172. Attraversamento di un fiume

Stefano Borgogni
stfbrg@rocketmail.com

Sunto

Questo articolo analizza i problemi di attraversamento di un fiume con una barca e una serie di vincoli, il cui caso più semplice è costituito dal notissimo indovinello del contadino con lupo, capra e cavolo. Si esamineranno i problemi di questa tipologia, indicando un procedimento utile per trovare una soluzione generale, indipendentemente dal numero di attori coinvolti e dai vincoli assegnati.

Introduzione

Chi non conosce l'indovinello del contadino che deve attraversare il fiume su una barchetta con un lupo, una capra e un cavolo evitando "banchetti" indesiderati?
Si tratta di un gioco talmente noto che non vale nemmeno la pena di spiegarlo nei dettagli. Esso è, però, soltanto la versione più semplice di una quantità di altri problemi molto simili tra loro, fatta salva l'identità dei protagonisti, che può variare di volta in volta.
Il caso più noto è certamente quello conosciuto come "Missionari e cannibali". Come nell'indovinello del contadino non possono stare su una stessa sponda lupo e capra o capra e cavolo, poiché uno mangerebbe l'altro (si suppone che il lupo non ami la dieta vegetariana e, dunque, disdegni il cavolo), nel nostro caso succede qualcosa di simile: se su una riva i cannibali sono in maggioranza, prendono il sopravvento sui missionari e li divorano.
Una variante sul tema, in realtà assai più antica rispetto a "Missionari e cannibali", è quella dei "Mariti gelosi"[1]: N coppie sposate devono passare il fiume, ma nessuna donna può stare in compagnia di un uomo se il marito non è presente. In altre parole, su ogni sponda gli uomini non possono superare numericamente le donne (se così fosse, ce ne sarebbe almeno una senza marito), pertanto il quesito equivale nella sostanza a quello base.
Che si tratti di missionari o di persone gelose, l'altra importante condizione che deve essere definita riguarda il numero massimo di persone che la barca può trasportare. Si tratta di un elemento che - come si vedrà - influenza in maniera significativa le possibilità stessa di soluzione del problema.
Talvolta viene dato un ulteriore vincolo sul numero di coloro che sanno condurre la barca (è, implicitamente, il caso del contadino), oppure si prevede l'esistenza di un'isola intermedia tra le due rive del fiume. Per brevità, nel presente studio non saranno trattate tali situazioni.
Dunque, le variazioni sul tema sono numerose ed è lecito chiedersi se sia possibile, anziché risolvere singolarmente ogni caso, cercare un procedimento in grado di fornire una soluzione generale al problema.
Il grande divulgatore di matematica ricreativa Martin Gardner - tra gli innumerevoli argomenti di cui si è occupato - ha esaminato anche l'attraversamento del fiume, segnalando un procedimento che permette di affrontare la questione in modo da rendere piuttosto agevole la ricerca della/e soluzione/i.
Nel prosieguo dell'articolo si cercherà di spiegare tale procedimento nella maniera più chiara possibile.

Una questione di grafi

Come spesso accade con gli indovinelli raccolti e riproposti da Martin Gardner, la chiave sta nel rappresentare i dati e i vincoli assegnati con uno schema opportuno, per poi utilizzare un procedimento preso da una delle tante branche della matematica.

[1] La prima comparsa del problema risale addirittura alle *Propositiones ad juvenes acuendos* opera attribuita ad Alcuino (morto nell'804); si parla di fratelli anziché di mariti, ma la situazione è del tutto analoga.

In questo caso, come si vedrà tra breve, ci viene in aiuto la teoria dei grafi.
Lasciando da parte l'indovinello del contadino, che è piuttosto banale, esaminiamo il caso in cui devono attraversare il fiume N missionari e N cannibali.
Partiamo considerando che su ogni sponda del fiume possono trovarsi da 0 a N attori per ciascuna tipologia: vi sono, dunque, (N+1)*(N+1) "stati" possibili.
A questo punto, bisogna eliminare quelli inaccettabili sulla base delle regole (in questo caso quelli in cui i cannibali sono in maggioranza su una delle due sponde) e verificare se sia possibile collegare gli stati accettabili in modo da passare dalla situazione "N;N" (tutti sulla sponda di partenza) a quella "0;0" (tutti sulla sponda opposta).
Più in particolare, il procedimento consiste in tre passaggi fondamentali:

1) Disegnare una matrice quadrata N+1xN+1 e marcare con un punto le caselle che rappresentano stati accettabili (non, ad esempio, 2;1 o 2;3).
2) Collegare i punti con linee che indichino tutte le possibili transizioni tra uno stato accettabile e un altro in base ai vincoli iniziali sul carico massimo della barca. Si ottiene così un primo grafo non orientato.
3) Aggiungere le frecce che indicano la direzione di ciascun passaggio da uno stato all'altro, in modo da arrivare al grafo orientato finale, costruito tenendo conto che il cammino deve osservare due regole:
   - partire dal punto N;N (all'estrema destra in alto) e, attraverso una serie di passi successivi, terminare nel punto 0;0 (a sinistra in basso).
   - alternare movimenti verso il basso e/o la sinistra con movimenti verso l'alto e/o la destra, il che rappresenta l'alternarsi dei viaggi dall'una all'altra sponda).

