

168. Catene di cerchi all'interno di lunule e lenti

Giovanni Lucca
vanni_lucca@inwind.it

Sunto

Studiamo le catene infinite di cerchi che possono formarsi all'interno delle regioni risultanti dall'intersezione di due cerchi.

Abstract

We study the infinite chains of mutually tangent circles that can be formed inside the regions resulting from the intersection of two circles.

1. Introduzione

Si possono disegnare differenti tipi di catene, finite o infinite, composte da cerchi mutuamente tangenti, in relazione alla reciproca posizione di due cerchi principali α e β .

Le più note sono le catene di Steiner [1] che possono essere tracciate all'interno della regione anulare tra due cerchi α e β , uno all'interno dell'altro, non intersecatisi e non coassiali; sono note anche le catene di Pappo [2] che possono formarsi all'interno della regione tra due cerchi tangenti internamente. Infine, può considerarsi il caso in cui α e β sono tangenti esternamente oppure uno dei due cerchi degenera in una retta [3].

Qui vogliamo studiare il caso in cui α e β sono intersecanti formando così le tre regioni mostrate in Fig.1:

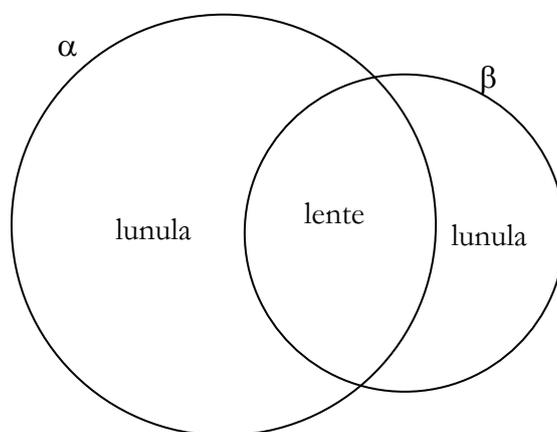


Fig.1: Regioni formate dall'intersezione di due cerchi

La regione comune ad entrambi i cerchi è chiamata *lente*

Le due regioni esterne, appartenenti ad un cerchio soltanto, sono chiamate *lunule*.

Vogliamo studiare le catene infinite di cerchi, mutuamente tangenti, che possono formarsi all'interno di una lente e di una lunula. (Si vedano le Fig. 2a e 2b).

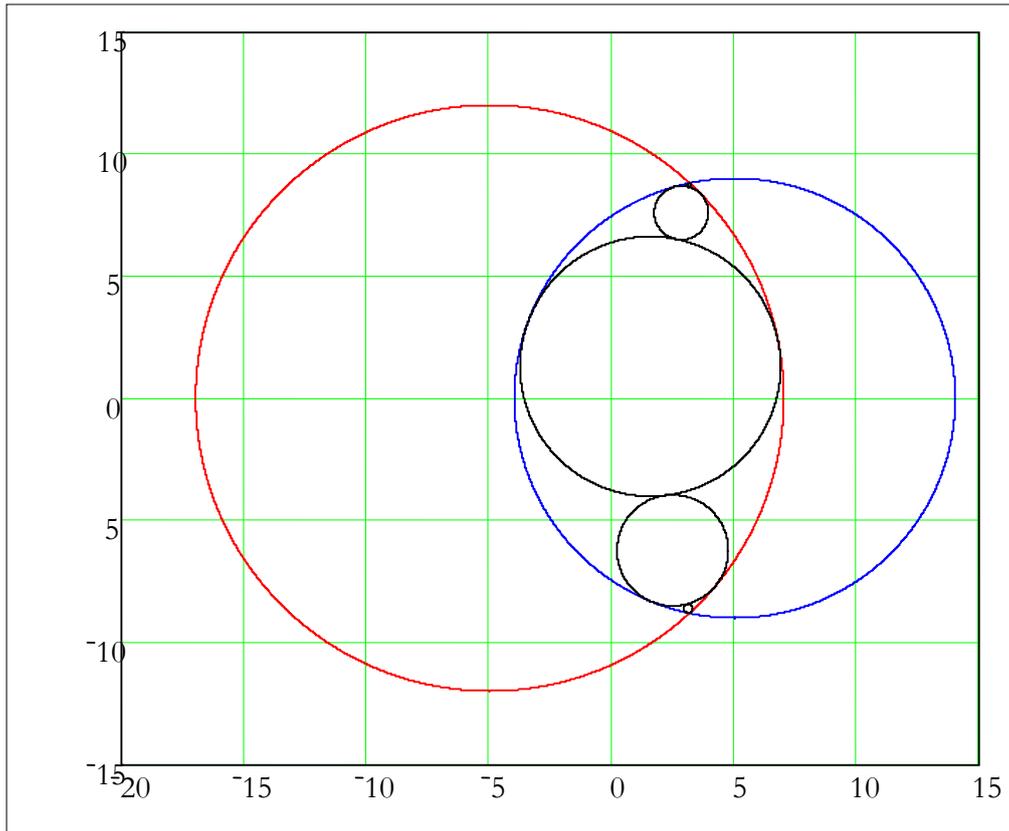


Fig. 2a: Catena di cerchi all'interno di una lente.

