171. Simmetrie e risoluzione di problemi di minimo e massimo per mezzo della geometria elementare

di Alfino Grasso

Introduzione

La simmetria bilaterale è presente nell'Universo sin dai primordi: particelle e antiparticelle, etc. Dopo circa 300.000 anni dal *Big Bang* emerse la luce la cui riflessione è strettamente legata alla simmetria. Questa è frequente nel campo microscopico e in quello macroscopico e nei mondi minerale, vegetale e animale, in quest'ultimo in particolare: ciò significa che nell'evoluzione e nella selezione naturale essa è risultata una strategia vincente.
Inoltre, la simmetria bilaterale (e quella centrale che da essa deriva) ha affascinato l'uomo sin dai suoi albori, come testimoniano i numerosi graffiti lasciati dai popoli primitivi in ogni dove, e come possiamo ammirare nelle creazioni artistiche delle diverse civiltà, da quelle egizie e babilonesi fino a oggi, diventando addirittura canone estetico.
Archimede, nell'*Equilibrio dei piani,* l'ha posta come assioma da cui ha dedotto le leggi della leva.
La simmetria, nel senso più generale di trasformazione che lascia invariata una figura rispetto a certe caratteristiche, costituiscono un formidabile strumento in fisica. Di particolare rilievo i gruppi di *simmetrie*, su cui si fondano la ricerca e lo studio delle *particelle elementari*, delle *forze fondamentali* e dell'*unificazione di queste*.
La poetessa Anna Wickham (1884-1947) in *The Contemplative Quarry*, così invoca la divinità:

> «Oh Tu Signore, Somma Simmetria…
> Dammi, o Signore, una cosa perfetta».

Dal 1932 sono stati pubblicati diversi testi (Birkchoff, Mac_Lane, Papy, Bachmann, Choquet, Krygowska, Morin, Lombardo-Radice e Mancini Proia, Prodi, Lupo e altri) nei quali vengono presentati in forma didattica:

- Un'assiomatica (a volte sottintesa) intuitiva, semplice e forte.
  Intuitiva: cioè che espone proprietà che si riferiscono all'esperienza comune.
  Semplice: nel senso che si utilizza in modo naturale, diretto.
  Forte: che consente accesso immediato anche a proprietà nascoste.
- L'uso delle trasformazioni, della simmetria in particolare, come metodo fondamentale di ricerca e dimostrazione delle proprietà.

L'importanza delle trasformazioni in genere, le simmetrie e le traslazioni e rotazioni (che di quelle sono "prodotto"), è evidenziata sia negli OBIETTIVI delle LINEE GENERALI e negli OBIETTIVI SPECIFICI DEL PRIMO BIENNIO dei Programmi ministeriali di Matematica.
Espongo ora una proposta didattica che presenta interessanti applicazioni della simmetria.

La riflessione della luce

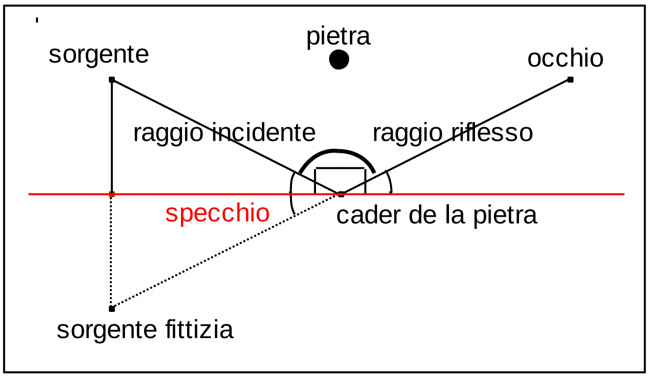
Dopo questa introduzione, torniamo alla riflessione della luce che è fortemente legata alla *simmetria bilaterale*, detta per ciò anche *speculare*.
Nei millenni l'umanità ha sperimentato il fenomeno mediante le immagini di oggetti rispecchiati da una qualsiasi superficie riflettente, un corso d'acqua o uno stagno (*Narciso* di Caravaggio), un pezzo di vetro, una lamina di metallo ben lucidato, uno specchio.
In qualunque direzione si guardi verso una superficie riflettente – uno specchio per esempio – si nota che è come se le immagini degli oggetti "provenissero" da dietro lo specchio in modo che:

- le distanze tra "punti" – per esempio la distanza delle immagini dei vostri occhi è la stessa di quella dei vostri occhi nella realtà;
- gli angoli formati dal gomito nell'immagine e nel vostro corpo, hanno la stessa ampiezza.

