Matematicamente.it
• NUMERO 17 – APRILE 2012 •

167. I teoremi inversi di Pitagora e di Euclide, alcuni aspetti storici, epistemologici e didattici

Nicola Carichino *

SUNTO

Come è stato rilevato da più parti (ad esempio, si veda [13], pag. 1), il teorema inverso di Pitagora e la sua dimostrazione sono scomparsi dai libri di testo senza alcuna ragione. Avendo accertato un analogo fenomeno nei riguardi dei teoremi di Euclide, svolgiamo alcune considerazioni storico/epistemologiche e proponiamo alcune semplici dimostrazioni dei suddetti teoremi inversi.

ABSTRACT

In this paper, after some historical and epistemological remarks, we present some proofs of the inverse theorem of Pitagora and Euclide**.**

Considerazioni generali

Nella storia della geometria greca occupano un posto significativo i teoremi di Pitagora e di Euclide. In particolare, ciò vale per la geometria euclidea, che per millenni – fino alla scoperta delle geometrie non euclidee – è stata vista come l'unica geometria possibile. Per comodità del lettore, qui di seguito riportiamo i teoremi di Euclide.

Il primo Teorema di Euclide (I T. E.*).* *In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo avente per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa (Fig. 1. a):*

$$Q_1 \equiv R_1 \quad \text{e} \quad Q_2 \equiv R_2$$

Il secondo Teorema di Euclide (II T.E.). *In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per dimensione le proiezione dei cateti sull'ipotenusa (Fig. 1. b):*

$$Q_3 \equiv R_3.$$

Però bisogna dire che, negli *Elementi* di Euclide, i due teoremi a cui è stato attribuito il nome del grande maestro appaiono quasi in sordina. Precisamente, il primo compare nel corso della dimostrazione del teorema di Pitagora, posta alla fine del Libro I (si veda [2], Prop. 47, pp. 146 e segg.). Si tratta della più antica dimostrazione a noi pervenuta del teorema di Pitagora. Essa si basa sul fatto che la perpendicolare condotta dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa divide il quadrato costruito sull'ipotenusa in due rettangoli equivalenti ai rispettivi quadrati costruiti sui cateti (doppia applicazione del **I T. E.**).
Quindi il **I T. E.** in [2] non ha nemmeno il rilievo di una proposizione autonoma. Invece, il **II T. E.** è presente a p. 375 di [2] – in forma leggermente diversa – come conseguenza della Proposizione 8 del Libro VI. Quest'ultima afferma: *Se in un triangolo rettangolo si conduce la perpendicolare dell'angolo retto sulla base, la stessa perpendicolare divide il triangolo in due triangoli simili a tutto quanto il triangolo e tra loro.*
Dalla suddetta proposizione si fa scaturire un corollario, chiaramente equivalente a **II T. E.**, che viene espresso così: È da ciò evidente che, se in un triangolo rettangolo si conduce la perpendicolare dall'angolo retto sulla base, la retta così condotta è media proporzionale fra le parti nelle quali essa divide la base.
Solo in seguito, quando si capì l'importanza sia di **I T. E.** che di **II T. E.**, essi assunsero una loro dignità e una loro connotazione precisa, con la denominazione di Teoremi di Euclide.

* I.I.S. "F. Bottazzi" – Casarano (LE).