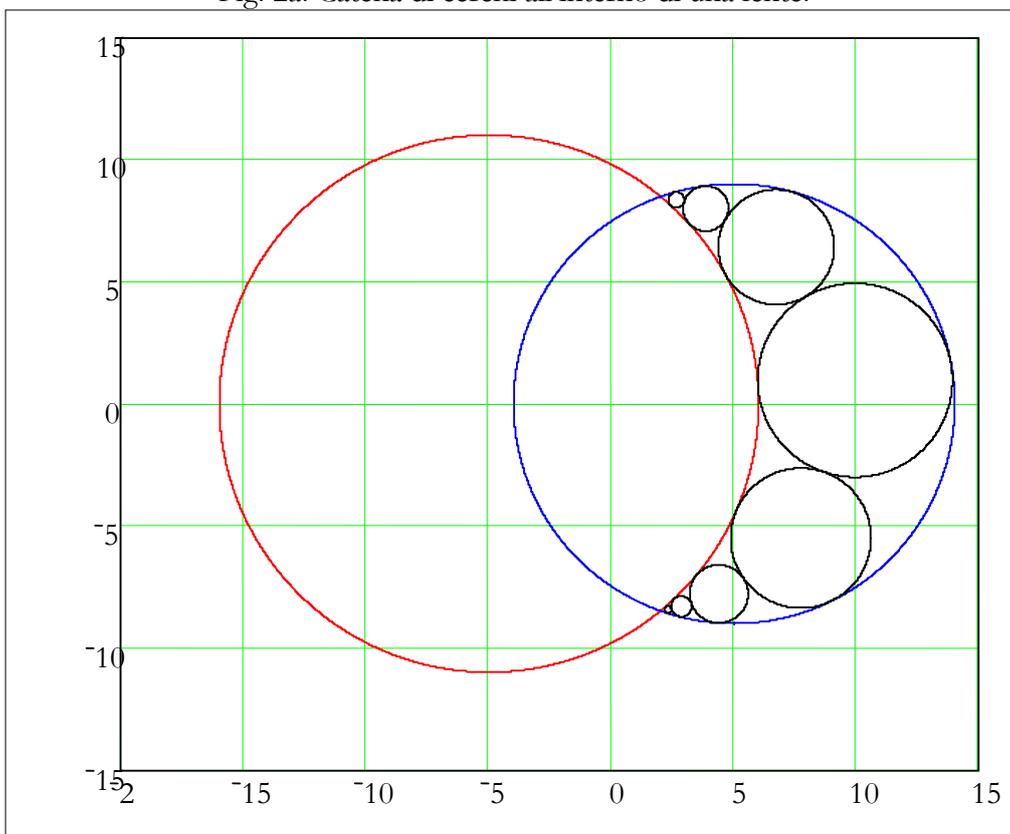


Fig. 2b: Catena di cerchi all'interno di una lunula.

In particolare, determineremo le formule relative alle coordinate del centro e del raggio del generico cerchio i -esimo della catena; inoltre proveremo anche alcune proprietà relative alle catene stesse.

2. Luogo associato ai centri dei cerchi

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano dove due punti A and B, posizionati sull'asse delle x e separati dalla distanza D, hanno rispettivamente coordinate $(-D/2, 0)$ e $(D/2, 0)$. Siano A and B i centri dei due cerchi α e β aventi rispettivamente raggio a e b. Affinché esista l'intersezione tra α e β deve valere la seguente relazione:

$$a + b > D \quad (1)$$

Proviamo ora le seguenti proprietà:

Il centro di ogni cerchio all'interno di una lente e tangente sia ad α che a β giace su una iperbole avente fuochi in A e B ed equazione:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{D^2 - (a-b)^2}}{2}\right)^2} = 1 \quad (2)$$

Il centro di ogni cerchio all'interno di una lunula e tangente sia ad α che a β giace su una ellisse avente fuochi in A e B ed equazione:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{(a+b)^2 - D^2}}{2}\right)^2} = 1 \quad (3)$$

Al fine di dimostrare la parte a) della proprietà, facciamo riferimento a Fig.3a.

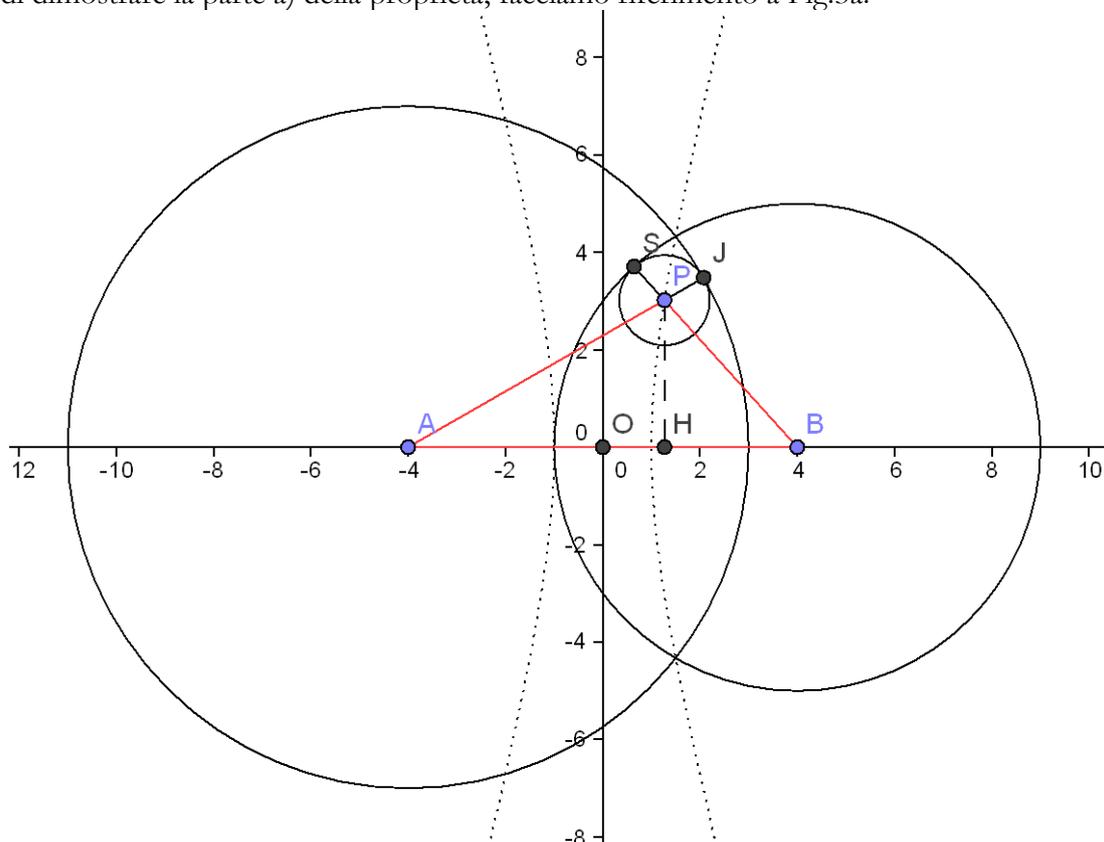


Fig.3a: Cerchio tangente all'interno di una lente.