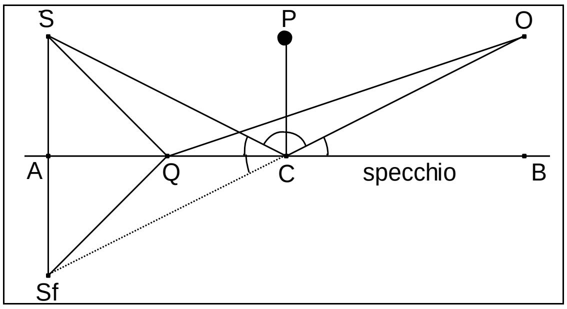
Di questa esperienza, comune e importante per l'uomo, è istruttivo presentare innanzitutto quella espressa in forma poetica nel canto XV del Purgatorio della *Commedia* di Dante.

Come quando da l'acqua o da lo specchio
Salta lo raggio a l'opposita parte,
salendo su per lo modo parecchio
a quel che scende, e tanto si diparte
dal cader della pietra in igual tratta,
sì come mostra esperienza e arte;
così mi parve da luce rifratta
quivi dinanzi a me esser percosso;
per che a fuggir la mia vista fu ratta.

Come quando un raggio di luce (riflesso) dall'acqua o dallo specchio salta alla parte opposta, salendo con un angolo di riflessione pari a quello d'incidenza, e quanto dalla perpendicolare si scosta scendendo, altrettanto se ne allontana salendo, come dimostrano l'esperienza e l'arte (arte significa scienza); così mi sembrò di essere colpito in viso da una luce riflessa; per cui distolsi rapidamente lo sguardo.



I versi del Poeta descrivono il fenomeno della riflessione della luce non solo in modo poeticamente suggestivo ma anche scientificamente corretto, e danno della perpendicolare da un punto a una retta un'immagine di straordinaria efficacia intuitiva: "il cader de la pietra".
Tutti abbiamo notato che è come se ci fosse dietro lo specchio una "*sorgente fittizia*", tale che le distanze della "*sorgente fittizia*" e di quella reale dallo specchio sono uguali. Inoltre gli angoli formati dal raggio incidente e da quello "fittizio" con lo specchio hanno stessa ampiezza e quindi il percorso spezzato del raggio luminoso *sorgente-cader de la pietra- occhio, si trasforma nel tragitto rettilineo "sorgente fittizia"- cader de la pietra – occhio*, che è di uguale lunghezza del precedente.

