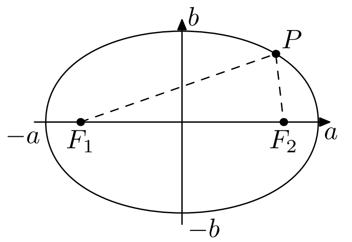
Corso di Matematica 2F per la Laurea in Fisica

Quello che dovreste sapere sulle coniche e che forse nessuno vi ha mai detto...

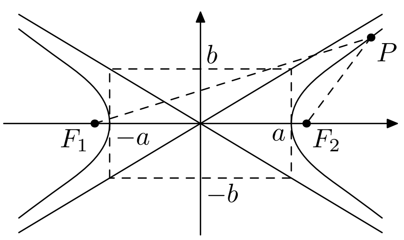
Nella scuola superiore le coniche vengono definite come luogo di punti la cui distanza da oggetti geometrici dati soddisfa ad opportune condizioni; da questa definizione si ricavano delle equazioni nel piano cartesiano ed alcune proprietà di queste curve. Fino a pochi anni or sono, queste conoscenze venivano date per scontate in ambito universitario e veniva svolto uno studio più generale delle curve algebriche di secondo grado nello spazio proiettivo, affine ed euclideo, mostrando poi che, nell'ultimo caso, queste curve vengono a coincidere con le coniche definite come luoghi (cf. ad esempio il Capitolo VII degli appunti on-line). Col passare degli anni la conoscenza delle classiche definizioni delle coniche come luogo geometrico da parte degli iscritti ai primi anni di Università si è sempre più affievolita e perciò richiamiamo brevemente quelle nozioni, invitando lo studente che le conosca già a saltare questi richiami.

Ellisse. Si chiama così il luogo dei punti, X, per cui la somma delle distanze da due punti fissati, detti i *fuochi*, F_1 ed F_2 è uguale ad una fissata costante, $2a$.



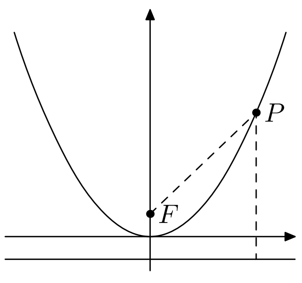
Ponendo i fuochi sull'asse delle ascisse, simmetrici rispetto all'origine, $F_1 = (-f, 0)$, $F_2 = (f, 0)$, si ha che un punto, $P = (x, y)$, appartiene all'ellisse se, e solo se, $\|P - F_1\| + \|P - F_2\| = 2a$, ovvero $\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a$ che è equivalente all'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ove $b^2 = a^2 - f^2$. L'origine è *centro* di simmetria per la figura e le costanti $a > b > 0$ si chiamano i *semiassi* dell'ellisse.

Iperbole. Si chiama così il luogo dei punti, X, per cui la differenza (in valore assoluto) delle distanze da due punti fissati, detti i *fuochi*, F_1 ed F_2 è uguale ad una fissata costante, $2a > 0$.



Ponendo i fuochi sull'asse delle ascisse, simmetrici rispetto all'origine, $F_1 = (-f, 0)$, $F_2 = (f, 0)$, si ha che un punto, $P = (x, y)$, appartiene all'iperbole se, e solo se, $\|P - F_1\| - \|P - F_2\| = \pm 2a$, ovvero $\sqrt{(x+f)^2 + y^2} - \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = \pm 2a$ che è equivalente all'equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ove $-b^2 = a^2 - f^2$. L'origine è *centro* di simmetria per la figura e le costanti $a > 0$ e $b > 0$ si chiamano i *semiassi* dell'iperbole. Le due rette $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ sono gli *asintoti* dell'iperbole.

Parabola. Si chiama così il luogo dei punti, X, equidistanti da un punto e da una retta fissati, detti, rispettivamente, il *fuoco*, F, e la *direttrice*.



Ponendo la direttrice parallela all'asse delle ascisse, con equazione $y = -f$, ed il fuoco sull'asse delle ordinate, con coordinate $F = (0, f)$, si ha che un punto, $P = (x, y)$, appartiene alla parabola se, e solo se, $\|P - F\| = |y + f|$, ovvero $\sqrt{x^2 + (y-f)^2} = |y + f|$ che è equivalente all'equazione $y = ax^2$, ove $a = 1/4f$. L'origine è il *vertice* della parabola e la costante a si chiama l'apertura della parabola. Un'apertura negativa significa che la parabola è rivolta verso il basso.