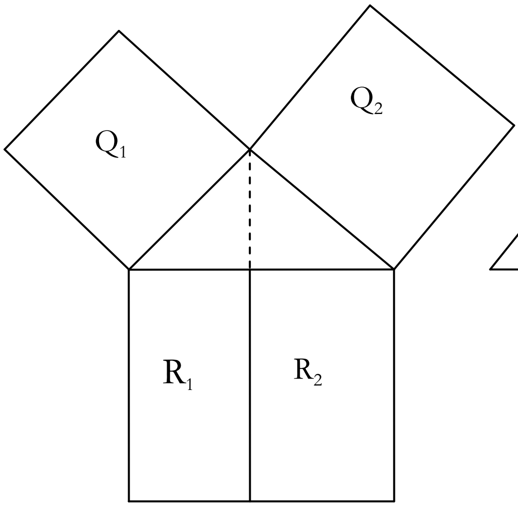

Fig. 1a

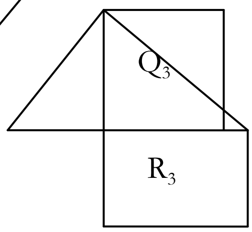

Fig. 1b

Il teorema di Pitagora e il suo inverso

Se c'è un teorema di matematica che va annoverato tra quelli più conosciuti, esso è sicuramente quello di Pitagora, che è stato definito *il primo grande teorema* (si veda [5], p. 26). Questo perché pare che, con esso, per la prima volta sia stata dimostrata un'importante proposizione matematica. Come è noto, il suo enunciato afferma che *in ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti.*

Una leggenda racconta che Pitagora abbia intuito il teorema che porta il suo nome mentre era a Samo, in una stanza del palazzo del tiranno Policrate. Pitagora, nell'attesa di essere ricevuto da Policrate, da attento osservatore, notò che la forma del pavimento aveva una configurazione geometrica particolare: era formata da quadrati uguali (si veda Fig. 2) ciascuno dei quali era diviso dalle due diagonali.

Egli constatò – come un semplice conto conferma, considerando il disegno evidenziato in grassetto in Fig. 2 – che l'estensione del quadrato sull'ipotenusa di un qualsiasi triangolo rettangolo isoscele era equivalente a quella dei quadrati sui due cateti. Sollecitato da questa osservazione, successivamente dimostrò la validità di questa proposizione per tutti i triangoli rettangoli.

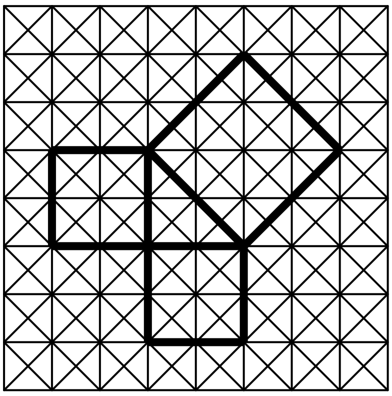

Fig. 2

In [8] D. Lenzi presenta quella che potrebbe essere stata l'idea intuitiva che portò Pitagora a osservare e a dimostrare – usando proprietà delle figure simili – il suo teorema nel caso generale. Va però ricordato quanto A. Frajese scrive in [2] (p.146, nota 35): "[…] *È di dubbio valore l'attribuzione effettiva a Pitagora di questo celebre teorema* […] *già dai tempi di Platone non si aveva modo di distinguere l'opera personale di Pitagora da quella della scuola sorta attorno a lui* […]". Tuttavia, Frajese nella stessa nota ricorda che, stando a Diogene