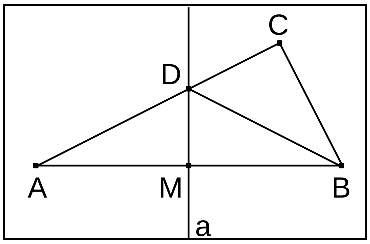


Ciò consente di capire il comportamento della luce. Per renderlo più chiaro ci serviamo del grafico a fianco, in cui le lettere usate si riferiscono alla figura precedente, tranne il punto **Q** che sta sullo specchio ma è diverso da **C**. È come se *la luce "annusasse" i percorsi e scegliesse quello più economico, più breve* ("La Natura è economica" afferma Leonardo).
Chiariamo il significato del corsivo precedente. Se il raggio luminoso per andare da **S** a **O** si riflettesse in **Q**, farebbe il tragitto $\overline{SQ}+\overline{QO}$ ma, per quanto sopra osservato, $\overline{SQ}=\overline{S_fQ}$ e quindi il cammino della luce sarebbe $\overline{S_fQ}+\overline{QO}$ che è *maggiore* del percorso rettilineo $\overline{S_fO}=\overline{SC}+\overline{CO}$, essendo quello rettilineo il tragitto più breve *in forza della proprietà triangolare*, che è "*naturale*".
Possiamo affermare allora che la simmetria speculare ci permette di trasformare "un tragitto spezzato" in uno rettilineo di uguale lunghezza che è più facile confrontare con altri percorsi.
Tali considerazioni di carattere intuitivo vengono formalizzate dall'assioma di simmetria.
Data nel piano una retta *a*, diciamo simmetria di asse *a*, l'isometria tale che:

- tutti i punti di *a* sono uniti, (si dice pure che la retta *a* è luogo di punti uniti).
- ogni punto di uno dei semipiani aperti determinati da *a* si trasforma in un punto del semipiano aperto opposto.

Problemi risolvibili con le simmetrie

L'acquisizione di un metodo per la risoluzione di problemi è fondamentale in ogni attività umana. E la necessità di risolvere problemi di minimo e massimo ha dato uno straordinario impulso per l'invenzione del calcolo differenziale, mediante cui essi si possono risolvere.
La simmetria consente di affrontarne e risolverne di significativi mediante la geometria elementare. E' opportuno quindi proporli sin dalle prime classi per stimolare l'interesse e la creatività dei giovani e permettere loro di costruirsi un modo corretto di ragionare le sollecitazioni che la risoluzione dei problemi propone.
Al fine di rendere più esauriente la comprensione delle argomentazioni successive è bene riprendere l'asse di simmetria di un segmento e proporne un'interessante rivisitazione in vista della risoluzione dei problemi presentati, che vanno inseriti in modo opportuno nel progetto didattico.
Sia **C** un punto di uno dei semipiani aperti determinati dall'asse **a** di un segmento **AB** di punto medio **M** (nella figura **C** sta nel semipiano individuato da **B** ma **C**, per la simmetria della costruzione, può appartenere nel semipiano opposto): $\overline{AC}>\overline{BC}$.

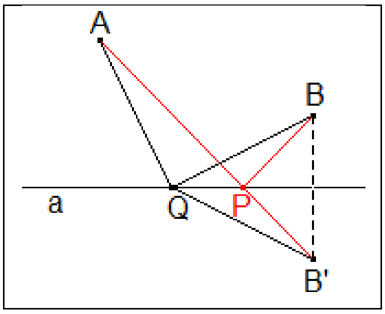


Infatti: il segmento **AC** interseca l'asse, in **D** (**A** e **C** appartengono a semipiani aperti opposti rispetto ad **a**), ed essendo **D** punto unito nella simmetria rispetto ad **a**, s_a, $\overline{AD}=\overline{BD}$; per la proprietà triangolare: $\overline{BC}<\overline{BD}+\overline{DC}$ quindi $\overline{BC}<\overline{AD}+\overline{DC}$, cioè $\overline{BC}<\overline{AC}$.
In conclusione: *un punto appartenente a uno dei semipiani aperti determinati dall'asse di un segmento, ha distanza minore dall'estremo che sta nello stesso semipiano rispetto a quello che è nel semipiano opposto.*

Osserviamo innanzitutto che *è opportuno utilizzare*, come suggeriscono le LINEE GENERALI, *software dinamici* poiché, prospettando questi più di una posizione degli oggetti geometrici in esame, aiutano i giovani a superare l'idea (errata) che il disegno fatto sul foglio sia dato una volta per tutte. Inoltre è didatticamente opportuno *prospettare situazioni concrete che si possono matematizzare mediante schemi geometrici* e *coinvolgere i giovani nella realizzazione del procedimento*, sia per renderli attori del loro apprendimento, sia perché in tale modo sono "costretti" a *richiamare concetti appresi* e a *suggerire procedimenti per la soluzione.*
Ricordiamo che nella geometria moderna le figure sono classificate mediante le loro simmetrie.