Il vertice P del triangolo APB, avente coordinate (x, y) , è il centro di un generico cerchio tangente sia ad α (in J) che a β (in S) mentre $PJ=PS=r(y)$ ne è il raggio.

Abbiamo che:

$$AP=a-r(y) \qquad BP=b-r(y) \qquad AB=D$$

Esprimendo l'area del triangolo APB in due differenti modi, cioè attraverso il semiprodotto della base D con l'altezza $PH=y$ e per mezzo del teorema di Erone, possiamo scrivere:

$$\frac{Dy}{2} = \sqrt{\frac{[a+b-2r(y)+D][a+b-2r(y)-D]D+(b-a)D-(b-a)}{2} \frac{D-(b-a)}{2}} \quad (4)$$

da cui si ricava:

$$\frac{4D^2y^2}{D^2-(a-b)^2} + D^2 = [a+b-r(y)]^2 \quad (5)$$

Dalla (5), otteniamo:

$$r(y) = \frac{1}{2} \left(a+b - \sqrt{\frac{4y^2D^2}{D^2-(a-b)^2} + D^2} \right) \quad (6)$$

Inoltre, guardando ai triangoli APH e BPH in Fig.3a, possiamo scrivere:

$$[a-r(y)]^2 - \left(\frac{D}{2} + x\right)^2 = y^2$$

$$[b-r(y)]^2 - \left(\frac{D}{2} - x\right)^2 = y^2$$

Eguagliando le equazioni sopra, otteniamo:

$$x = \frac{a^2 - b^2 - 2r(y)(a-b)}{2D} \quad (7)$$

e, sostituendo la (6) nella (7), abbiamo:

$$x(y) = \frac{a-b}{2D} \sqrt{D^2 + \frac{4y^2D^2}{D^2-(a-b)^2}} \quad (8)$$

Infine elevando al quadrato entrambi i membri della (8) si ottiene la equazione (2).

E' immediato verificare, dall'equazione (2), che le coordinate dei fuochi sono coincidenti con quelle dei punti A e B.

Per quanto riguarda il punto b), facciamo riferimento alla Fig.3b.

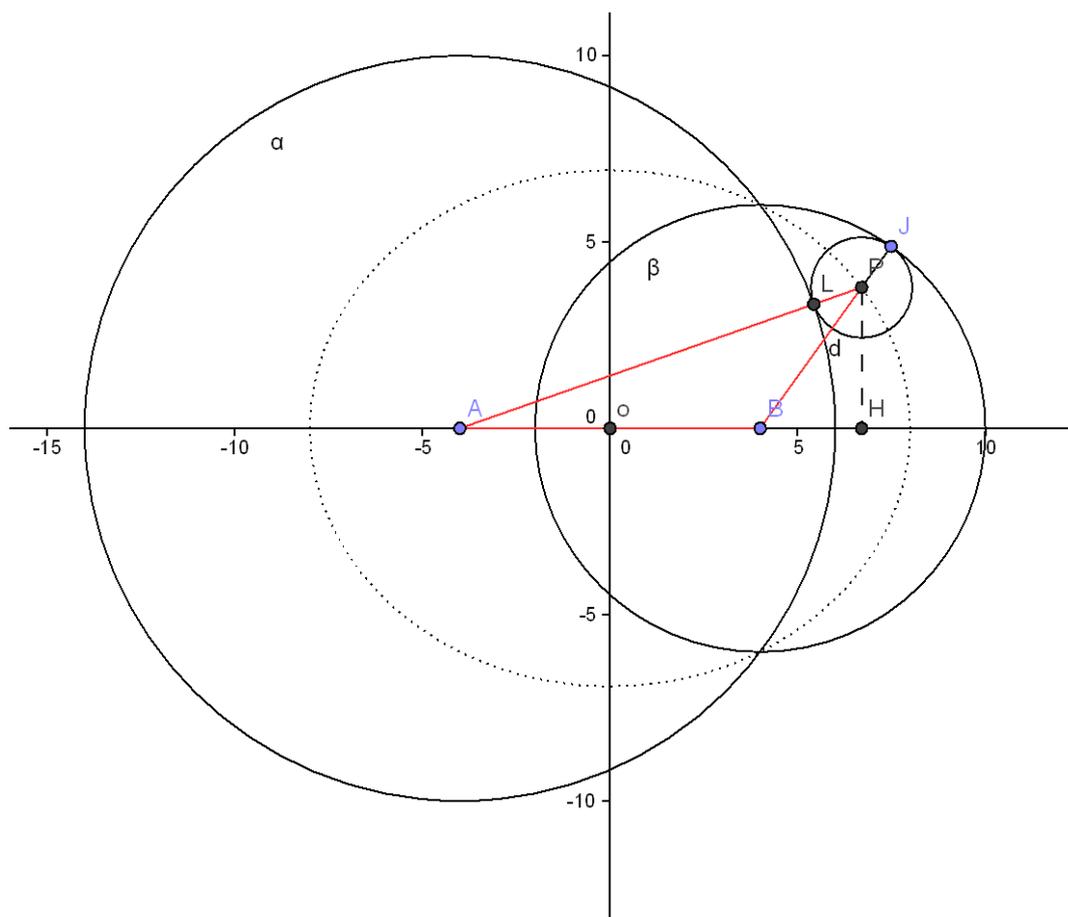


Fig.3b: Cerchio tangente all'interno di una lunula.

La dimostrazione è completamente simile a quella relativa al punto a) con l'unica differenza che, in questo caso, $AP=a+r(y)$.