Laerzio, Apollodoro *il calcolatore* avrebbe affermato che Pitagora sacrificò un'ecatombe (cento buoi) per aver scoperto il suo teorema.
Nessun altro teorema ha avuto nel corso dei secoli uno studio cosi profondo e tante dimostrazioni. Elisha Scott Loomis (1852-1940) ha raccolto nel libro "The Pythagorean Proposition" moltissime dimostrazioni del teorema di Pitagora. Vi sono quelle di scienziati di chiara fama, illustri personaggi come il Presidente degli USA J. A. Garfield (1831-1881), sino a matematici dilettanti. Nella seconda edizione del suo testo (si veda [11]) Loomis ha raccolto ben 370 diverse dimostrazioni. Una analoga indagine è stata fatta anche da C. Mazzei, presidente della sezione Mathesis di Crotone ([8], pag. 39).
Secondo lo storico della matematica H. G. Zeuthen (1839-1920) è stato il teorema di Pitagora l'origine della geometria razionale nella Scuola Pitagorica, nel senso che fu il desiderio di dimostrare il teorema di Pitagora che spinse i Pitagorici a costruire la geometria con il metodo assiomatico (si veda [16] e [17]) [1].
Ebbene, anche se – come si diceva – il teorema di Pitagora avrebbe dato i natali alla dimostrazione geometrica per via assiomatica, non meno importante è il suo inverso, soprattutto per l'aspetto applicativo. L'enunciato di quest'ultimo afferma che *in ogni triangolo, se il quadrato di uno dei lati è uguale alla somma dei quadrati dei rimanenti due lati, il triangolo è rettangolo.*
Come hanno evidenziato A. Scimone e F. Spagnolo con un monitoraggio da loro effettuato: "[…] *l'inverso del teorema di Pitagora è scomparso da molti manuali scolastici italiani dai primi del novecento ad* oggi […]" (si veda [14], pag.1).
Non è facile capire se questa scelta sia dovuta a esigenze temporali nell'attività didattica o se sia espressamente voluta; comunque, senza entrare in merito a tale questione, per ulteriori spunti di riflessione rinviamo a [14]; ove i due autori, tra l'altro, a pag.5 osservano: "[…] *l'inverso del teorema di Pitagora, non è un risultato secondario che possa essere tralasciato senza alcun commento, perché esso costituisce la condizione sufficiente perché un triangolo sia rettangolo* […]".
Euclide pone il teorema inverso di Pitagora nella Proposizione 48 – alla fine del Libro I degli *Elementi* (si veda [2], pag. 149), che noi riportiamo qui sotto – e lo dimostra utilizzando il teorema di Pitagora e il terzo criterio di uguaglianza per i triangoli.

Proposizione 48. *Se in un triangolo il quadrato di uno dei lati è uguale alla somma dei quadrati dei rimanenti due lati del triangolo, l'angolo che è compreso dai due rimanenti lati del triangolo è retto.*

Proporremo una dimostrazione alternativa rispetto a quella euclidea. Come vedremo, tale dimostrazione si può presentare in modo estremamente intuitivo – ri-correndo a un'ovvia proprietà dei compassi – e si basa, oltre che sul Teorema di Pitagora, sulla Proposizione 24 degli *Elementi* (si veda [2], p. 114).
Com'è facilmente intuibile, il teorema inverso di Pitagora offre un metodo per costruire triangoli rettangoli, ovvero per tracciare angoli retti. Infatti, se un triangolo ha i lati le cui lunghezze a, b, c soddisfano la relazione $a^2 + b^2 = c^2$, l'angolo formato dai segmenti di lunghezza a e b è retto; per cui, basta costruire un triangolo con queste caratteristiche ed essere certi che l'angolo interno for-mato dai lati di lunghezza a e b è retto. Una particolare terna numerica che soddisfa la relazione precedente è costituita dai numeri 3, 4, 5.
Secondo alcune tradizioni, gli antichi Egizi sapevano che un triangolo di lati 3, 4 e 5 – proprio per il fatto che $3^2 + 4^2 = 5^2$ – era rettangolo. Questa informazione è stata tramandata dalla seguente leggenda. I contadini Egiziani avevano ogni anno la ne-cessità di ripristinare i confini della loro proprietà, in quanto essi venivano cancellati a causa delle inondazioni del fiume Nilo; ebbene, gli agrimensori locali, per ri-disegnare con esattezza gli angoli retti degli appezzamenti da riassegnare ai legittimi proprietari, si servivano di una corda a forma di triangolo con i lati di lunghezza 3, 4 e 5 (rispetto a un intervallo unitario opportuno).
Come è noto, la terna (3, 4, 5) rappresenta una delle infinite *terne pitagoriche* (a, b, c), caratterizzate dalla proprietà di essere costituite da numeri naturali non nulli tali che $a^2 + b^2 = c^2$.