Problema 1
Dati una retta e due punti generici appartenenti a uno stesso semipiano rispetto a essa, trovare il percorso più breve che li congiunge dovendo toccare la retta.

Prerequisiti: simmetria assiale, proprietà di partizione, proprietà triangolare.
Si può presentare la situazione mediante il seguente problema tratto dal mondo reale.
In una zona pianeggiante c'è un lungo tratto rettilineo di un'autostrada a. Si deve costruire un casello che serva due cittadine A e B, che sono dalla stessa parte rispetto a. In quale punto P di a deve essere realizzato il casello affinché la somma dei tragitti rettilinei $\overline{AP}$ + $\overline{PB}$ *sia la più breve, quindi la più economica?*



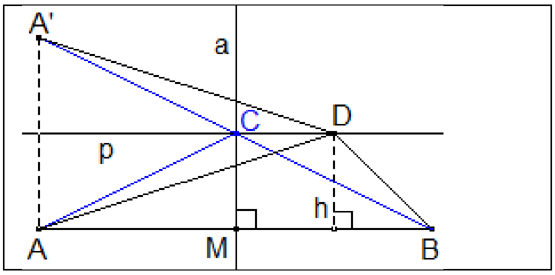
Utilizziamo l'osservazione precedente e ricordiamo che la simmetria assiale è un'isometria e quindi conserva invariate lunghezze e ampiezze. Consideriamo l'associato di A o di B - in figura B' di B - nella simmetria s_a di asse a; tracciamo il segmento AB', che interseca a nel punto P (A e B' stanno in semipiani opposti rispetto ad a) che è quindi unito in s_a, allora $\overline{PB'} = \overline{PB}$; da ciò $\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB'} = \overline{AB'}$ e, per la transitiva dell'uguaglianza,

$$(*) \quad \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB'}$$

Scelto allora su a un qualunque punto Q diverso da P, confrontiamo $\overline{AQ} + \overline{QB}$, con $\overline{AP} + \overline{PB}$ cioè con $\overline{AB'}$ in virtù della (*). Poiché QB' è simmetrico di QB in s_a, $\overline{QB'} = \overline{QB}$ e di conseguenza $\overline{AQ} + \overline{QB} = \overline{AQ} + \overline{QB'}$; ma, per la proprietà triangolare, $\overline{AB'} < \overline{AQ} + \overline{QB'}$ e quindi dalla (*) segue infine $\overline{AP} + \overline{PB} < \overline{AQ} + \overline{QB}$.
Il percorso minimo da A a B, dovendo toccare a è determinato dal punto P intersezione dell'asse di a con il segmento AB', con B' simmetrico di B rispetto ad a.
Questo problema è noto dall'antichità come problema di Erone (matematico alessandrino del I-II secolo d.C.). Esso, come abbiamo visto, descrive il comportamento della luce quando si riflette.

Problema 2
Fra i triangoli che hanno assegnati un lato e l'area $\boldsymbol{A_s}$*, trovare quello di perimetro minimo.*

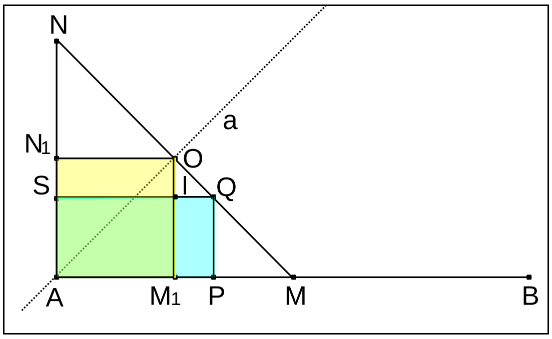
Scelto come base il lato - sia **AB** di misura **b** - è immediato ottenerne l'altezza relativa $\mathbf{h=A_s/b}$.
Detto π_1 uno dei semipiani individuati dalla retta **AB** (figura), il terzo vertice **D** di uno dei nostri triangoli deve avere distanza **h** dalla retta **AB**, quindi varia sulla retta **p** di π_1, parallela ad **AB** e a distanza **h** da questa. Dobbiamo trovare, al variare di **D**, il triangolo **ABD** di perimetro minimo. Osserviamo innanzitutto che la situazione è simmetrica rispetto all'asse **a** del segmento **AB**. Inoltre, detto **C** il punto comune ad **a** e **p**, se **D** si allontana da **C**, si "vede" che $\overline{AD} + \overline{DB}$, quindi il perimetro di **ABD** aumenta. Proviamo che **C** è il punto cercato.



