(\mu_k)}{f'(x_k)}$$

Nell'ultimo passaggio è stata sfruttata proprio la definizione della successione di Newton infatti

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - x_k = -x_{k+1}$$

Passando ai moduli e ponendo $e_k \coloneqq |\xi - x_k|$, la relazione precedente si modifica come

$$|\xi - x_{k+1}| \approx \frac{|\xi - x_k|^2}{2} \frac{|f''(\mu_k)|}{|f'(x_k)|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e_{k+1}}{e_k^2} \approx \frac{1}{2} \frac{|f''(\mu_k)|}{|f'(x_k)|}$$

Essendo per ipotesi $f \in \mathcal{C}^2(I_\delta)$ possiamo applicare il teorema di Weierstrass nell'intervallo $I_\delta$, perciò esistono finiti $\max_{x \in I_\delta} |f''(x)|$ e $\min_{y \in I_\delta} |f'(y)|$, definiamo nel suddetto intervallo la costante

$$C \coloneqq \frac{1}{2} \frac{\max_{x \in I_\delta} |f''(x)|}{\min_{y \in I_\delta} |f'(y)|} \quad \Rightarrow \quad \frac{e_{k+1}}{e_k^2} \approx \frac{1}{2} \frac{|f''(\mu_k)|}{|f'(x_k)|} \leq C \quad \Leftrightarrow \quad e_{k+1} \leq C e_k^2$$

Allora

$$e_1 \leq C e_0^2 \Leftrightarrow e_1^2 \leq C^2 e_0^4 \Leftrightarrow C e_1^2 \leq C^3 e_0^4 \Leftrightarrow C^2 e_1^4 \leq C^6 e_0^8 \Leftrightarrow C^3 e_1^4 \leq C^7 e_0^8 \Leftrightarrow C^6 e_1^8 \leq C^{14} e_0^{16} \Leftrightarrow C^7 e_1^8 \leq C^{15} e_0^{16}$$

$$e_2 \leq C e_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad e_2^2 \leq C^2 e_1^4 \quad \Leftrightarrow \quad C e_2^2 \leq C^3 e_1^4 \quad \Leftrightarrow \quad C^2 e_2^4 \leq C^6 e_1^8 \quad \Leftrightarrow \quad C^3 e_2^4 \leq C^7 e_1^8$$

$$e_3 \leq C e_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad e_3^2 \leq C^2 e_2^4 \quad \Leftrightarrow \quad C e_3^2 \leq C^3 e_2^4$$

$$e_4 \leq C e_3^2$$

Perciò

$$e_4 \leq C e_3^2 \leq C^3 e_2^4 \leq C^7 e_1^8 \leq C^{15} e_0^{16} \quad \Leftrightarrow \quad e_4 \leq \frac{1}{C} (C e_3)^2 \leq \frac{1}{C} (C e_2)^{2^2} \leq \frac{1}{C} (C e_1)^{2^3} \leq \frac{1}{C} (C e_0)^{2^4}$$

Quindi induttivamente si ottiene la disuguaglianza

$$e_k \leq \frac{1}{C} (C e_0)^{2^k}$$

Passando ora ai limiti

$$0 \leq \lim_{k \to \infty} e_k \leq \lim_{k \to \infty} \frac{1}{C} (C e_0)^{2^k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C e_0 < 1$$

Essendo $e_0 = |x_0 - \xi|$, la successione $\{e_k\}$ converge a zero per confronto solo se $x_0$ sufficientemente vicino ad $\xi$ di modo che

$$Ce_0 = \frac{1}{2}\frac{\max_{x\in I_\delta}|f''(x)|}{\min_{y\in I_\delta}|f'(y)|}e_0 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad e_0 < \frac{1}{C}$$

In questo modo la convergenza del metodo è garantita

$$\lim_{k\to\infty} e_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_k = \xi \quad \blacksquare$$

E. Lax