Valgono le seguenti relazioni:

$$r(y) = \frac{1}{2} \left(-(a-b) + \sqrt{D^2 - \frac{4y^2 D^2}{(a+b)^2 - D^2}} \right) \quad (9)$$

$$x(y) = \frac{a+b}{2D} \left(\sqrt{D^2 - \frac{4y^2 D^2}{(a+b)^2 - D^2}} \right) \quad (10)$$

e quindi, elevando al quadrato entrambi i membri di (10), si ottiene l'equazione (3).

E' immediato verificare, dalla equazione (3), che le coordinate dei fuochi sono coincidenti con quelle dei punti A e B.

Infine, poiché tali proprietà sono valide per ogni generico cerchio tangente sia ad α che a β all'interno di una lente o di una lunula, ne concludiamo che le proprietà valgono per tutti i cerchi di una catena.

3. Coordinate dei centri e raggi dei cerchi della catena

Lo scopo di questo paragrafo è determinare espressioni analitiche per le coordinate del centro e raggio del generico cerchio i -esimo di una catena sia nel caso della lente che nel caso della lunula.

Un metodo conveniente è quello di usare la tecnica dell'inversione circolare [4].

Definiamo dapprima i punti C and D individuati dalla intersezione dei cerchi α e β ; le loro coordinate sono date da:

$$C \equiv \left(\frac{a^2 - b^2}{2D}, \frac{\sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} \right)$$

$$D \equiv \left(\frac{a^2 - b^2}{2D}, -\frac{\sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} \right)$$

Se consideriamo come cerchio di inversione γ quello avente centro in D e raggio ρ uguale alla lunghezza del segmento CD cioè:

$$\rho = \frac{\sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{D} \quad (10)$$

abbiamo che i due cerchi α e β sono trasformati rispettivamente rette α' e β' . Si veda la Fig.4.

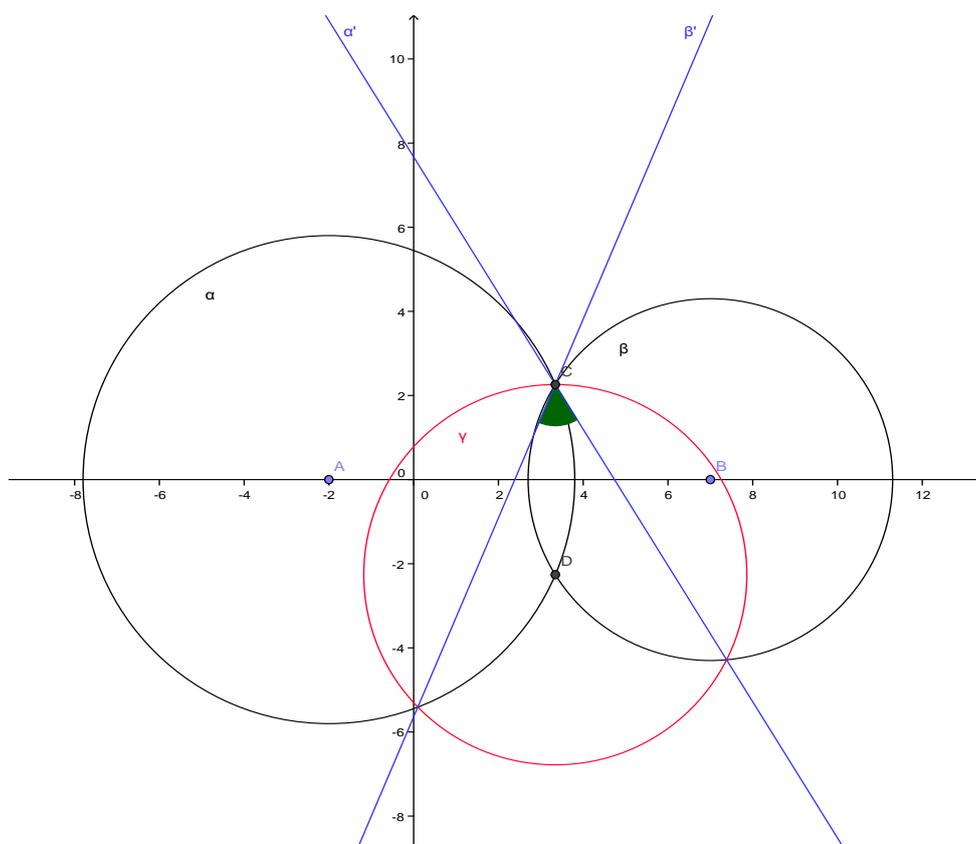


Fig.4: Inversione circolare dei cerchi α e β .

Conviene ora ricordare una proprietà generale di ogni inversione circolare: la tangenza tra cerchi e tra cerchi e rette, è mantenuta anche a seguito della operazione di inversione. Pertanto, le catene di cerchi mostrate nelle Fig.2 sono trasformate nelle catene all'interno della regione compresa tra le rette α' and β' . Si veda la Fig.5a per la lente e la Fig.5b per la lunula.

