MAGAZINE

MATEMATICAMENTE.IT

Rivista trimestrale di matematica
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito

• Numero 18 – Dicembre 2012 •

Parabola
by Buggolo
http://www.flickr.com/photos/buggolo/422247538/

FIGURE MAGICHE – PARABOLA – PENDOLO DI FOUCAULT – SCRIPTLANDIA

Come proporre un contributo

Istruzioni per gli autori

La rivista pubblica articoli, interviste, buone pratiche e giochi relativamente alla matematica e alle sue applicazioni.

Lo stile, la terminologia e le idee espresse devono essere chiari e accessibili a tutti.

Gli articoli saranno valutati da uno o più collaboratori esperti in materia. La redazione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore.

È possibile che la redazione subordini la pubblicazione dell'articolo a modifiche anche sostanziali che devono essere fatte dall'autore. I contributi devono essere inviati in forma elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato .doc, .docx, .rtf, .odt o formati analoghi. Le formule possono essere in Microsoft Equation Editor, MathType, Open office math o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati e inviati in file a parte. Di ogni elemento non testuale deve essere indicata la posizione precisa all'interno del testo. Se le immagini utilizzate sono protette da diritti d'autore, sarà cura dell'autore dell'articolo ottenere le autorizzazioni necessarie.

Nella prima pagina andranno indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale e istituzione o ambiente professionale di appartenenza, indirizzo e-mail.

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (5-10 righe) preferibilmente in italiano e in inglese, e dovrà terminare con una bibliografia.

I riferimenti bibliografici devono essere indicati all'interno del testo nel seguente modo: [3] oppure [Ba], se si deve indicare la pagina usare [Ba, p.15].

Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia.

I contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

La redazione non garantisce la correttezza scientifica del contenuto degli articoli. Gli autori sono responsabili del contenuto dei testi inviati per la pubblicazione.

Se l'articolo è stato pubblicato in altra sede l'autore deve richiederne l'autorizzazione a chi ha pubblicato per primo l'articolo e fornire le coordinate alla redazione.

MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito www.matematicamente.it

Registrazione del 19.12.2006 al n.953 del Tribunale di Lecce

ISSN 2035-0449

Sommario

Editoriale

Chiudiamo il 2012 con maggiore attenzione alla didattica. Alfino Grasso ci descrive un percorso didattico per l'insegnamento della parabola tra spunti storici e applicazioni. Steve Borgo riprende le 'curiosità' della matematica: quadrati magici e altre forme poligonali di serie di numeri particolari. Michele Mazzucato ci descrive la storia di uno degli esperimenti più sbalorditivi che rivelano il moto della Terra, il cosiddetto pendolo di Foucault. Rosa Marincola presenta un nuovo modo di insegnare informatica: lezioni di scripting per generare mondi virtuali 3D. Non mancano i consigli per delle buone letture sulla matematica.

Antonio Bernardo

174. Esagoni e stelle magiche

Stefano Borgogni
e-mail: stfbrg@rocketmail.com

SUNTO

In un precedente articolo pubblicato su questa stessa rivista (N.13, agosto 2010) si era parlato dei quadrati magici. Il presente testo intende riprendere l'argomento, trattando questa volta figure diverse dal quadrato che presentano analoghe caratteristiche "magiche", ossia disposizioni di numeri interi in forma geometrica tali che la somma rimanga sempre costante lungo tutti gli allineamenti possibili, che dipendono dalle caratteristiche delle figure stesse. In particolare, saranno esaminate diverse tipologie di esagoni magici e di stelle magiche.

1. QUADRATI MAGICI

Prima di cominciare, conviene riepilogare, sia pure in estrema sintesi, alcune considerazioni svolte nell'articolo citato, a partire dalle definizioni che serviranno per la successiva trattazione.
Ricordiamo, dunque, che i quadrati magici di ordine *n* sono matrici quadrate $n \times n$ di numeri interi consecutivi (da 1 a n^2) costruite in modo tale che rimanga sempre costante la somma di ogni riga, colonna o diagonale principale.

Tale somma è definita "costante magica", e si può ricavare con la semplice formula $\frac{(n^3+n)}{2}$.

Aggiungiamo che non è possibile costruire un quadrato magico di ordine 2, mentre per tutti gli altri ordini vi sono quadrati magici in un numero che cresce al crescere di n, diventando ben presto esorbitante: senza contare rotazioni e riflessioni, esiste un quadrato di ordine 3, ce ne sono 880 di ordine 4 e ben 275.305.224 di ordine 5. Per l'ordine 6 non è mai stato calcolato il numero esatto di soluzioni, ma si stima che i quadrati magici distinti siano all'incirca 17 miliardi di miliardi.
Nella figura seguente si vede il quadrato magico di ordine 3, di origine cinese, noto come "Lo Shu".

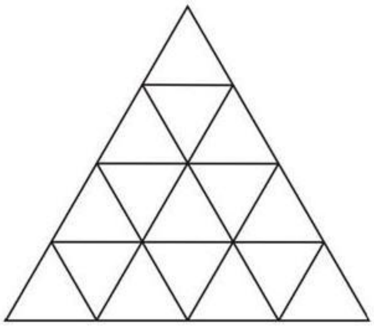
4	9	2
3	5	7
8	1	6

Per completezza, ricordiamo anche alcune tipologie particolari di quadrati magici descritte nell'articolo citato:
Quadrati diabolici: quadrati che hanno la somma costante anche sulle diagonali "spezzate".
Quadrati etero magici: quadrati che si comportano esattamente al contrario rispetto a quelli magici: la somma di righe, colonne e diagonali deve essere sempre diversa.
Quadrati antimagici: quadrati eteromagici con un importante vincolo in più: la somma costruita su righe, colonne e diagonali deve dare una sequenza di numeri consecutivi.
Inoltre, eliminando il vincolo che i numeri contenuti nel quadrato siano consecutivi e partano da 1, si possono avere ulteriori varianti sul tema:
Quadrati magici moltiplicativi: quadrati magici rispetto alla moltiplicazione anziché rispetto all'addizione.
Quadrati magici additivi-moltiplicativi: quadrati magici sia rispetto all'addizione che alla moltiplicazione.

Quadrati bimagici: quadrati che rimangono magici anche se tutti i numeri che li compongono vengono elevati alla seconda.
Quadrati magici di numeri primi: quadrati composti esclusivamente da numeri primi.

2. TRIANGOLI MAGICI?

Di primo acchito, si potrebbe pensare che non sia difficile costruire figure magiche similari utilizzando altri tipi di poligoni regolari. In realtà, non è affatto così: non esiste alcuna figura magica formata da pentagoni, ettagoni, ottagoni o poligoni qualsiasi con un numero di lati superiore.
La dimostrazione si basa su semplici considerazioni geometriche.
Per costruire una figura magica con tanti poligoni regolari uguali tra loro occorre che i poligoni stessi possano essere accostati l'uno all'altro lungo un lato in modo da riempire il piano senza lasciare alcuno spazio.[1] Ma la misura degli angoli interni di ogni "cella" deve essere un divisore intero di 360 - i gradi dell'angolo giro - per cui gli unici poligoni regolari che possono andar bene sono il triangolo equilatero (che ha angoli interni di 60°), il quadrato (angoli interni di 90°) o l'esagono regolare (angoli interni di 120°).
Con qualsiasi altro poligono regolare si può al più costruire una banale figura magica costituita da una sola cella in cui si inserisce il numero 1.
Esaminiamo, allora, il caso del triangolo equilatero, a partire da un'immagine che, nella fattispecie, raffigura la struttura di un eventuale triangolo magico di ordine 4.



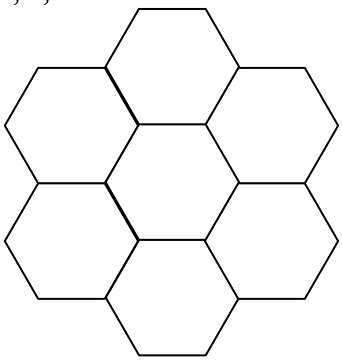
Basta uno sguardo alla figura per rendersi conto che non c'è nessuna possibilità di far sì che diventi magica inserendo i numeri nei vari triangolini.
Infatti, le celle poste ai vertici costituiscono esse stesse una delle linee su cui calcolare la somma, per cui dovrebbero contenere tutte e tre lo stesso numero, pari alla costante magica. Ma se anche si volesse - data la particolare configurazione - eliminare il vincolo che tutti i numeri siano diversi tra loro, non otterremmo egualmente alcun miglioramento, in quanto le tre celle suddette costituiscono ciascuna una riga, ma nello stesso tempo sono parte di un'altra riga, in un'altra direzione. Dunque, dovrebbero contenere un numero che equivale alla costante magica, ma contemporaneamente è soltanto una parte di essa.