Un esempio pratico

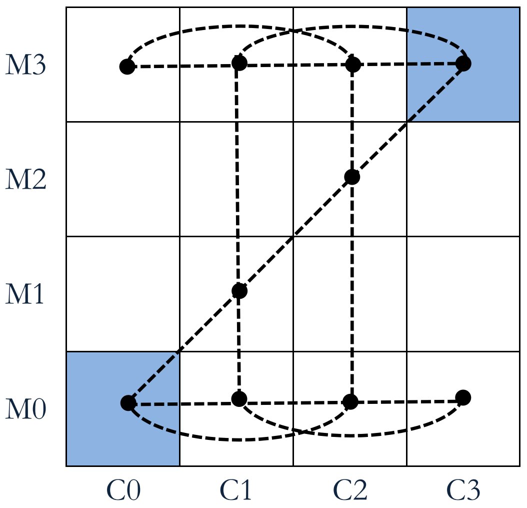
Come esempio, si può provare ad applicare la procedura suddetta a un caso specifico: quello di tre missionari, tre cannibali e una barca che può portare non più di due passeggeri.
I missionari (M) sono rappresentati sull'asse verticale e i cannibali (C) su quello orizzontale.

Fase 1 - Indicare gli stati accettabili

M3	*	*	*	*
M2			*	
M1		*		
M0	*	*	*	*
	C0	C1	C2	C3

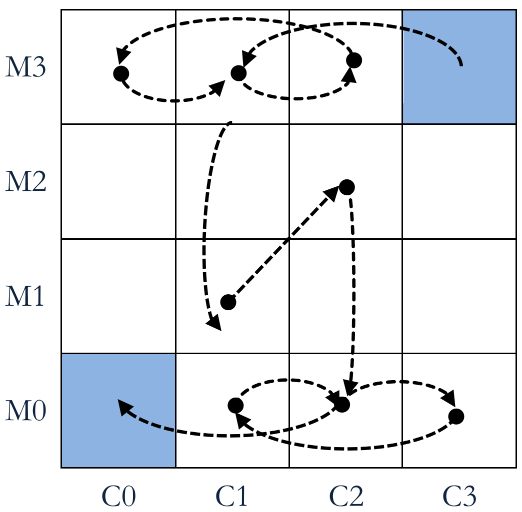
Ovviamente, gli stati accettabili sono quelli in cui tutti i M o tutti i C sono su un'unica sponda del fiume (rappresentati nella figura dalla prima e dall'ultima riga della matrice), oppure vi è un equilibrio numerico tra M e C su entrambe le sponde (1;1) e (2;2).

Fase 2 - Collegare gli stati



I collegamenti tra i punti che rappresentano gli stati accettabili tengono conto della possibilità che la barca porti una o due persone.
Dunque, è possibile fare uno o due passi in linea orizzontale o verticale (il che significa che sono presenti sulla barca uno o due persone dello stesso gruppo), ma solo uno in linea diagonale (equivalente al passaggio del fiume di un M e un C).

Fase 3 - Orientare le linee di connessione



In base alle regole date, facendo qualche tentativo non è troppo difficile trovare i cammini che risolvono il problema. Nella figura è raffigurata una tra le quattro soluzioni esistenti in 11 attraversamenti,[2] che costituisce il minimo possibile.
Per maggiore chiarezza, "traduciamo" la figura in azioni:
1. due C attraversano il fiume
2. un C torna indietro
3. due C attraversano il fiume (ora tutti i C sono sulla sponda d'arrivo)
4. un C torna indietro

[2] Ovviamente, dato che il primo e l'ultimo passaggio devono avvenire dalla sponda di partenza a quella di arrivo, il numero di viaggi necessario per attraversare il fiume è sempre dispari.

5. due M attraversano il fiume (ora c'è equilibrio su entrambe le sponde)
6. un M e un C tornano indietro
7. due M attraversano il fiume (ora tutti i M sono sulla sponda d'arrivo)
8. un C torna indietro
9. due C attraversano il fiume
10. un C torna indietro
11. due C attraversano il fiume

Come detto, ci sono quattro possibili soluzioni in 11 "mosse"; vale la pena di aggiungere che i passaggi dal terzo al nono sono sempre gli stessi, mentre possono cambiare i primi due e gli ultimi due.
In particolare, in due soluzioni su quattro il primo trasferimento coinvolge due C (come nell'esempio); nelle altre due soluzioni si comincia con il viaggio di un M e un C, seguito dal ritorno indietro di un M. Un'analoga doppia possibilità sussiste per quanto riguarda gli ultimi due attraversamenti.