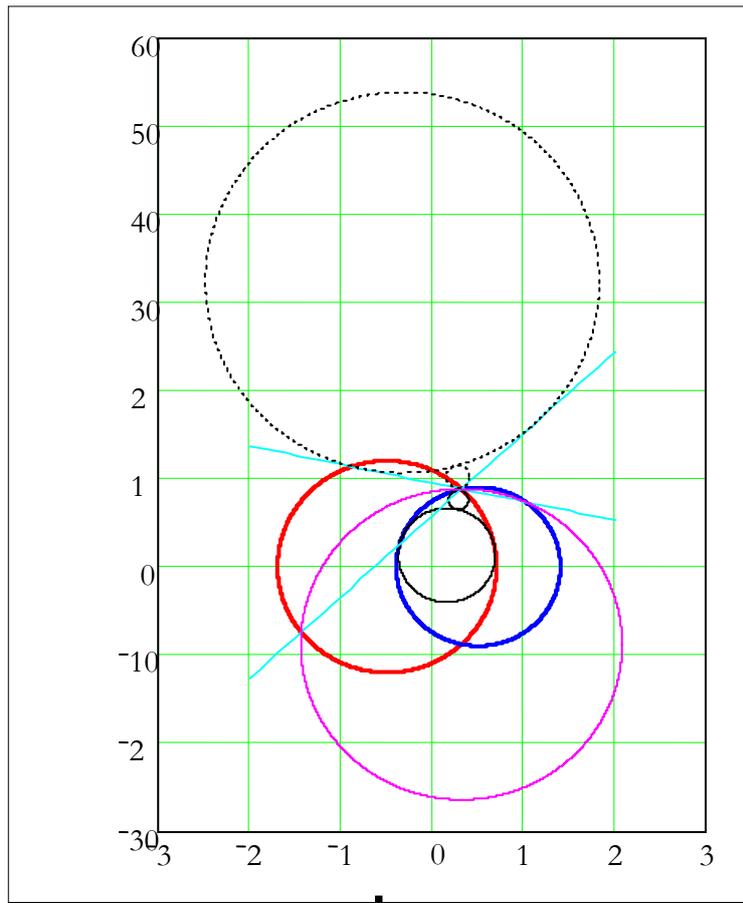


Fig.5a: Inversione (linee tratteggiate) di una catena di cerchi all'interno di una lente.

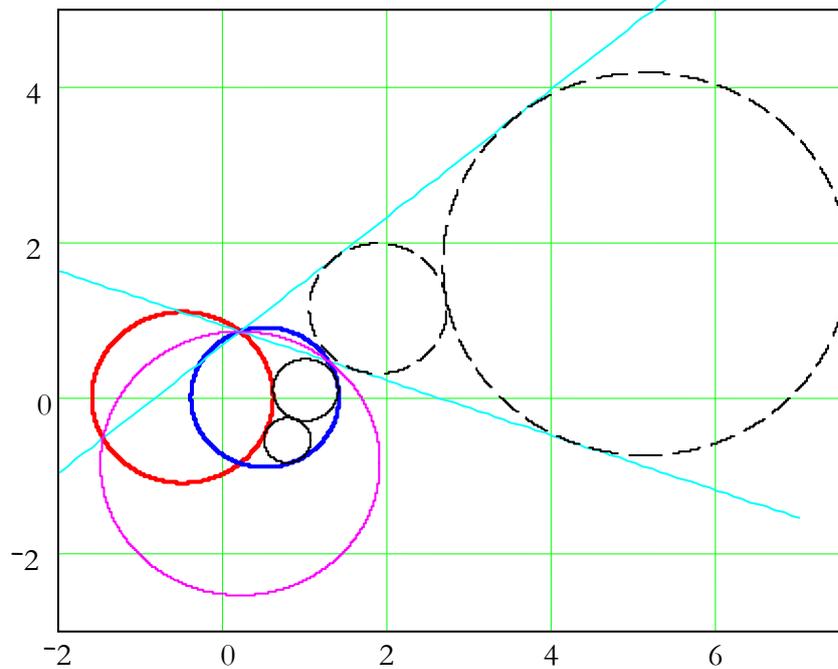


Fig.5b: Inversione (linee tratteggiate) di una catena di cerchi all'interno di una lunula.

Così, per mezzo dell'inversione circolare, abbiamo da risolvere un problema più semplice che consiste nello studiare una catena di cerchi tangenti alle rette α' e β' invece che ai cerchi α e β .

Pertanto, determineremo dapprima le coordinate dei centri (x_i', y_i') ed i raggi r_i' dei cerchi immagine; essi verranno quindi trasformati, in base alle formule di inversione circolare [4], per trovare le relazioni che stiamo cercando.

Tuttavia per determinare (x_i', y_i') ed r_i' , è conveniente utilizzare un altro sistema cartesiano XY avente origine nel punto C e asse X coincidente con la retta α' . In questo sistema di riferimento, le immagini, secondo operazione di inversione, sono mostrate in Fig.6.

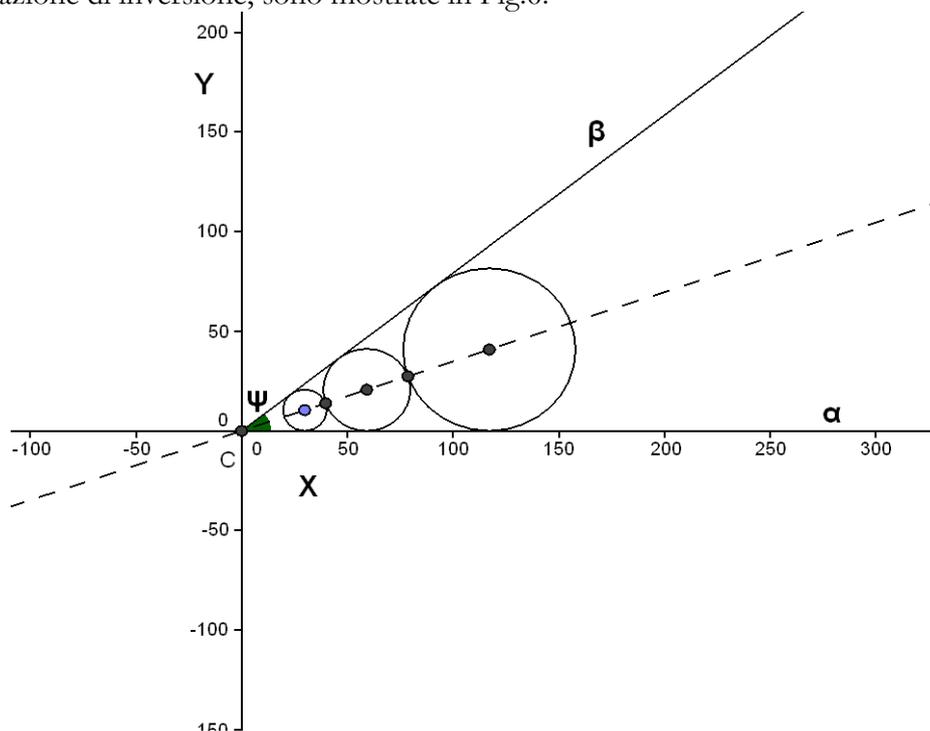


Fig.6: Catena di cerchi nel sistema cartesiano XY.