3 - ESAGONI MAGICI

Escluso il triangolo, non rimane che provare a vedere che cosa succede nel caso dell'esagono regolare.
In sostanza, si tratta di accostare tante cellette esagonali, unite lungo uno dei lati, fino a formare la classica struttura dell'alveare. A questo punto, si considera un esagono composto da un numero eguale di celle lungo i suoi tre lati esterni e successivamente si inserisce in ogni cella un numero intero, cercando di far sì che la somma delle righe nelle tre direzioni sia sempre la stessa.
Si può evidenziare una prima, significativa differenza (che, peraltro, non costituisce un problema) rispetto al quadrato magico: mentre questo ha lo stesso numero di celle lungo le sue due direzioni - righe e

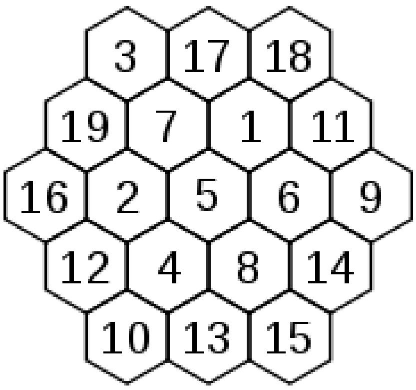
[1] In matematica si esprime questo concetto dicendo che una determinata figura ha la proprietà di "tassellare" il piano. Si veda in proposito: Carlo Sintini, *La tassellatura del piano*, sul sito Matematicamente.it (ottobre 2012).

colonne - nel caso dell'esagono non è così. Ad esempio, l'esagono di ordine 4 è composto da 37 celle, ripartite in sette file che hanno 4, 5, 6, 7, 6, 5 e 4 celle ciascuna.



Esaminiamo adesso il primo esagono non banale, quello di ordine 2.
Come si vede nella figura, l'esagono è costituito da sette celle, ma non è in alcun modo possibile inserire nelle celle stesse i numeri da 1 a 7 in maniera tale da renderlo magico. Infatti, le righe da considerare sono tre, ma la somma dei primi 7 numeri interi equivale a 28, che non è divisibile per 3.

Esagoni magici "puri"
Occorre, dunque, passare al successivo esagono, che ha ordine 3 ed è composto da 19 celle ripartite su 5 file. La somma dei primi 19 numeri interi vale 190; dunque, stavolta la costante magica (38) è un numero intero, per cui un esagono magico è teoricamente possibile.
E tale esagono esiste effettivamente, come si vede nella seguente figura.

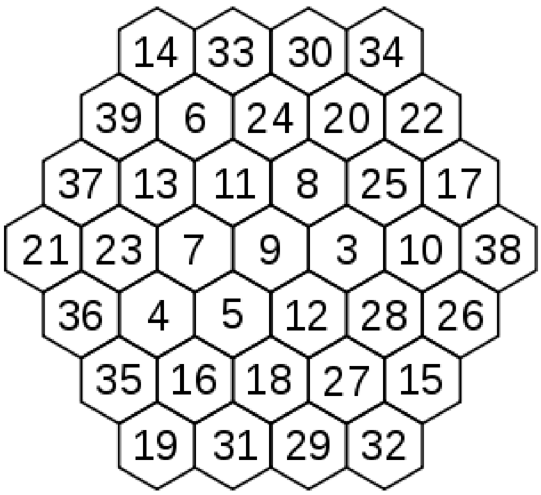


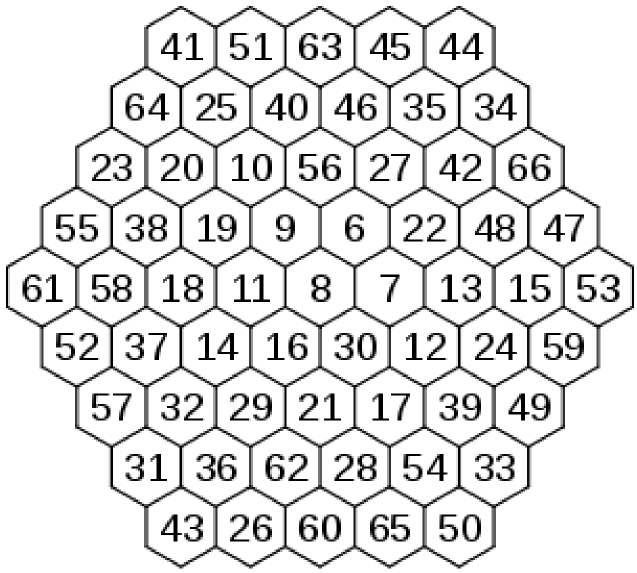
L'esagono magico di ordine 3 è un "prodotto" piuttosto recente: il primo a trattarlo è stato l'architetto tedesco Ernst von Haselberg, nel 1887; successivamente, è stato pubblicato più volte in diverse opere che trattano di matematica ricreativa.
Ma come mai non esiste alcun riferimento all'esagono magico prima di fine '800, mentre i quadrati magici sono noti sin dall'antichità? Ciò si deve al fatto che le due figure si comportano in modo diametralmente opposto: mentre non è difficile trovare una soluzione al problema del quadrato magico, almeno per alcuni ordini,[2] costruire un esagono magico costituisce un quesito estremamente complicato da risolvere.[3]
Non considerando le possibili disposizioni simmetriche rispetto agli assi, per l'esagono di ordine tre esiste soltanto la soluzione riportata nella precedente figura. Ma c'è di più: espandendo l'esagono il numero di

[2] Nel già citato articolo *Quadrati magici*, ad esempio, viene descritto un procedimento estremamente semplice per creare un quadrato magico di qualsiasi ordine n, con n pari e divisibile per 4.
[3] Il "guru" della matematica ricreativa, lo statunitense Martin Gardner, riporta in proposito il curioso aneddoto di un ferroviere che - dopo oltre 40 anni di tentativi - aveva trovato la soluzione dell'esagono magico di ordine 3, poi l'aveva persa e ritrovata nuovamente. Vedi: M.Gardner, *Enigmi e giochi matematici - Volume 5*, Sansoni, 1976.

soluzioni non aumenta, come si potrebbe immaginare; al contrario, non esiste nessun esagono magico per nessun ordine superiore a tre.
La dimostrazione non richiede particolari conoscenze matematiche: basta calcolare la costante magica in funzione del numero di righe dell'esagono, poi con pochi passaggi si ottiene una formula polinomiale nella quale il termine noto vale 5/2n-1. Ovviamente, gli unici valori per cui tale quantità è intera sono 1 e 3, che conducono o al banale esagono di una sola casella o a quello visto nella figura precedente.
La stupefacente conclusione è che - per usare le parole di Martin Gardner - mentre esistono innumerevoli quadrati magici di qualsiasi ordine (2 escluso), tra le infinite, possibili disposizioni di numeri in una forma esagonale, una ed una sola è "magica"!

Esagoni "quasi magici"
Se non esistono esagoni magici "puri" di ordine maggiore di 3, è però possibile costruire degli esagoni "quasi magici" eliminando qualcuno dei vincoli; in particolare, quello per cui gli n numeri consecutivi debbano iniziare da 1.
Ne sono un esempio due esagoni di ordine 4 e 5 scoperti una decina d'anni fa dall'ucraino Arsen Zahray; si tratta degli esagoni "quasi magici" con i numeri più piccoli possibili.

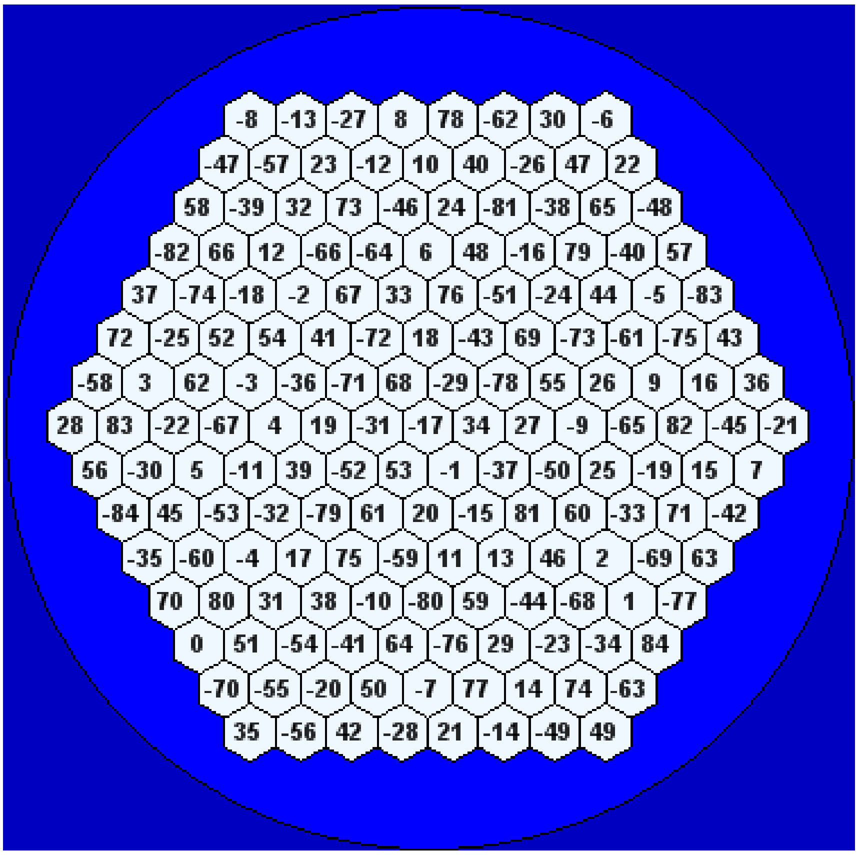




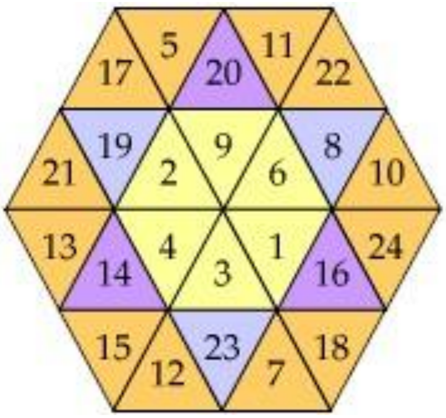
L'esagono di ordine 4 inizia con il numero 3, termina con 39 e la sua costante magica è 111; quello di ordine 5 contiene i numeri da 6 a 66 e la sua costante magica vale 244.[4]

Prima di concludere questo paragrafo, vale la pena di segnalare un altro tipo di esagono "quasi magico" scoperto da Louis Hoelbling, sempre nel 2006 (evidentemente, un anno assai favorevole per gli appassionati dell'argomento!); questa volta - a differenza dei casi precedenti - vengono presi in considerazione anche i numeri negativi.
In particolare, si tratta di un esagono di ordine 8 formato da 169 celle contenenti tutti gli interi da -84 a +84; la sua costante magica vale … zero.