---

[1] L'ipotesi di Zeuthen è stata ripresa recentemente da P. Odifreddi, che in [12] fa vedere quali assunzioni sono necessarie per dimostrare il teorema di Pitagora.

La Proposizione 24 degli Elementi afferma, in modo un po' involuto: *Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno l'angolo compreso dai lati uguali maggiore dell'angolo corrispondente, avranno la base maggiore della base* [2].
Ecco allora come si può dare una dimostrazione semplice e "concreta" del Teorema inverso di Pitagora.
Infatti, i lati del triangolo di cui all'enunciato della Proposizione 48, che sono i "candidati cateti" del nostro triangolo rettangolo, consideriamoli come i bracci [eventualmente diversi, rispettivamente di lunghezza a e b] di un compasso che abbia un'*apertura angolare* coincidente con l'angolo formato dai suddetti lati; perciò il terzo lato – "il candidato ipotenusa", di lunghezza c – corrisponde al segmento ideale che congiunge le punte del nostro compasso. Onde risulta:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ora, se la suddetta apertura angolare non è un angolo retto, supponiamo che essa sia un angolo ottuso. Quindi restringendo quell'apertura fino a farla diventare un angolo retto, avremo un triangolo rettangolo la cui ipotenusa ha lunghezza c' minore di c, che è la lunghezza del terzo lato del triangolo di partenza. Di conseguenza per il triangolo rettangolo così ottenuto la classica relazione pitagorica sui lati non varrebbe, poiché risulterebbe $a^2 + b^2 > c'^2$. Il che è assurdo.
Un discorso analogo lo si farebbe se quell'apertura angolare fosse un angolo acuto.
Ma ecco una dimostrazione più rigorosa. Abbiamo per ipotesi:

$$(BA)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$$

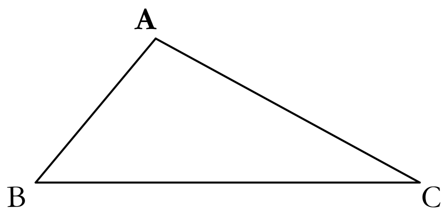

Fig. 3

Supponiamo, per assurdo, che l'angolo BAC non sia retto. Quindi consideriamo un triangolo rettangolo $B'A'C'$ tale che l'angolo in A' sia retto, con $B'A' = BA$ e con $A'C' = AC$; per il teorema di Pitagora risulta:

$$(B'A')^2 + (A'C')^2 = (B'C')^2$$

Perciò, dato che $B'A' = BA$ e $A'C' = AC$, dalle uguaglianze (1.1) e (1.2) si ricava subito che $BC = B'C'$. Il che è assurdo, dato che la citata Proposizione 24 degli *Elementi* assicura che se l'angolo BAC è acuto, allora $BC < B'C'$; mentre se l'angolo BAC è ottuso, allora $BC > B'C'$ ■

I teoremi inversi di Euclide

È comprensibile il fatto che Euclide negli *Elementi* non faccia alcun riferimento agli inversi dei due teoremi che in seguito presero nome da lui, visto che egli non diede particolare importanza a questi due teoremi. Quello che è sorprendente, però, è che tale vuoto si riscontra anche in quasi tutti i manuali scolastici utilizzati nelle scuole medie, infatti da una vasta consultazione effettuata da noi, solo nel testo *Elementi di Matematica, Teoria*, di G. Bucchini, E. Magi, A. Gambardella, ed. Calderoni, BO, 1995, sono riportati gli enunciati dei due teoremi inversi.
Ebbene, constatando questo vuoto editoriale e didattico, qui vogliamo richiamare l'attenzione dei colleghi su questo fenomeno diffuso, invitandoli a non limitare l'insegnamento ai due teoremi di

[2] Recentemente, in [9], C. De Mitri e D. Lenzi hanno perfezionato la dimostrazione di questa proposizione, che essi – per ovvie ragioni – hanno denominato *teorema del compasso*.