E' facile vedere che esistono semplici relazioni tra le coordinate dei centri (X_i, Y_i) e raggio r_i' del generico cerchio i-esimo con quelle di un arbitrario cerchio iniziale individuato mediante l'indice 0 cioè:

$$X_i = \left(\frac{1 - \sin \frac{\psi}{2}}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} \right)^i X_0 = K^i X_0 \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11)$$

$$Y_i = \left(\frac{1 - \sin \frac{\psi}{2}}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} \right)^i Y_0 = K^i Y_0 \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (12)$$

$$r_i' = \left(\frac{1 - \sin \frac{\psi}{2}}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} \right)^i r_0' = K^i r_0' \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13)$$

$$r'_0 = Y_0 = X_0 \tan \frac{\psi}{2} \quad (14)$$

essendo ψ l'angolo tra le rette α' e β' .

Per il seguito è necessario conoscere le espressioni delle rette α' e β' e del cerchio γ ; in particolare, si può notare che la retta α' è l'asse radicale dei cerchi α e γ mentre la retta β' è l'asse radicale dei cerchi β e γ rispettivamente.

L'equazione del cerchio γ è:

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 - b^2}{D}x + \frac{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{D}y - \frac{6D^2a^2 - 4(a^2 - b^2)^2 + 6b^2D^2 - 3D^4}{4D^2} = 0 \quad (15)$$

mentre le equazioni di α' e β' sono rispettivamente:

$$y = \frac{a^2 - b^2 + D^2}{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}x + \frac{-2(a^2 - b^2)^2 + a^2D^2 + 3b^2D^2 - D^4}{2D\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}} \quad (16)$$

$$y = \frac{a^2 - b^2 - D^2}{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}x + \frac{-2(a^2 - b^2)^2 + 3a^2D^2 + b^2D^2 - D^4}{2D\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}} \quad (17)$$

Ora, determineremo dapprima le espressioni delle coordinate dei centri e dei raggi delle immagini inverse e quindi le trasformeremo, in accordo con le formule per l'inversione circolare [4], per trovare le relazioni che stiamo cercando.

Per ragioni di brevità e di spazio, presentiamo solo i passaggi ed i risultati fondamentali.

Come precedentemente, suddividiamo i risultati distinguendo il caso della lente da quello della lunula.

A. Formule per la lente

Partendo dalle formule (16) e (17), è possibile determinare $\tan(\psi)$ e quindi possiamo dedurre:

$$\tan \frac{\psi}{2} = \frac{(a+b)^2 - D^2}{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}} \quad (18)$$

$$K = \frac{1 - \sin \frac{\psi}{2}}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} = \frac{1 - \sqrt{\frac{(a+b)^2 - D^2}{4ab}}}{1 + \sqrt{\frac{(a+b)^2 - D^2}{4ab}}} \quad (19)$$

Sempre partendo dalle formule (16) e (17) è possibile ottenere le espressioni dei coseni direttori delle rette α' e β' ; infatti, per mezzo di tali espressioni, possiamo scrivere le formule di roto-traslazione atte a trasformare le coordinate dei centri (11) e (12) dal sistema di riferimento ausiliario XY al sistema di riferimento principale xy.

Così, le coordinate dei centri delle immagini inverse sono:

$$x'_i = -\frac{K^i}{D}(a-b)r'_0 + \frac{a^2 - b^2}{2D} \quad (20)$$

$$y'_i = \frac{K^i(a+b)}{D}r'_0 \frac{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{(a+b)^2 - D^2} + \frac{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} \quad (21)$$

Tenendo conto della (13) e della (19), il raggio r'_i è dato da:

$$r'_i = \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{(a+b)^2 - D^2}{4ab}}}{1 + \sqrt{\frac{(a+b)^2 - D^2}{4ab}}} \right)^i r'_0 \quad (22)$$

Infine, invertendo le (20), (21) e (22), si ottiene:

$$x_i = \frac{a^2 - b^2}{2D} + \frac{-\frac{K^i(a-b)}{D} r'_0}{-\frac{K^{2i} r_0'^2}{(a+b)^2 - D^2} + \left(\frac{K^i(a+b)r'_0}{(a+b)^2 - D^2} + 1 \right)^2} \quad (23)$$

$$y_i = -\frac{\sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} + \frac{\frac{K^i(a+b)r'_0}{D} \sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2} + \sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{-\frac{K^{2i} r_0'^2}{(a+b)^2 - D^2} + \left(\frac{K^i(a+b)r'_0}{(a+b)^2 - D^2} + 1 \right)^2} \quad (24)$$

$$r_i = \left| \frac{1}{-\frac{K^{2i} r_0'^2}{(a+b)^2 - D^2} + \left(\frac{K^i(a+b)r'_0}{(a+b)^2 - D^2} + 1 \right)^2} \right| K^i r'_0 \quad (25)$$

B. Formule per la lunula

In questo caso, ci si deve ricordare che le immagini inverse non sono contenute nell'area appartenente all'angolo ψ ma in quella appartenente all'angolo supplementare. (Si confrontino le Fig.5a e 5b); pertanto, abbiamo:

$$\tan\left(\frac{\pi - \psi}{2}\right) = \frac{\sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{(a+b)^2 - D^2} \quad (26)$$

$$K = \frac{1 - \sin\frac{\pi - \psi}{2}}{1 + \sin\frac{\pi - \psi}{2}} = \frac{1 - \sqrt{\frac{D^2 - (a-b)^2}{4ab}}}{1 + \sqrt{\frac{D^2 - (a-b)^2}{4ab}}} \quad (27)$$

$$x'_i = \frac{K^i}{D} (a+b)r'_0 + \frac{a^2 - b^2}{2D} \quad (28)$$

$$y'_i = \frac{K^i(a-b)}{D} r'_0 \frac{(a+b)^2 - D^2}{\sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}} + \frac{\sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} \quad (29)$$

$$r'_i = \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{D^2 - (a-b)^2}{4ab}}}{1 + \sqrt{\frac{D^2 - (a-b)^2}{4ab}}} \right)^i r'_0 \quad (30)$$