[4] Lo stesso Zahray ha scoperto, nel 2006, il più grande esagono "quasi magico" attualmente conosciuto: è di ordine 7, comprende i numeri da 2 a 128 ed ha una costante magica pari a 635.



T-esagoni
Un'altra variante sul tema è costituita dai cosiddetti T-esagoni magici; anch'essi - come gli esagoni "quasi magici" visti in precedenza - costituiscono una novità nel panorama della matematica ricreativa: sono stati studiati, infatti, soltanto nei primi anni del nuovo millennio.[5]
I T-esagoni magici sono esagoni suddivisi al loro interno in tanti triangolini; i numeri - sempre interi e consecutivi a partire da 1 - devono essere inseriti all'interno dei triangolini suddetti in modo da dare la stessa somma per ogni linea.
Il caso più semplice di T-esagono (ordine 1) è quello di un normale esagono regolare suddiviso in 6 triangoli equilateri; evidentemente, questa figura non può essere in alcun modo resa magica.
Le cose cambiano passando all'ordine immediatamente successivo.



[5] Il primo T-esagono di ordine 2 è stato ideato da John Baker nel 2003; successivamente, lo stesso Baker e David King hanno dimostrato che esistono esattamente 59.674.527 T-esagoni diversi di ordine 2.

Il T-esagono raffigurato nell'immagine, per l'appunto di ordine 2, contiene i numeri da 1 a 24 (somma totale 300) e la sua costante magica vale 75.
Più in generale, un T-esagono di ordine n ha 2n righe, è formato da $6n^2$ triangolini e la somma di tutti i suoi numeri è data dalla formula $S = 6n^2 \frac{(6n^2+1)}{2}$. Da qui si ricava facilmente la sua costante magica, che è S/2n, ossia $3n^2 \frac{(6n^2+1)}{2n}$.
Vediamo brevemente alcune caratteristiche dei T-esagoni magici.
In primo luogo, il suo ordine deve essere necessariamente pari, come si evince dalla formula per la costante magica appena vista.
Un'altra proprietà interessante è che la somma dei numeri contenuti nei triangoli rivolti verso l'alto è sempre uguale alla somma dei numeri contenuti nei triangoli rivolti verso il basso. Nella figura, ad esempio, si ha: 17+20+22+21+2+6+10+14+3+16+12+7 = 5+11+19+9+8+13+4+1+24+15+18 = 150.
Per concludere, si riporta una serie di dati relativi ai primi T-esagoni magici fino all'ordine 12.

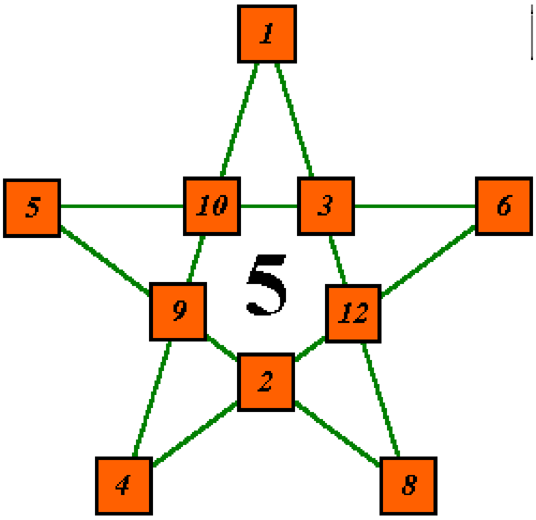
Ordine	Numero di triangolini	Somma totale	***Numero di file***	***Costante magica***
2	24	300	4	75
4	96	4656	8	582
6	216	23.436	12	1.953
8	384	73.920	16	4.620
10	600	180.300	20	9.015
12	864	373.680	24	15.570
n	$6n^2$	$6n^2*(6n^2+1)/2$	2n	$3n^2*(6n^2+1)/2n$

Non è ancora stato calcolato il numero di soluzioni distinte per un generico T-esagono magico di ordine n, ma - visto quanto si è detto nella nota precedente riguardo all'ordine 2 - è presumibile che si tratti di numeri di proporzioni esorbitanti.

4 - STELLE MAGICHE

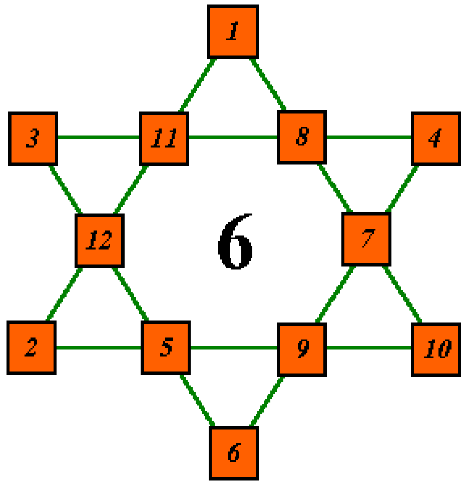
Come si è visto, non è possibile ottenere figure magiche con poligoni regolari diversi dal quadrato e dall'esagono. Esiste, però, un'altra tipologia di figure che ben si prestano per giochi di "magia" e che vale la pena di esaminare: i poligoni regolari stellati.
Evidentemente, in questo caso non si può parlare di celle, ma i numeri - che devono essere sempre interi e consecutivi, a partire da 1 - vanno collocati nei vertici e nei punti di intersezione tra i lati della stella.
Le figure proposte nel prosieguo della trattazione chiariranno le regole di costruzione della stella magica meglio di qualsiasi spiegazione teorica.

Stelle "quasi magiche"
Il primo poligono stellato possibile è quello a 5 punte, il ben noto "pentagramma" o "pentalfa" le cui caratteristiche geometriche furono studiate già dagli antichi greci.[6]
Tenendo conto che vi sono in tutto 10 punti su cui scrivere i numeri (somma totale pari a 55), che le linee sono 5 e che ogni numero appartiene a due linee diverse, si deduce che la costante magica della stella è 55/5*2 = 22.
Più in generale, la costante magica di una stella a n punte è data dalla formula 4n+2.
Ma l'esistenza di una costante magica non assicura la certezza di poter costruire una stella magica; proprio questo è il caso del pentagramma, che non è possibile rendere magico in alcun modo. Il "massimo" che si riesce a ottenere è una stella che utilizza i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, saltando il 7 e l'11.
Nella figura seguente si vede, per l'appunto, questo pentagramma "quasi magico", in cui la somma delle righe è costante e vale 24.[7]

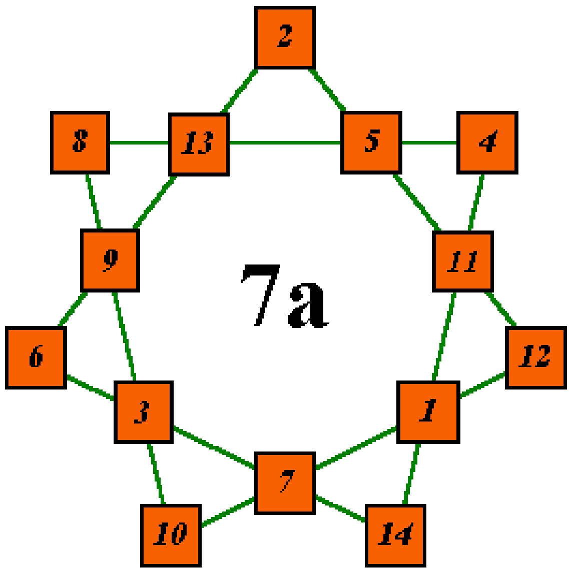


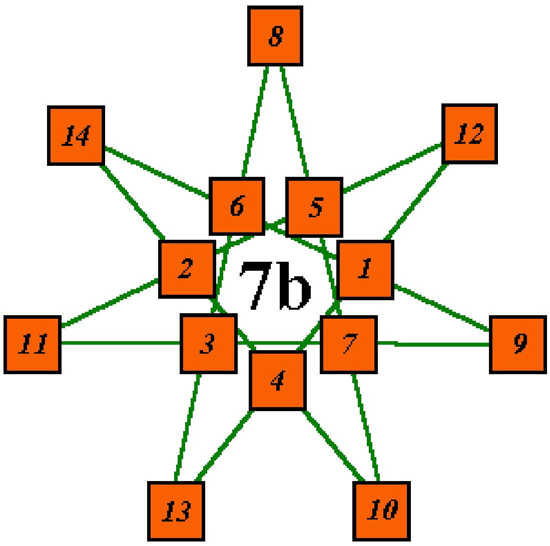
Stelle magiche "pure"
È sufficiente, però, aumentare di 1 il numero delle punte affinché la costruzione di un poligono stellato magico "puro" diventi possibile: si tratta della cosiddetta "Stella di Davide", formata da due triangoli equilateri sovrapposti e intrecciati. Tale stella comprende tutti i numeri interi da 1 a 12 e ha una costante magica pari a 26.