Euclide, trascurando i rispettivi inversi, in quanto la loro conoscenza determina due ulteriori caratterizzazioni dei triangoli rettangoli.
Nelle pagine seguenti, per facilitare l'aspetto divulgativo, svolgeremo semplici dimostrazioni di questi due teoremi.
Osservazione. Nell'enunciare i teoremi inversi di Euclide noi faremo riferimento a un triangolo *ABC* tale che la proiezione *H* di *A* su *BC* sia interna al lato, in quanto, se così non fosse, il triangolo *ABC* non risulterebbe rettangolo, nonostante siano rispettivamente soddisfatte le condizioni date nel primo oppure nel secondo teorema di Euclide.
Infatti la seguente Fig. 4 ci fa capire che – fermi restando i punti *A* e *B* [onde resta fermo anche *H*] – il punto *C* (pur essendo *B* interno al segmento *HC*) può essere situato in una posizione tale che il quadrato costruito su *AH* sia equivalente al rettangolo di lati *BH* e *HC*, anche se l'angolo *BAC* è acuto. Precisamente, questa per *B* è la posizione in cui, considerato il suo simmetrico *B'* rispetto ad *H*, è l'angolo *B'AC* che risulta essere retto ■

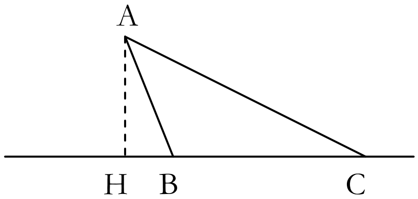

Fig. 4

Teorema inverso del I di Euclide. *Sia ABC un triangolo tale che la proiezione H di A su BC sia interna al lato BC. Inoltre Q sia il quadrato costruito sul lato AB ed R sia il rettangolo di lati BH e BC. Se Q è equivalente a R, allora l'angolo BAC è retto.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che l'angolo *BAC* non sia retto, onde potrebbe essere ottuso o acuto. Se esso è ottuso, allora esiste un punto *M* interno al lato *HC* tale che l'angolo *BAM* sia retto (*Fig. 5*).
Allora, per il I teorema di Euclide, si ha che *Q* è equivalente al rettangolo di lati *BH* e *BM*.
Poiché per ipotesi *Q* è equivalente al rettangolo di lati *BH* e *BC*, ne segue che *BM* è uguale a *BC*, il che è assurdo, dato che il lato *BM* è interno al lato *BC*.
Considerazioni simili si possono svolgere ipotizzando che l'angolo *BAC* sia acuto. In tal caso il punto *M* sarà situato sul prolungamento del segmento *HC* dalla parte di *C* ■

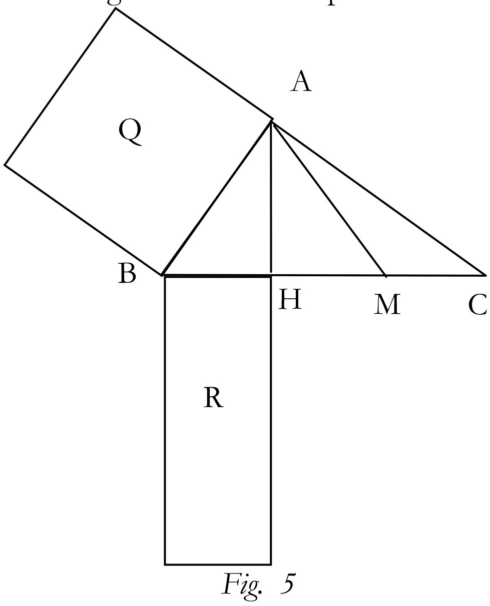

Fig. 5

Teorema inverso del II di Euclide. *Sia ABC un triangolo tale che la proiezione H di A su BC sia interna al lato BC. Inoltre Q_1 sia il quadrato costruito sul lato AH ed R_1 sia il rettangolo di lati BH e HC. Se Q_1 è equivalente a R_1, allora l'angolo BAC è retto.*