Infine, invertendo le (28), (29) e (30), si ottiene:

$$x_i = \frac{a^2 - b^2}{2D} + \frac{\frac{K^i(a+b)}{D} r'_0}{\frac{K^{2i} r_0'^2}{D^2 - (a-b)^2} + \left(\frac{K^i(a-b)r'_0}{D^2 - (a-b)^2} + 1 \right)^2} \quad (31)$$

$$y_i = -\frac{\sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} + \frac{\frac{K^i(a-b)r'_0}{D} \sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2} + \frac{\sqrt{4D^2 a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{D}}{\frac{K^{2i} r_0'^2}{D^2 - (a-b)^2} + \left(\frac{K^i(a-b)r'_0}{D^2 - (a-b)^2} + 1 \right)^2} \quad (32)$$

$$r_i = \left| \frac{1}{\frac{K^{2i} r_0'^2}{D^2 - (a-b)^2} + \left(\frac{K^i(a-b)r'_0}{D^2 - (a-b)^2} + 1 \right)^2} \right| K^i r'_0 \quad (33)$$

Le formule (23), (24), (25) e (31), (32), (33) sono espresse in funzione del raggio r'_0 dell'immagine inversiva del primo cerchio della catena; in Appendice si può trovare la formula che mette in relazione r_0 ed r'_0 .

4. Luogo dei punti di tangenza

In questo paragrafo, mostriamo un'altra proprietà relativa ai punti di tangenza tra i cerchi delle catene. Tutti i punti di tangenza tra due cerchi consecutivi di una catena, appartengono ad un medesimo cerchio avente raggio R_t e coordinate del centro (x_t, y_t) le cui espressioni, nel caso della lente, sono date da:

$$R_t = \sqrt{\frac{ab[D^2 - (a-b)^2]}{(a-b)^2}} \quad (34)$$

$$(x_t, y_t) = \left(\frac{D}{2} \frac{a+b}{a-b}, 0 \right) \quad (35)$$

Nel caso della lunula, esse sono date da:

$$R_t = \sqrt{\frac{ab[(a+b)^2 - D^2]}{(a+b)^2}} \quad (36)$$

$$(x_t, y_t) = \left(\frac{D}{2} \frac{a-b}{a+b}, 0 \right) \quad (37)$$

Si vedano le Fig. 7a e 7b.

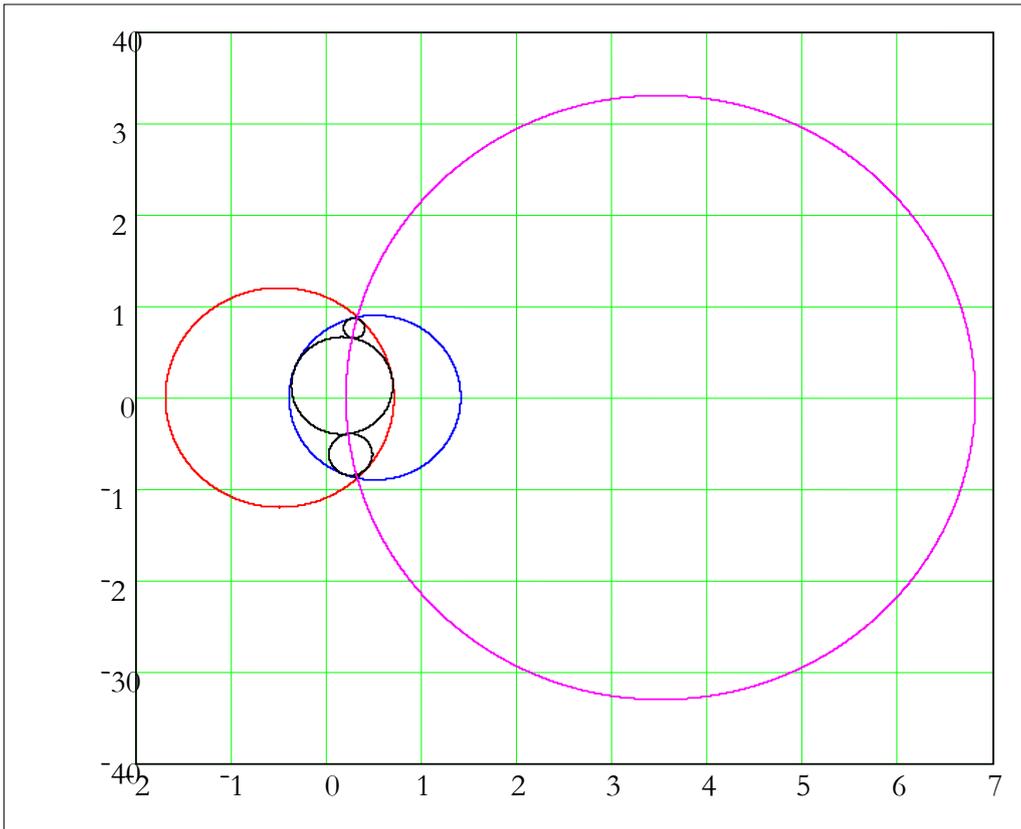


Fig.7a: Luogo dei punti di tangenza; catena di cerchi all'interno di una lente.