[6] Il pentagramma fu studiato approfonditamente dalla scuola pitagorica, per i suoi significati simbolici e per le sue molteplici relazioni con il numero aureo φ.
[7] Per completezza, va aggiunto che con questo accorgimento è possibile ottenere 12 soluzioni distinte.



L'esempio riportato ha una peculiarità degna di nota, che potremmo paragonare alla somma lungo le diagonali spezzate dei quadrati magici: la somma dei numeri indicati sui 6 vertici della stella dà anch'essa la costante magica, 26.
L'esagramma magico ha complessivamente 80 soluzioni distinte.
Dalle 6 punte in poi è sempre possibile costruire stelle magiche, e il numero delle soluzioni - com'è facile immaginare - tende ad aumentare al crescere del numero di punte.[8]
A questo punto, però, la questione diventa più complessa rispetto al caso dei poligoni regolari, in quanto mentre il quadrato o l'esagono magico sono rappresentabili in un'unica maniera, la stella magica può assumere diverse configurazioni.
In particolare, se esistono un solo tipo di pentagramma e un solo tipo di esagramma (quelli visti nelle figure precedenti), già a partire dalle 7 punte le stelle possono assumere più forme diverse: ecco, ad esempio, le due configurazioni possibili per l'ettagramma.



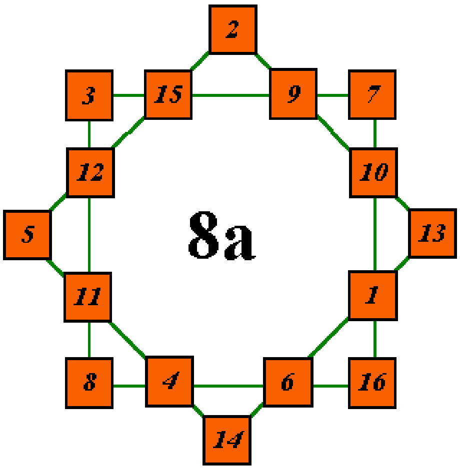


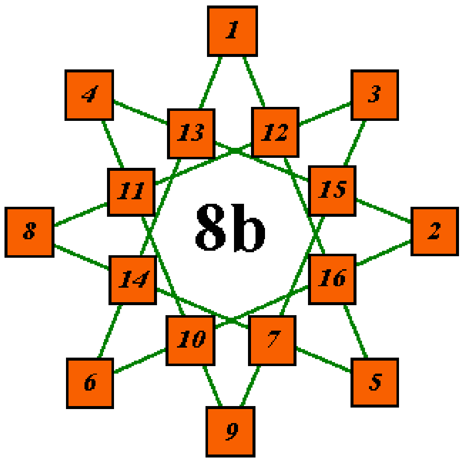
Inoltre, vi sono altri due elementi importanti da tenere in considerazione nell'analisi delle stelle magiche.

---

[8] Vi sono, però, due eccezioni: le stelle a 6 e 10 punte hanno rispettivamente più soluzioni di quelle con 7 e 11 punte (si veda in proposito la tabella alla fine del capitolo).

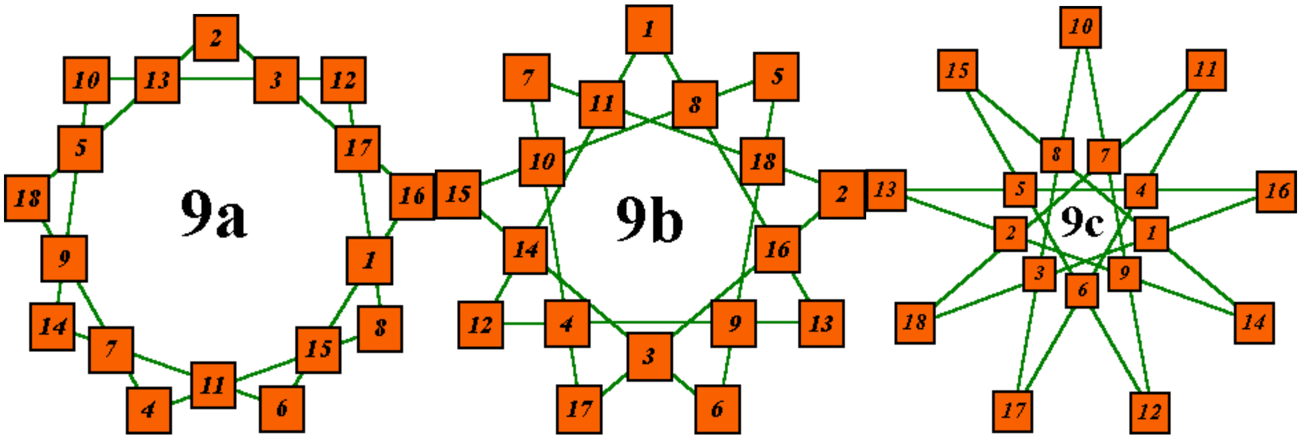
Il primo elemento è l'esistenza o meno di un cammino continuo, tale - cioè - che partendo da uno qualsiasi dei vertici si possa tracciare l'intera stella e tornare al vertice di partenza senza staccare la matita dal foglio. Se il numero di punte della stella è primo, tutte le configurazioni possibili hanno cammini continui, mentre se il numero è composto esistono cammini sia continui sia non continui.[9]
Ovviamente, visto che 7 è primo, nel caso dell'ettagramma entrambe le tipologie di stelle prevedono un cammino continuo. Inoltre, per tutti e due i modelli vi sono esattamente 72 soluzioni distinte che rendono magica la stella.
Il secondo elemento - che è già percepibile nello schema 7b e che si amplifica sempre più per gli ordini superiori - è il seguente: aumentano i punti di intersezione tra le diverse linee della stella, per cui sarebbe possibile collocare altri numeri su ogni linea, ridefinendo conseguentemente la somma totale dei numeri stessi e la relativa costante magica.
In particolare, nello schema 7b si potrebbero inserire altri 7 numeri negli incroci "liberi" (quelli più interni); la somma totale diventerebbe allora 231 e la costante magica varrebbe 231/7*2 = 62.
A questo punto, si aprirebbe tutto un "mondo nuovo", data la possibilità di costruire altre stelle magiche sommando 6 numeri per ogni linea (come nel caso appena visto) oppure 8 o 10 o 12 e così via al crescere dell'ordine della stella.
È evidente, però, che proseguendo su questa strada le tipologie possibili di stelle magiche aumenterebbero a dismisura, per cui segnaliamo questo possibile sviluppo senza approfondirlo, mentre nel presente testo si continueranno a prendere in considerazione soltanto le soluzioni "canoniche", relative al caso standard di 4 punti di intersezione su ogni linea della stella.
Esaurita questa digressione, riprendiamo l'analisi generale con la stella a 8 punte, che può presentarsi in due diverse tipologie, una delle quali con un cammino non continuo. Tale situazione si verifica quando la stella è costruita sovrapponendo e intrecciando tra loro due quadrati (figura 8a).
La stella 8a ha anche una particolarità interessante: la somma dei numeri indicati nei vertici dei due quadrati sovrapposti equivale in entrambi i casi alla costante magica.[10]



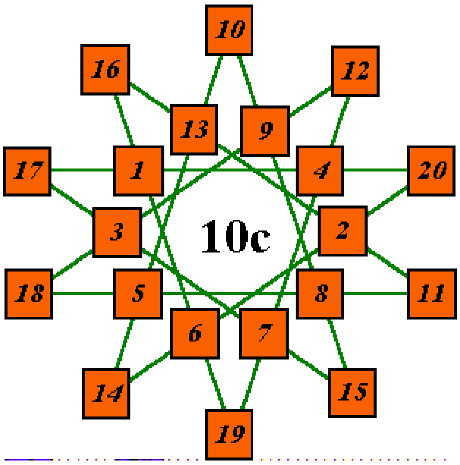


Con la stella magica a 9 punte si sale di un'unità nel numero delle possibili configurazioni, che sono adesso tre, due delle quali prevedono un cammino continuo.

[9] Fa eccezione la stella a 6 punte, per la quale il cammino dell'unica configurazione possibile non è continuo.
[10] In qualunque disposizione che prevede due poligoni regolari sovrapposti e intrecciati la somma dei numeri indicati nei vertici dell'uno e dell'altro è la stessa, ma generalmente non equivale alla costante magica, come in questo esempio.



Mentre gli schemi 9a e 9c non presentano particolari novità rispetto a quanto visto finora, il 9b è assai più significativo, poiché raffigura la prima stella magica che si ottiene sovrapponendo e intrecciando tre poligoni regolari, in questo caso tre triangoli equilateri.
Ma non finisce qui; passando all'ordine 10 c'è un'ulteriore novità: la possibilità di costruire una stella magica sovrapponendo non più poligoni regolari, ma poligoni regolari stellati. Il modello 10c, che qui riportiamo,[11] è costruito, per l'appunto, sovrapponendo e intrecciando tra loro due pentagrammi.