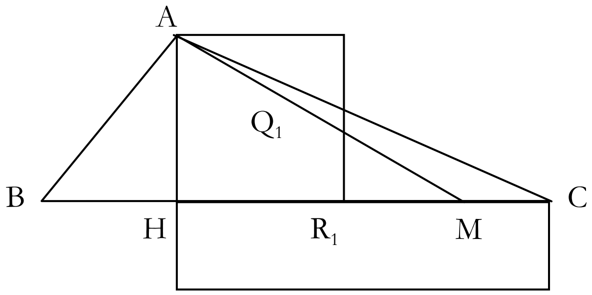

Fig. 6

Dimostrazione. Come nel teorema precedente, supponiamo, per assurdo, che l'angolo *BAC* non sia retto. Potrebbe essere allora ottuso o acuto, onde possiamo con-siderare un punto *M* situato sulla semiretta *HC*, in modo tale che *BAM* sia retto (Fig. 6). Quindi si può proseguire in modo analogo a quello della dimostrazione del teorema precedente ■

Bibliografia

[1] Bucchini G. – Gambardella A. – Magi E., *Elementi di Matematica. Teoria*, Calderoni, BO, 1995.

[2] Euclide, *Elementi*, a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, UTET, (1970).

[3] Enriques F., *Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna*, Vol. I. Ed. Stock, RM, (1924); Vol. II, Zanichelli, BO, 1930: Vol. III, ivi (1932); Vol. IV, ivi (1935).

[4] Enriques F. – Amaldi U., Elementi di geometria, Parte I/II, Zanichelli, BO, 1970.

[5] Eves H., *Great Moments in Mathematics* (before 1650), The Mathematical Association of America, Washington, 1980.

[6] Giusti E., *Pitagora e il suo teorema*, Polistampa, FI, 2001.

[7] Heath Sir T., *A History of Greek Mathematics*, Dover Publications, Inc., N.Y., 1981.

[8] Lenzi D., Dal teorema di De Giorgi-Nash al teorema di Pitagora: un salto a ritroso di venticinque secoli segnati dalla costanza ricerca della verità scientifica, Periodico di Matematiche, Vol. 2°, N. 1, 2002, pp.33-44.

[9] De Mitri C. e Lenzi D., *Euclide e il teorema mancante*, Matematicamente.it Magazine, N. 12 (2010).

[10] Lidonnici A., *Il teorema di Pitagora nelle civiltà pre-elleniche ed in Grecia*, Periodico di Matematiche, 1933, nn.2.3,4. RM, 1951.

[11] Loomis E. S., *The Pythagorean Proposition*, Reprint to the 2nd edition, The National Council of Teachers of Mathematics, Washington,1968.

[12] Odifreddi P., Divertimento geometrico. Le origini geometriche della logica da Euclide a Hilbert, Bollati Boringhieri, TO, Ristampa 2004.

[13] Scimone A. e Spagnolo F., Alcune difficoltà con il caro vecchio Teorema di Pitagora, Prospettive per una ricerca. GRIM – Dipartimento di Matematica dell'Università di Palermo, Via Archirafi 34 – 90123. http://dipmat.math.unipa.it/~grim/convreg1_scimonespa-PA.pdf

[14] Scimone A. e Spagnolo F., Il caso emblematico dell'inverso del teorema di Pi-tagora nella storia della trasposizione didattica attraverso i manuali. GRIM – Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università di Palermo, http://dipmat.math.unipa.it/~grim/spagnolo_scimone_teorPitagora_04.pdf

[15] D.Veljan, *The 2500-Year Old Pythagorean Theorem*, Mathematics Magazine, Vol.73, N.4, pp.259-272.

[16] Zeuthen H. G., *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le Moyen Age* (ed. danese 1893) ; trad. francese di Mascart, Parigi (1902).

[17] Zeuthen H. G., *Théorème de Pythagore. Origine de la geometrie scientifique*. Rendiconti del II Congresso Internazionale a Ginevra (1904).