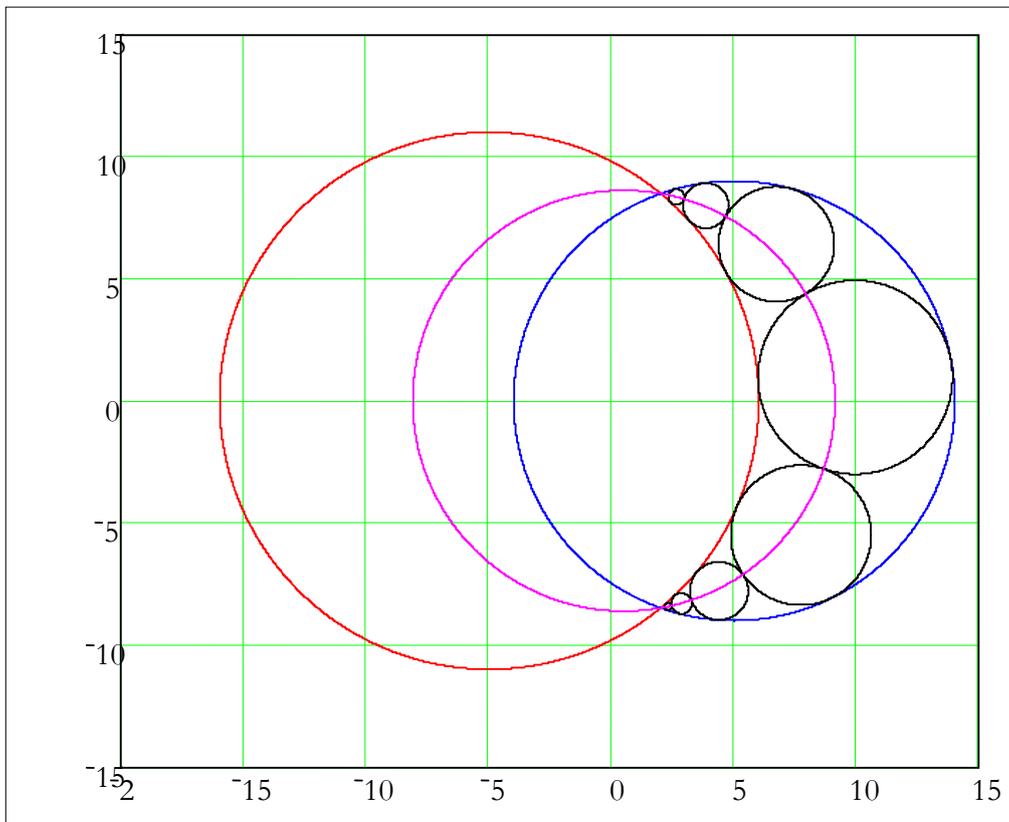


Fig.7b: Luogo dei punti di tangenza; catena di cerchi all'interno di una lunula.

Al fine di provare la (34) e la (35), è conveniente ricordare che l'inversione circolare conserva la tangenza tra differenti curve dopo la trasformazione. Guardando Fig.6, vediamo che tutti i punti di tangenza appartengono alla bisettrice dell'angolo ψ . Tale bisettrice ha equazione:

$$y = \frac{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2} (a+b)}{(a-b)[D^2 - (a+b)^2]} x + \frac{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} \frac{D^2 - 2(a+b)^2}{D^2 - (a+b)} \quad (38)$$

L'inversione circolare di tale bisettrice (rispetto al cerchio γ) è il cerchio che stiamo cercando avente equazione:

$$x^2 + y^2 - D \frac{a+b}{a-b} x + \frac{D^2 + 4ab}{4} = 0 \quad (39)$$

da cui si ricavano la (34) e la (35).

In maniera analoga possono essere provate le formule relative alla lunula, cioè la (36) e la (37).

In questo caso, si deve considerare l'angolo supplementare di ψ avente bisettrice data da:

$$y = -\frac{(a-b)[D^2 - (a+b)^2]}{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2} (a+b)} x + \frac{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} \frac{D^2 - 2(a+b)^2}{D^2 - (a+b)} \quad (40)$$

La sua immagine secondo inversione circolare (rispetto al cerchio γ) è il cerchio avente equazione:

$$x^2 + y^2 - D \frac{a-b}{a+b} x + \frac{D^2 - 4ab}{4} = 0 \quad (41)$$

da cui si ricavano la (36) e la (37).

5. Conclusioni

Abbiamo studiato le catene infinite di cerchi che possono formarsi all'interno delle differenti e duali regioni generate dall'intersezione di due cerchi; cioè lenti e lunule. Tale dualità si riflette nelle formule e nelle proprietà geometriche caratterizzanti le catene.

Appendice

Il primo cerchio della catena individuato mediante l'indice 0 ha ordinata del centro y_0 che può essere scelta arbitrariamente purché sia soddisfatta la seguente condizione:

$$-\frac{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} < y_0 < \frac{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D} \quad (A1)$$

La corrispondente ascissa del centro $x_0 = x(y_0)$ può essere calcolata per mezzo della formula (8) o per mezzo della (10) rispettivamente nel caso della lente e della lunula.

Il raggio $r_0 = r(y_0)$ è calcolato per mezzo della (6) o della (9) rispettivamente nel caso della lente o della lunula. Una volta determinato r_0 , il raggio r'_0 dell'immagine inversiva del primo cerchio (che appare nelle formule (23), (24), (25) e (31), (32), (33)) è dato da:

$$r'_0 = \left| \frac{\frac{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}{D^2}}{\left(x_0 - \frac{a^2 - b^2}{2D}\right)^2 + \left(y_0 + \frac{\sqrt{4D^2a^2 - (a^2 - b^2 + D^2)^2}}{2D}\right)^2 - r_0^2} \right| r_0 \quad (A2)$$

Bibliografia

Weisstein, Eric W. "Steiner Chain." From *MathWorld*, A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/SteinerChain.html>

van Lamoen, Floor and Weisstein, Eric W. "Pappus Chain." From *MathWorld*, A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/PappusChain.html>

H. Tahir. "On the point of contact in infinite chains", *Gazette of the Australian Mathematical Society*, vol. 33 n.4 2006, p.307-315.

Weisstein, Eric W. "Inversion." From *MathWorld*, A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/Inversion.html>