Come si vede, aumentando il numero delle punte, le stelle magiche presentano un numero di possibili varianti che cresce sempre più: cammini continui e non continui, sovrapposizioni di due o più poligoni regolari, sovrapposizioni di due o più stelle di ordine inferiore…
Ad esempio - sulla falsariga di quanto visto in precedenza - si può determinare che tra le quattro possibili configurazioni della stella magica di ordine 12 una prevede un cammino continuo, mentre le altre tre sono costituite da figure sovrapposte e intrecciate; in particolare:

- 4 triangoli equilateri
- 3 quadrati
- 2 stelle regolari di ordine 6.

L'analisi potrebbe continuare, ma - per non appesantire troppo il discorso - conviene fermarsi qui.
Vale la pena, però, di concludere il discorso con una tabella che riassume le principali caratteristiche delle stelle magiche fino all'ordine 12, compreso il numero di soluzioni distinte (accertato o stimato).

[11] Tralasciamo i modelli 10a e 10b, che non aggiungono niente di nuovo.

Punte	Costante magica	Cammini continui	Cammini non continui	Totale tipologie diverse	Soluzioni distinte[12]
5	22	1		1	Nessuna
6	26		1	1	80
7	30	2		2	72
8	34	1	1	2	112
9	38	2	1	3	1.676 - 3.014
10	42	2	1	3	10.882 - 115.552
11	46	4		4	53.528 - 75.940
12	50	1	3	4	oltre 800.000
n	4n+2	...	...	$\lfloor (n-3)/2 \rfloor$	...

[12] L'ultima colonna può riportare due valori: in tal caso si tratta del numero minimo e massimo di soluzioni distinte esistenti per le diverse tipologie di stella possibili per quel determinato ordine.

175. Una parabola diversa

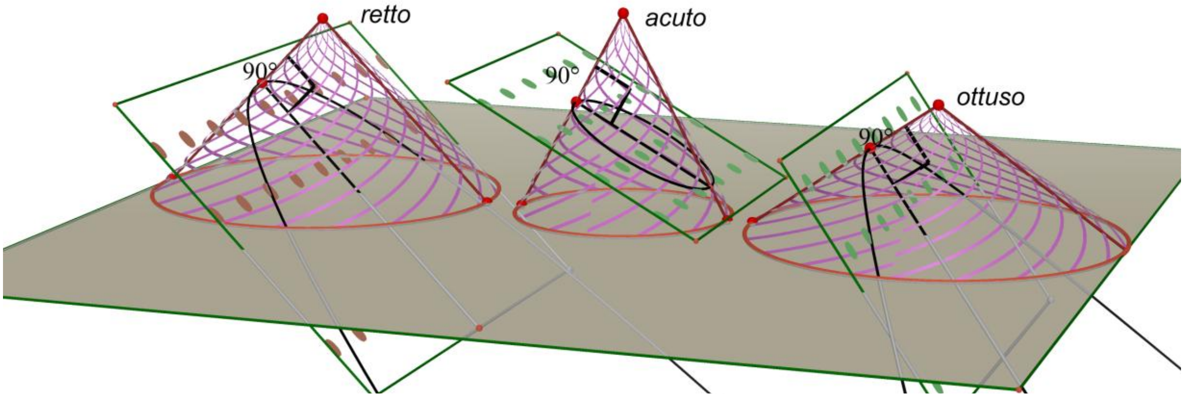
Alfino Grasso
grassoalfino@yahoo.it

1. Problema di Delo

Nella straordinaria eredità scientifica lasciataci dagli antichi greci, ci sono tre celebri problemi "impossibili" da risolvere:

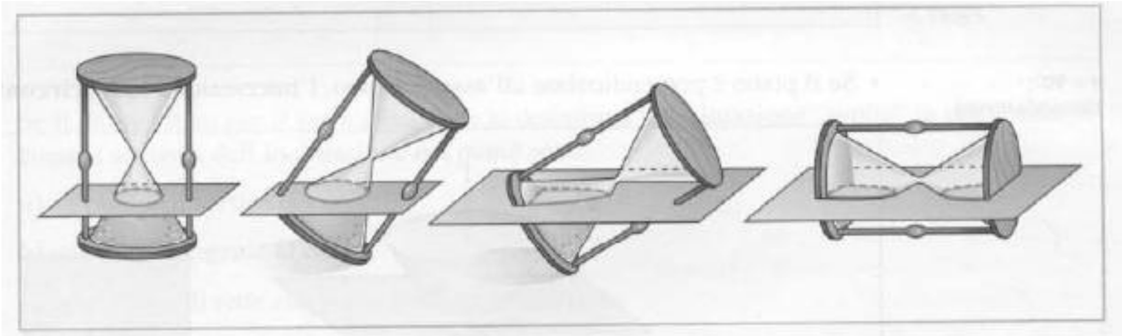
- **La quadratura del cerchio**, cioè la determinazione di un quadrato di area uguale a quella di un cerchio dato.
- **La duplicazione del cubo**, ovvero l'individuazione del lato del cubo di volume doppio rispetto a un cubo di lato assegnato.
- **La trisezione dell'angolo**, ossia la precisazione dell'angolo terza parte di un angolo fissato.

Va chiarito che i problemi erano "impossibili" da risolvere perché la matematica greca usava come strumenti di elezione per le costruzioni geometriche, solo la riga (non graduata) e il compasso, che rappresentavano le *figure perfette*, cioè la retta e la circonferenza.
Ci occuperemo del problema della *duplicazione del cubo*, noto anche come problema di Delo, che ha costituito uno sprone per la ricerca di figure geometriche che potessero dare una soluzione, anche se *non perfetta*, al problema.
La scoperta delle sezioni coniche, chiamate comunemente *coniche*, è un risultato "collaterale" della duplicazione del cubo. Tale problema, tradotto in termini di calcolo, comporta la risoluzione dell'equazione $x^3 = 2l^3$, nella quale x indica il lato del cubo che vogliamo determinare ed l il lato del cubo dato.
Intorno al 350 a.C. Menecmo, alla ricerca di figure che potessero consentire di risolvere il problema, determina le coniche secando un *cono circolare retto*, con l' angolo al vertice variabile, con piani perpendicolari a una generatrice. Se angolo è retto, la curva sezione si chiama *parabola*, se acuto *ellisse* (la circonferenza è una particolare ellisse), se ottuso *iperbole*.



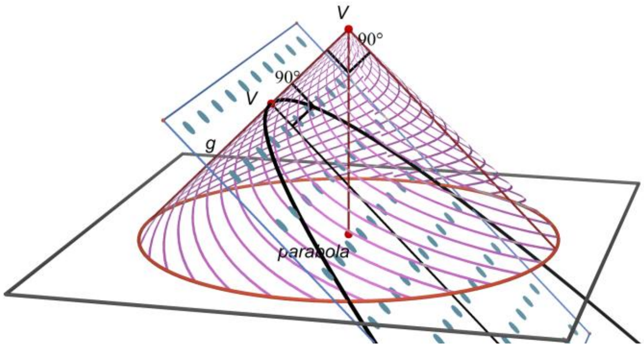
Tali nomi furono attribuiti però solo più tardi da Apollonio di Perga (III-II secolo a.C.), che per primo intersecò con un piano variabile, un doppio cono nel suo trattato *Coniche*. Questo è eccezionale al punto da condannare all'oblio un trattato sulle coniche di Euclide. Le proprietà scoperte da Apollonio, *esclusivamente per via geometrica*, sono quelle che si studiano ancora nelle università: onore alla geometria!
I nomi assegnati dal grande matematico di Perga fanno riferimento ai problemi, esposti nel I, II e VI libro degli *Elementi* di Euclide, che in seguito sono stati chiamati di "applicazioni delle aree".
Questi erano gli *strumenti geometrici* con cui i greci *risolvevano* i problemi che per noi comportano equazioni algebriche di I o II grado.
Intuitivamente le tre curve erano già note ai greci per via della clessidra, usata spesso come "orologio" (nei tribunali, già all'inizio del IV secolo a.C., scandiva i tempi degli "avvocati"). La superficie dell'acqua

infatti determina con quella della clessidra curve che assumono le forme delle tre coniche al variare della sua inclinazione su un tavolo.



2. Introduzione della **parabola**

Se l'angolo al vertice del cono è retto, si ottiene, come si è detto la *parabola*, di cui Menecmo determinò, con la *geometria elementare*, la proprietà caratteristica di cui godono tutti i suoi punti e solo essi. Non è noto come il matematico greco l'abbia determinata. Ne darò più avanti un procedimento fondato sulla geometria elementare nel piano.



Nei nostri testi lo studio di questa curva piana inizia in genere con la definizione, e si dà per scontato che la curva sia quella del grafico disegnato.
A mio parere, qualunque sia l'argomento da proporre, sarebbe opportuno:

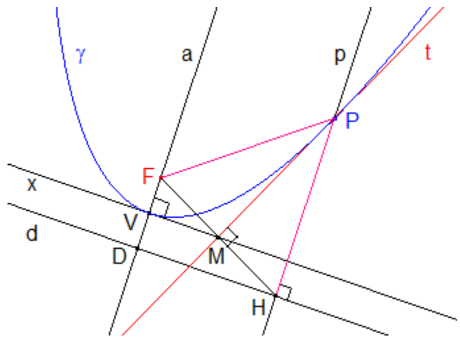
- **inserirlo nel contesto storico-culturale** che gli è proprio (così che possa essere anche fonte di suggestioni);
- **prendere le mosse da un problema** che, nel nostro caso, proponga della parabola una costruzione semplice da cui si può ottenere facilmente l'*equazione della curva*;
- **prospettare diversi ambiti di utilizzo**, sia teorici che applicativi.