Il problema ci richiama quello precedente. Usiamo allora la simmetria di asse **p**, $\mathbf{s_p}$ e costruiamo l'associato **A'** di **A** (o **B'** di **B**) in $\mathbf{s_p}$: $\overline{A'C} = \overline{AC}$ per simmetria, quindi (*) $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{A'B}$; ma, per la proprietà triangolare, $\overline{A'B} < \overline{A'D} + \overline{DB}$, qualunque **D** su **p** diverso da **C**. Ed essendo anche $\overline{A'D} = \overline{AD}$, perché lunghezze di segmenti anch'essi simmetrici rispetto a **p**, $\overline{A'B} < \overline{AD} + \overline{DB}$; dalla (*) si ha infine: $\overline{AC} + \overline{CB} < \overline{AD} + \overline{DB}$.
Allora: Fra i triangoli che hanno un lato e l'area assegnati, ha perimetro minimo quello isoscele.

Nota. Quanto provato assicura che: se esistono in π_1 punti la somma delle cui distanze da **A** e **B** è uguale ad $\overline{AC}+\overline{CB}$, essi sono interni alla striscia di piano individuata dalle rette **p** e **AB**.

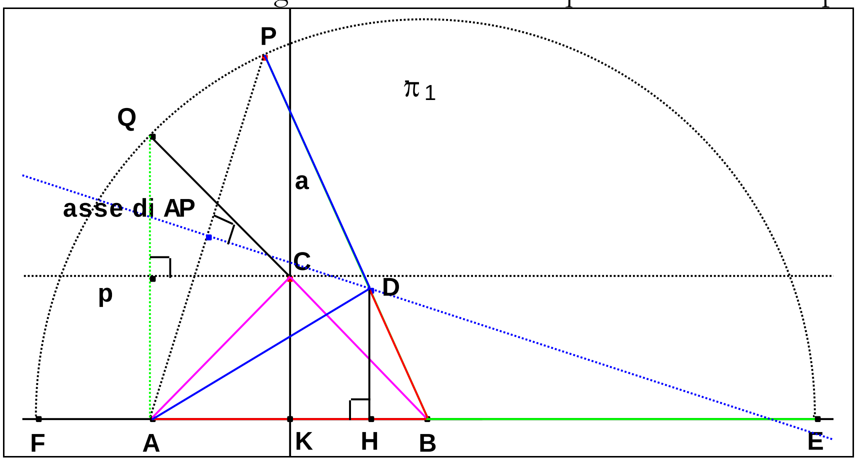
Problema 3
Determinare il rettangolo di superficie massima fra quelli di uguale perimetro.