Spesso viene mostrato come si modificano le equazioni delle coniche se si effettua una traslazione che sposti l'origine in un punto di coordinate (α, β) $[x \mapsto x - \alpha,\ y \mapsto y - \beta]$. Più raramente si descrive l'effetto di una rotazione degli assi $[x \mapsto x\cos\vartheta + y\sin\vartheta,\ y \mapsto -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta]$. Invitiamo il lettore a verificare che, in ogni caso, si ottiene per la conica un'equazione di secondo grado nelle coordinate (x, y).

Si potrebbe dimostrare che ogni equazione di secondo grado, del tipo $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ rappresenta una conica in un opportuno sistema di coordinate.

ESERCIZIO . *Nel piano euclideo siano dati un punto, P, ed una retta, r, a distanza d l'uno dall'altra. Si determini il luogo dei punti X del piano tali che $\|X - P\| = k\mathrm{dist}(X, r)$, al variare di k tra i numeri reali positivi.*

Svolgimento. Non è restrittivo suppore di aver scelto le coordinate di modo che $P = O = (0, 0)$ ed r è la retta di equazione $x = d$. Preso un generico punto, $X = (x, y)$, questi appartiene al luogo cercato se, e solo se,

$$x^2 + y^2 = k^2(x^2 - 2dx + d^2).$$

Se $\boxed{k \neq 1}$, l'equazione è equivalente a

$$\frac{(1-k^2)^2}{k^2d^2}\left(x + \frac{k^2d}{1-k^2}\right)^2 + \frac{1-k^2}{k^2d^2}\,y^2 = 1.$$

Se $\boxed{0 < k < 1}$ si tratta di un'ellisse, con centro nel punto $C = \left(-\frac{k^2d}{1-k^2}, 0\right)$ e fuochi in O ed in $F = \left(-\frac{2k^2d}{1-k^2}, 0\right)$. I semiassi sono $\frac{dk}{1-k^2} > \frac{dk}{\sqrt{1-k^2}}$.

Se $\boxed{k > 1}$ si tratta di un'iperbole, con centro nel punto $C = \left(-\frac{k^2d}{1-k^2}, 0\right)$ e fuochi in O ed in $F = \left(\frac{2k^2d}{1-k^2}, 0\right)$. I semiassi sono $\frac{dk}{k^2-1}$ e $\frac{dk}{\sqrt{k^2-1}}$.

Se $\boxed{k = 1}$ si tratta di una parabola, di equazione $x = -\frac{1}{2d}y^2 + \frac{d}{2}$. Il fuoco è il punto O. □

ESERCIZIO 1. È vero che ogni conica, diversa da un cerchio, è isometrica ad una di quelle descritte nell'esercizio precedente, per opportuni valori di k e d?

ESERCIZIO 2. Cosa succede delle curve descritte sopra se si fa tendere k a zero, mantenendo costante il prodotto $kd = R$?

L'esercizio svolto sopra ci suggerisce un modo per ricavare le equazioni in coordinate polari delle coniche, quando un fuoco sia posto nell'origine. Ricordiamo che un punto, $X = (x, y)$, ha coordinate polari (ρ, ϑ), legate alle coordinate cartesiane dalle relazioni

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}\vartheta = \frac{y}{x} \end{cases}.$$

Data la retta $r : x - d = 0$, $(d > 0)$, relazione $\|X - O\| = k|d - x|$ si scrive in coordinate polari come $\rho = k|d - \rho\cos\vartheta|$. Si ottengono quindi le due espressioni

$$\boxed{\rho = \frac{kd}{1 + k\cos\vartheta}, \quad \text{se } \rho\cos\vartheta < d, \qquad \text{e} \qquad \rho = \frac{kd}{k\cos\vartheta - 1}, \quad \text{se } \rho\cos\vartheta > d}$$

Che descrivono le coniche in coordinate polari quando un fuoco sia posto nell'origine.

Se $\boxed{k > 1}$, dobbiamo escludere i valori di ϑ per cui $\cos\vartheta = \pm\frac{1}{k}$, che sono precisamente le pendenze degli asintoti dell'iperbole.

Se $\boxed{0 < k \leq 1}$, si ha necessariamente $\rho\cos\vartheta < d$ e quindi la curva sta tutta a sinistra della retta r. Infatti, se fosse $\rho\cos\vartheta > d > 0$, si avrebbe di conseguenza

$$\mathrm{dist}(X, r) = \rho\cos\vartheta - d < \rho\cos\vartheta \leq \rho = k\mathrm{dist}(X, r) \leq \mathrm{dist}(X, r),$$

che è assurdo.