Questo tipo di approccio presenta almeno due motivazioni interessanti e prevede che la definizione sia la conclusione di un percorso, non una designazione astratta:
La definizione di un "oggetto geometrico" non ne implica l'esistenza. (Per la matematica greca un ente geometrico esisteva solo se si poteva darne una costruzione, ovviamente con riga e compasso).
La costruzione mediante un software dinamico, oltre ad avere un effetto visivo chiarificatore, favorisce la partecipazione attiva dei giovani.
Questo un possibile, semplice percorso.
Gli allievi devono già conoscere luoghi geometrici come: l'asse di un segmento, la bisettrice di un angolo e la circonferenza. Sanno che quest'ultima che è il luogo dei punti del piano che hanno uguale distanza $r>0$ da un punto assegnato, detto centro. È spontaneo allora porre il problema: se oltre a un punto assegniamo una retta cui non appartiene, *esistono punti del piano equidistanti dal punto e dalla retta*? Si accettano contributi...
Se non ne emergono, si può suggerire: tracciamo la perpendicolare dal punto alla retta…

Ecco una costruzione molto semplice del nostro luogo, chiamiamolo γ.

Siano F un punto e d una retta che non passa per F (figura). Un punto P appartiene a γ se è equidistante da F e d. Quindi, poiché la distanza di un punto da una retta è la lunghezza del segmento di perpendicolare dal punto alla retta, P "è costretto" a stare sulla perpendicolare p a d per un qualunque punto H di d ed essere equidistante da F e H. Così P, oltre ad appartenere p, deve stare sull'asse t del segmento FH, cioè sulla perpendicolare a FH per il suo punto medio M.

Al variare di H su d, il punto P così trovato descrive il luogo. A questo punto si dà la definizione.



Dati un punto F e una retta d cui non appartiene, si chiama parabola di fuoco F e direttrice d il luogo γ dei punti del piano equidistanti da F e d (chiariremo fra breve perché F è chiamato fuoco).

Dal suggerimento dato, la retta a per F perpendicolare a d la interseca in un punto, D, tale che il punto medio V del segmento FD appartiene alla parabola; essa presenta poi in a un *asse di simmetria* per via della costruzione: il punto V intersezione della parabola col suo asse di simmetria si chiama *vertice* della parabola.

3. Tangente a una parabola in un suo punto

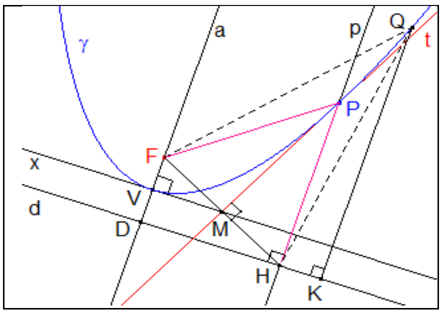
L'intuizione suggerisce che la retta t non ha punti comuni con γ diversi da P: proviamolo.

Sia Q un punto di γ *diverso* da P; indicata con $\overline{QK}$ la sua distanza da d, distanza minima fra Q e i punti della direttrice d, $\overline{QH} > \overline{QK}$, ma $\overline{QK} = \overline{QF}$ perché Q sta su γ, quindi $\overline{QH} > \overline{QF}$.

Allora, per una nota proprietà dell'asse di un segmento: Q appartiene al semipiano individuato da t cui appartiene F e quindi la retta t *ha in comune con* γ solo *il punto P*.

Tale retta si dice tangente alla parabola γ nel punto P.

La costruzione iniziale e la proprietà dimostrata ci assicurano che:



la retta tangente alla parabola γ in un suo punto P è la perpendicolare al segmento FH nel suo punto medio M.

In particolare, la retta x per V perpendicolare ad a non interseca γ in alcun altro punto, quindi è tangente alla parabola in V. Per quanto sopra evidenziato, tutti gli altri punti di γ appartengono al semipiano determinato dalla retta x che contiene il fuoco; per questo motivo si dice che: *la parabola volge la concavità verso il fuoco.*

4. Al… fuoco!

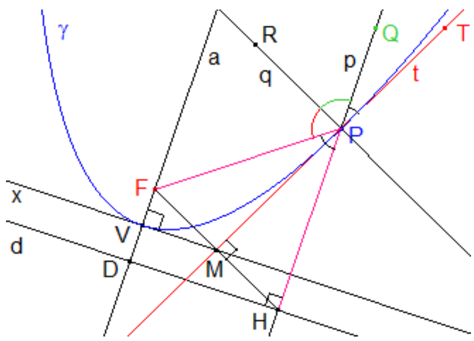
Torniamo alla costruzione della parabola per metterne in risalto un'importante proprietà.

Preliminarmente introduciamo la seguente definizione:

Si chiama diametro di una parabola in un suo punto la retta per esso parallela all'asse.

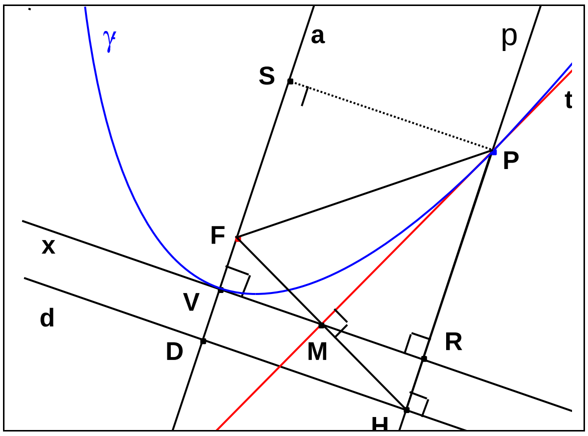
In forza della costruzione (figura), la retta p è un diametro e gli angoli $F\hat{P}M$ e $H\hat{P}M$ hanno la stessa ampiezza perché simmetrici rispetto a t; inoltre anche $T\hat{P}Q$ e $H\hat{P}M$ sono di uguale misura, essendo simmetrici rispetto a P: quindi $F\hat{P}M$ e $T\hat{P}Q$ sono isometrici per transitività. Da ciò:

In ogni punto P di una parabola γ, gli angoli che la tangente in P a γ forma col diametro per P e con la semiretta PF di origine P hanno la stessa ampiezza.



Di conseguenza, detta q la perpendicolare a t per P ed R un punto di q, gli angoli $Q\hat{P}R$ ed $R\hat{P}F$ sono simmetrici rispetto a q e hanno quindi la stessa ampiezza.
Pensiamo ora che la parabola sia costituita da una strisciolina sottile di materiale riflettente. Allora, ogni raggio luminoso parallelo all'asse come p, segue la *legge di riflessione della luce* rispetto alla perpendicolare q a t nel suo punto d'incidenza P con lo "specchio" t e si riflette nel punto F. In esso quindi si concentra l'energia termica di tutti i suddetti raggi ed F va … a fuoco, donde il nome.
Questa proprietà era già nota ad Archimede che, secondo la leggenda, avrebbe bruciato alcune navi dei romani durante il loro assedio a Siracusa nel 212 a.C., avendo realizzato degli specchi che avevano forma di grandi *paraboloidi* (solidi ottenuti dalla rotazione di una parabola attorno al proprio asse), cioè come le attuali antenne televisive che si chiamano impropriamente parabole.

5. Un'espressione



Il procedimento seguito per trovare i punti della parabola ci consente di affermare (figura) che, per ogni posizione del punto H sulla direttrice, esiste un solo punto P di γ – quindi equidistante da F e d - tale che il triangolo HMP è rettangolo in M. Chiamato allora R il punto comune alle rette p e x, MR è l'altezza relativa all'ipotenusa PH. In forza del cosiddetto *II teorema di Euclide*, otteniamo che $\overline{PR}:\overline{MR}=\overline{MR}:\overline{RH}$, da cui $\overline{PR}=\frac{\overline{MR}^2}{\overline{RH}}$, ovvero infine $\frac{\overline{PR}}{\overline{MR}^2}=\frac{1}{\overline{RH}}$.

(Ho usato un linguaggio "algebrico", perché quello greco delle grandezze sarebbe pesante).
Osserviamo ora che, per costruzione RH e FV sono simmetrici rispetto a M, da cui $\overline{RH}=\overline{FV}$, che è costante essendo la metà della distanza di F da d; quindi, per un generico punto P di γ :

(*) $$\frac{\overline{PR}}{\overline{MR}^2}=\frac{1}{\overline{FV}}$$

Scriviamo la (*) sotto una forma più espressiva (figura precedente).
Detta S la proiezione ortogonale di P sull'asse, $\overline{SP}=\overline{VR}$ (lati opposti del rettangolo VRPS) e così $\overline{MR}=\frac{\overline{VR}}{2}=\frac{\overline{PS}}{2}$. La (*) dunque diventa

(**) $$\frac{\overline{SV}}{\overline{PS}^2}=\frac{1}{4\overline{FV}}$$

Essa esprime sotto un'altra forma la proprietà intrinseca della parabola, nella quale dunque:

È costante il rapporto fra la distanza di un generico punto P dalla tangente nel vertice e il quadrato della sua distanza dall'asse.