Prerequisiti: punto medio, rettangolo, perimetro, triangolo isoscele, quadrato.
Osserviamo innanzitutto che il problema è simmetrico rispetto a due lati consecutivi, perché il perimetro di un rettangolo è il doppio della loro somma, nella quale sono quindi interscambiabili.
Detto AB un segmento che rappresenta il perimetro di un rettangolo (figura), basta allora considerare il segmento AM, con M punto medio di AB o, per la simmetria osservata, col segmento AN perpendicolare ad AM e a esso isometrico.
Il triangolo AMN, oltre che rettangolo, è isoscele sulla base MN, quindi ha un asse di simmetria a nella retta AO, con O punto medio di MN, in cui M ed N si corrispondono. Preso ora un punto P di AM (o di AN), costruiamo il rettangolo R=APQS, che ha per lati consecutivi AP e PQ, con Q intersezione di MN con la perpendicolare per P ad AM ed S su AN.
Al variare di P si modifica la superficie di R, che diminuisce se P si avvicina ad A o a M, mentre aumenta se P è prossimo al punto medio M_1 di AM e quindi se Q è vicino a O ed S a N_1 punto medio di AN. La simmetria della situazione suggerisce di confrontare la superficie di APQS con quella di AM_1ON_1 che risulta un quadrato, poiché è un rettangolo con due lati consecutivi AM_1 e AN_1 isometrici perché simmetrici rispetto ad a.
Se indichiamo ora con I l'intersezione di SQ con OM_1, R e AM_1ON_1 hanno in comune il rettangolo AM_1IS: basta allora provare che M_1PQI ha superficie minore di quella del rettangolo $SION_1$. Infatti, il triangolo OIQ, è rettangolo in I e isoscele sulla base OQ, con IO e IQ isometrici, poiché per costruzione OIQ ha gli angoli ordinatamente isometrici ad AMN. Allora AM_1ON_1 e APQS hanno basi isometriche IQ e IO; ed essendo $IM_1<ON_1$ e ON_1 isometrico con OM_1, per le altezze si ha $IM_1<OM_1$.
Allora: Fra i rettangoli di uguale perimetro, quello di superficie massima è il quadrato.

Problema 4
Trovare il triangolo di area massima fra quelli che hanno un lato e il perimetro assegnati.

Prerequisiti: simmetria assiale, proprietà triangolare, altezza, perimetro e area di un triangolo.
Consideriamo un segmento **AE** uguale al perimetro di uno dei triangoli e sia **M** il suo punto medio. Sia poi **B** un punto interno al segmento **AM**; la proprietà triangolare assicura che esistono triangoli che hanno **AB** come lato e la cui somma degli altri lati è **BE>AB**: quindi soddisfano le ipotesi.



Per costruire uno dei triangoli dobbiamo determinare, in uno dei semipiani determinati da **AE** – π_1 - il terzo vertice **D** tale che $\overline{AD}+\overline{DB}=\overline{AE}$. A tale scopo realizziamo in π_1 la semicirconferenza γ di raggio $\overline{BE}$ e sia **F** l'intersezione di γ con la retta **AB**. Preso allora su γ un punto **P**, dobbiamo trovare sul segmento **BP** un punto **D** equidistante da **A** e **P**. Il punto **D** cercato è così l'intersezione di **BP** con l'asse **d** del segmento **AP**: invero, $\overline{AD}=\overline{BP}$, quindi $\overline{AD}+\overline{DB}=\overline{PD}+\overline{DB}=\overline{BE}$.
Al variare di **P** su γ, cambia l'altezza **DH** del triangolo **ABD** relativa alla base **AB** e s'intuisce che **DH** cresce man mano che **P** si allontana da **E** ed **F** e sembra massima se **H** coincide col punto medio **K** di **AB**; in tale caso **D**≡**C** per cui $\overline{CA}=\overline{CB}$ e **P**≡**Q** simmetrico di **A** rispetto alla retta **p** per **C** parallela alla retta **AB**.
L'osservazione successiva al problema 2 ci consente di provare quanto intuito. Per mezzo di essa, infatti, il punto **D** in una posizione generica deve essere interno alla striscia di piano determinata dalle rette **AB** e **p**, allora l'altezza del nostro triangolo, quindi la sua area, è massima se **ABD** coincide col triangolo isoscele **ABC**.
Abbiamo dunque provato che: il triangolo di area massima fra quelli che hanno un lato e il perimetro assegnati è quello che possiede un asse di simmetria, cioè il triangolo isoscele.

Nota
La costruzione eseguita dà un procedimento semplice per realizzare un'ellisse dati i fuochi **A** e **B**, se si fa variare **P** su una circonferenza di centro **B** e raggio **r** > $\overline{AB}$.