Varianti al numero di attori e alla capacità della barca

Naturalmente, questa procedura permette di risolvere i quesiti di attraversamento purché il quesito stesso abbia delle soluzioni, il che non sempre è vero. Ad esempio, se si aggiungono un C e un M, lasciando inalterate le altre condizioni, non esiste alcun modo per attraversare il fiume senza che qualche malcapitato missionario finisca, prima o poi, tra le fauci dei cannibali.
Aggiungiamo che se la barca può portare quattro o un numero maggiore di passeggeri, il problema diventa banale: basta effettuare varie coppie di viaggi in cui all'andata traghettano due M e due C, poi tornano indietro un M e un C.
In tal modo, dopo ogni coppia di attraversamenti, vi sono un M e un C in meno sulla sponda di partenza e nel contempo viene sempre mantenuto l'equilibrio numerico su entrambe le sponde.[3]
Riprendendo la matrice quadrata vista in precedenza, ciò equivale a muoversi costantemente - avanti e indietro - lungo la diagonale principale che va da (N;N) a (0;0).

Altre modalità di soluzione

Il problema dell'attraversamento del fiume può essere affrontato anche in un altro modo, utilizzando un diagramma ad albero e una notazione vettoriale. Pur senza approfondire in dettaglio questo argomento, si ritiene utile dare una breve descrizione di questo procedimento.
Ogni stato viene identificato da una terna di valori che rappresentano rispettivamente:

- numero di M sulla sponda di partenza;
- numero di C sulla sponda di partenza;
- barca presente o meno sulla sponda di partenza (1/0).

Il valore iniziale è (3,3,1) e le azioni sono rappresentate utilizzando alternativamente il vettore sottrazione e il vettore somma. Ad esempio, se come primo viaggio un C attraversa il fiume da solo, il vettore (0,1,1) va sottratto dallo stato iniziale producendo (3,2,0), che significa: 3 M e 2 C sulla sponda di partenza; barca sulla sponda opposta.
Per risolvere il problema, si costruisce un albero avente lo stato iniziale come radice; vengono poi sottratte le cinque azioni possibili - (1,0,1), (2,0,1), (0,1,1), (0,2,1) e (1,1,1) - ottenendo altrettanti nodi figli della radice.
Ogni nodo che ha più C che M su una sponda rappresenta uno stato non valido e viene quindi rimosso. Dai nodi-figli validi - (3,2,0), (3,1,0) e (2,2,0) - si generano altri figli, questa volta sommando i vettori relativi alle azioni possibili.

[3] E' facile verificare che se la barca può portare non più di 4 persone, il trasferimento completo di N missionari e N cannibali secondo il procedimento descritto richiede **2N-3** viaggi. Ad esempio, si può far attraversare il fiume a 6 missionari e 6 cannibali in 9 viaggi.

L'algoritmo continua alternando sottrazione e somma fino a quando viene generato un nodo con il vettore (0,0,0) come valore. Se ciò è possibile, il problema è risolto e il percorso dalla radice al nodo finale dà la sequenza dei passaggi necessari.

Nella figura viene schematizzata con un diagramma ad albero la soluzione del problema "Missionari e cannibali".[4]

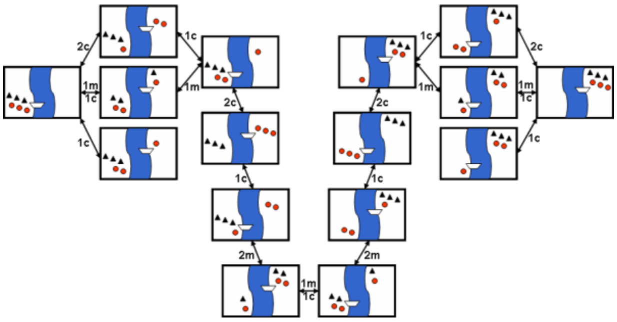


Figura tratta da: http://www.aiai.ed.ac.uk/~gwickler/missionaries.html

Questa rappresentazione è equivalente a quella basata sui grafi orientati: come si vede, in tutto si contano 11 passi e vi è una duplice possibilità di scelta in corrispondenza dei primi e degli ultimi due. Dunque, complessivamente esistono quattro possibili soluzioni al problema.

Bibliografia e sitografia

GARDNER M., *The last recreations*, Mathematical association of America.
GARDNER M., *Enigmi e giochi matematici (Vol. 1-5),* Sansoni.
RUSSELL S.-NORVIG P., *Artificial intelligence: a modern approach*, Prentice Hall, 2nd edition.
AMAREL S., *On representations of problems of reasoning about actions*, in *Machine Intelligence*, Edinburgh University Press.
http://www.aiai.ed.ac.uk/~gwickler/missionaries.html

[4] I pallini rossi identificano i cannibali; i triangoli neri i missionari.