La (**) si può anche scrivere:

(#) $$\overline{SV}=\frac{1}{4\overline{FV}}\overline{PS}^2$$

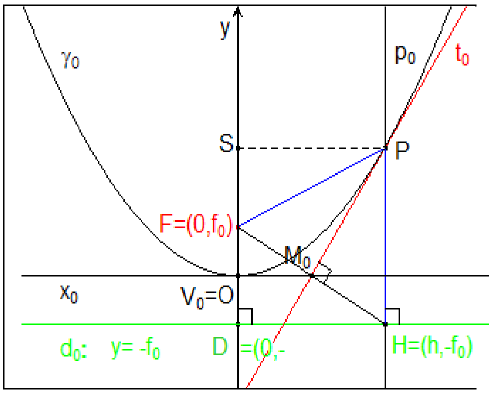
6. Equazione della parabola con fuoco sull'asse y e direttrice parallela all'asse x

Prendendo le mosse dalla (#) possiamo scrivere, in un opportuno riferimento cartesiano ortogonale (figura sotto), quella che si chiama *equazione di una parabola* γ_0, dati fuoco F_0 e direttrice d_0. Cioè l'equazione che "traduce" la proprietà geometrica che caratterizza ogni punto P del luogo γ_0, nel legame cui devono soddisfare *tutte e sole* le coordinate di P=(x,y), mediante le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice.

Scegliamo come asse $\vec{y}$ l'asse di simmetria della parabola e, indicato con D_0 il punto comune a d_0 e all'asse $\vec{y}$, assumiamo per origine O, punto medio del segmento F_0D_0; orientiamo poi l'asse $\vec{y}$ da D_0 verso F_0: l'asse $\vec{x}$ è asse del segmento F_0D_0 ed è orientato così che l'angolo $\vec{x}\,\hat{}\,\vec{y}$ abbia ampiezza uguale a 90° ($\pi/2$). Il vertice V≡O, l'asse $\vec{x}$ è tangente in O a γ_0 e, detta f_0 l'ordinata del fuoco $F_0=(0,f_0)$, l'equazione della direttrice è: $y= - f_0$.

Primo procedimento

Ricordiamo che *la parabola γ_0 volge la concavità verso il fuoco*. Così, se F_0 ha ordinata positiva, P e quindi S, ha ordinata positiva; mentre se F_0 possiede ordinata negativa, tale è anche
quella di P e conseguentemente di S.



Allora da (#) $\overline{SV} = \dfrac{1}{4\overline{FV}}\overline{PS}^2$ abbiamo che, dette x e y l'ascissa e l'ordinata di un qualunque punto della parabola, la proprietà caratteristica geometrica del punto P=(x,y) si "traduce" nell'equazione cui devono soddisfare le coordinate di *tutti* i punti di γ_0 e *di essi soltanto*:

$$y = \frac{1}{4f_0}x^2 \ .$$

Questa è l'equazione della parabola di fuoco $F_0=(0,f_0)$ e direttrice d_0: $y= -f_0$.

Ribadiamo: dire che $y = \dfrac{1}{4f_0}x^2$ è l'equazione della parabola γ_0 significa che:

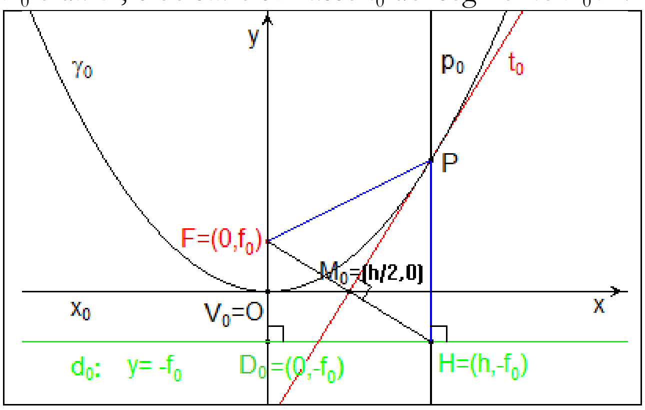
- Se un punto appartiene alla parabola γ_0 le sue coordinate devono verificarne l'equazione.
- Viceversa, se le coordinate di un punto soddisfano l'equazione della parabola γ_0, esso le appartiene.

Secondo procedimento

Usiamo la costruzione della parabola.

Detto H un qualunque punto di d_0, esso possiede ascissa variabile, sia h, e ordinata $-f_0$: $H_0=(h,-f_0)$; allora il punto P che descrive il luogo deve:

- appartenere alla perpendicolare p_0 alla direttrice per punto generico H di questa;
- essere equidistante da F_0 e da H, cioè stare sull'asse t_0 del segmento F_0H .



Per la 1. P giace sulla retta di equazione 1) x=h.
Per la seconda proprietà, scriviamo l'equazione di t_0, cioè l'equazione della perpendicolare al segmento F_0H per il suo punto medio $M_0=(h/2, 0)$.
Il coefficiente angolare di F_0M_0 è $m=-2f_0/h$ (differenza delle ordinate/differenza delle ascisse), quindi il coefficiente angolare di t è $m'=h/2f_0$; da ciò l'equazione di t è:

2) $$y=\frac{h}{2f_0}\left(x-\frac{h}{2}\right)$$

L'equazione cartesiana, cioè in **x** e **y** di $\boldsymbol{\gamma_0}$ si ottiene eliminando il parametro **h** fra 1. e 2.

$$\begin{cases} x=h \\ y=\dfrac{h}{2f_0}\left(x-\dfrac{h}{2}\right) \end{cases}$$

Dalla prima equazione *h=x* che, sostituita nella seconda, dà $y=\dfrac{x}{2f_0}\left(x-\dfrac{x}{2}\right)$.

Eseguendo i facili calcoli si ha che l'equazione di $\boldsymbol{\gamma_0}$ è $y=\dfrac{1}{4f_0}x^2$.

Un'osservazione significativa

Confrontando l'equazione di γ_0: $y=\dfrac{1}{4f_0}x^2$ con la (#) $\overline{SV}=\dfrac{1}{4\overline{FV}}\overline{PS}^2$, notiamo che l'equazione della parabola nel riferimento scelto ha la stessa forma della proprietà che esprime il luogo e quindi la caratteristica propria della parabola. In un altro riferimento l'equazione è più complessa: *l'aspetto geometrico è più espressivo di quello analitico.*

Se in $y=\dfrac{1}{4f_0}x^2$ poniamo $a=\dfrac{1}{4f_0}x^2$ (quindi $f_0=\dfrac{1}{4a}$), l'equazione della parabola γ_0 diventa:

(&) $$y=ax^2$$

detta *forma canonica* dell'equazione della parabola di fuoco $F_0=\left(0,\dfrac{1}{4a}\right)$ e direttrice d_0: - $y=-\dfrac{1}{4a}$.

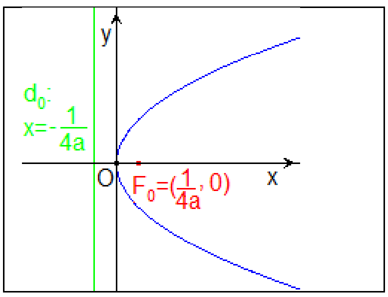
Poiché a esibisce lo stesso segno di f_0 e la parabola volge la concavità verso la semiretta dell'asse cui appartiene il fuoco, deduciamo che γ_0 di equazione $y=ax^2$:

- volge la concavità verso il semiasse positivo delle ordinate se a>0;
- volge la concavità verso il semiasse negativo delle ordinate se a<0.

Al variare di f_0, quindi di a, nell'insieme dei numeri reali escluso lo zero, $\Re-\{0\}$, $y=ax^2$ rappresenta tutte e sole le parabole col fuoco sull'asse $\vec{y}$ e direttrice parallela all'asse $\vec{x}$.
Ci saranno utili in seguito le seguenti osservazioni che derivano dalla costruzione:
$x_V=x_F$, $y_F=y_V+1/4a$, l'equazione della direttrice d_0 risulta $y=y_V-1/4a$.

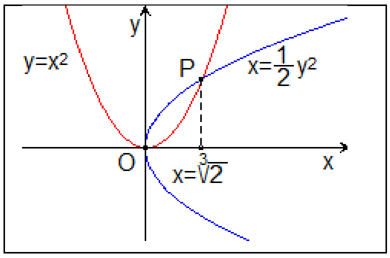
Applicazioni

Se nel sistema di riferimento scambiamo il ruolo dei due assi, per simmetria l'equazione di γ_0 diventa $x=ay^2$ e il suo grafico è simmetrico di quello precedente rispetto alla bisettrice di primo e terzo quadrante (prima figura). Fate la costruzione per esercizio.



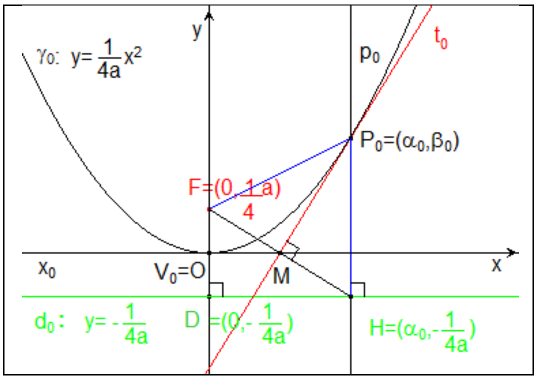
La parabola consente di risolvere il problema di Delo.

Intersechiamo le parabole di equazioni $y=x^2$ e $x=\frac{1}{2}y^2$. Sostituendo x^2 a y nella seconda, abbiamo $x=\frac{1}{2}x^4$, o anche $\frac{1}{2}x^4-x=0$, ossia $x(x^3-2)=0$, cioè $x=0$ o $x^3=2$ e infine $x=0$ o $x=\sqrt[3]{2}$: questa è soluzione del problema della duplicazione del cubo ma è un numero irrazionale. Si è provato solo nell'Ottocento che esso non si può costruire con riga e compasso.



7. Equazione della tangente alla parabola γ_0 di equazione $y=ax^2$ in un suo punto $P_0=(\alpha_0,\beta_0)$

Abbiamo visto che l'equazione cercata è quella della perpendicolare t_0 per P_0 alla retta FH. Il coefficiente angolare di questa è $m=-\frac{1}{2a\alpha_0}$ (differenza delle ordinate/differenza delle ascisse) e quello di una perpendicolare – inverso e opposto- risulta $m'=2a\alpha_0$. Allora l' equazione cercata è:
$y-\beta_0=2a\alpha_0(x-\alpha_0)$, cioè $y=2a\alpha_0x-2a\alpha_0^2+\beta_0$.
Poiché P_0 è un punto di γ_0, le sue coordinate α_0 e β_0 ne devono soddisfare l'equazione, cioè $\beta_0=a\alpha_0^2$; così l'ultima equazione si può scrivere:



(•) $$y=2a\alpha_0x-\beta_0 \text{ o } y=2a\alpha_0x-a\alpha_0^2.$$

Questa è dunque l'equazione della retta tangente alla parabola γ_0 di equazione $y=ax^2$ in suo qualunque punto $P_0=(\alpha_0,\beta_0)$.

Esempi

- Scrivere l'equazione della tangente alla parabola γ_0: $y=\frac{1}{2}x^2$ nel suo punto $T_0=(-2,2)$.

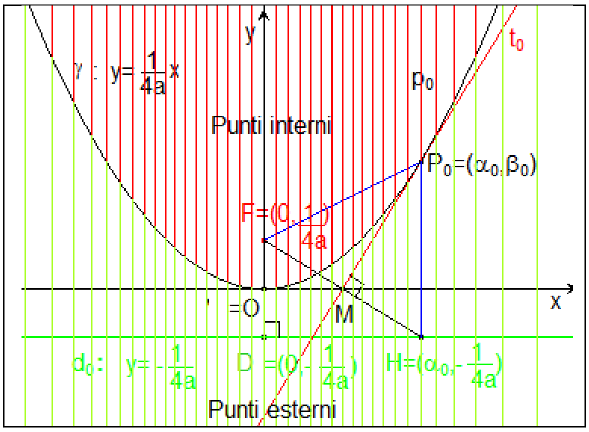
  Dalla (•) otteniamo: $y=2\frac{1}{2}(-2)x-2$, cioè $y=-2x-2$, che è l'equazione cercata.

- Determinare le coordinate del punto T_0 di contatto fra la retta t_0: $y=-2x+2$, tangente alla parabola γ_0: $y=-\frac{1}{2}x^2$, e questa.

Come prima, la tangente t_0 a γ_0 in un suo qualunque punto $P_0=(\alpha_0,\beta_0)$ è $y=2(-\frac{1}{2})\alpha_0x-\beta_0$, cioè $y=-\alpha_0x-\beta_0$. Dal confronto con $y=-2x+2$ otteniamo, dal principio d'identità dei polinomi, che $\alpha_0=2$ e $\beta_0=-2$; queste sono le coordinate cercate, quindi $T_0=(2,-2)$.

8. Equazioni delle tangenti a una parabola γ_0 di equazione $y=ax^2$ per un punto a essa esterno

In genere nei libri di testo, per segnalare quali sono i punti *interni* a una parabola o a essa *esterni*, si fa leva sull'aspetto "oculistico". La seguente è una semplice dimostrazione.



Osserviamo innanzitutto che (figura), se a>0 tracciata per un qualunque punto $P_0=(\alpha_0,\beta_0)$ della parabola la perpendicolare p_0 all'asse delle ascisse, questo determina su p_0 due semirette aperte delle quali in una, $p_0^>$ i punti hanno ordinata maggiore di β_0, nell'altra, $p_0^<$, i punti presentano ordinata minore di quella di β_0. Al variare di P_0 su γ_0 l'insieme descritto da $p_0^>$, sarà detto dei *punti interni* a essa, mentre quello determinato da $p_0^<$ verrà chiamato dei punti esterni a essa. Se a<0, sono *interni* i punti con ordinata *maggiore* di β_0, *esterni* quelli con ordinata *minore* di β_0.

Per trovare le equazioni delle tangenti alla parabola γ_0: $y=ax^2$, uscenti da un punto esterno $P=(\alpha,\beta)$, oltre al consueto procedimento si può suggerire il seguente, che utilizza l'equazione della tangente in un punto della parabola già trovata.

Accertiamoci innanzitutto che il punto sia esterno a γ_0, confrontando la sua ordinata β con quella della parabola che ha la stessa ascissa α. Scriviamo quindi l'equazione della tangente t_0 a γ_0 in un suo qualsiasi punto $P_0=(\alpha_0,\beta_0)$, che possiamo scrivere $P_0=(\alpha_0, a\alpha_0^2)$, poiché P_0 sta su γ_0 e ne soddisfa quindi l'equazione: (*) $\beta_0=a\alpha_0^2$. Imponiamo che t_0 passi per il punto P. L'equazione di t_0 sotto la forma (**) $y=2a\alpha_0x-a\alpha_0^2$, deve essere verificata dalle coordinate di P: $\beta=2a\alpha\alpha_0-a\alpha_0^2$, da questa si ha:

$a\alpha_0^2-2a\alpha\alpha_0+\beta=0$.

- Le soluzioni di questa equazione in α_0, α_{01} e α_{02} ,dànno i due valori che sostituiti in (*) forniscono le equazioni t_1 e t_2 delle tangenti da $P=(\alpha,\beta)$.
- Inoltre, i due valori di α_0, α_{01} e α_{02}, avvicendati in $\beta_0=a\alpha_0^2$, consentono di determinare le coordinate dei punti T_1 e T_2 di contatto delle due tangenti con la parabola: $T_1=(\alpha_{01},a\alpha_{01}^2)$ e $T_2=(\alpha_{02},a\alpha_{02}^2)$.

Esempi

- Trovare le equazioni delle tangenti alla parabola γ_0 di equazione (*) $y=\frac{1}{2}x^2$ condotte dal punto T=(0,-2) esterno (verificatelo).

Sia $P_0=(\alpha_0,\beta_0)$ un qualunque punto di γ_0; α_0 e β_0 soddisfano la (*), quindi (**) $\beta_0=\frac{1}{2}\alpha_0^2$ e così $P_0=(\alpha_0, \frac{1}{2}\alpha_0^2)$. Dalla (•) l'equazione della tangente t_0 a γ_0 in $P_0=(\alpha_0,\frac{1}{2}\alpha_0^2)$ è:

(≈) $$y=2\frac{1}{2}\alpha_0x-\frac{1}{2}\alpha_0^2$$

Imponendo che le coordinate di T la soddisfino, essa diventa: $-2=-\frac{1}{2}\alpha_0^2$, ossia $\alpha_0^2=4$, cioè $\alpha_0=\pm2$.

Sostituendo questi valori nella (≈) otteniamo le equazioni delle due tangenti t_1: y= -2x-2 e t_2: y= 2x-2.

Troviamo ora le coordinate dei punti T_1 e T_2 di contatto. Sostituendo i due valori di α_0 in (**), otteniamo che $T_1=(-2,2)$ e $T_2=(2,2)$.

- Scrivere le equazioni delle tangenti alla parabola γ_0 di equazione $y=-\frac{1}{4}x^2$ tracciate dal punto T= (-1,2) esterno (verificatelo).

Dalla (•) $y=2a\alpha_0x-a\alpha_0^2$, l'equazione della tangente t_0 a γ_0 in un suo qualunque punto $P_0=(\alpha_0,\beta_0)$ in cui (*) $\beta_0=-\frac{1}{4}\alpha_0^2$ è: (≈) $y=2(-\frac{1}{4})\alpha_0x+\frac{1}{4}\alpha_0^2$, cioè $y=\frac{1}{2}\alpha_0+\frac{1}{4}\alpha_0^2$, Imponendo che essa sia soddisfatta dalle coordinate di T= (-1,2), abbiamo: $2=\frac{1}{2}\alpha_0+\frac{1}{4}\alpha_0^2$, cioè $\alpha_0^2+2\alpha_0-8=0$. Risolvendola otteniamo i valori $\alpha_0=4$ e $\alpha_0=-2$ che, sostituiti nella (≈), forniscono le equazioni delle due tangenti dal punto T= (-1,2): $y=-2x-4$ e $y=-x+1$.
Determiniamo le coordinate dei punti T_1 e T_2 di contatto. Sostituendo i due valori di α_0 in (*), otteniamo che $T_1=(4,-4)$ e $T_2=(-2,1)$.

9. Equazione di una parabola γ con l'asse di simmetria a parallelo all'asse $\vec{y}$

Riprendiamo alcune proprietà della *traslazione*, che saranno molto utili per il nostro scopo:
- muta rette in rette parallele;
- trasforma segmenti in segmenti equipollenti.

Sappiamo poi che le equazioni della traslazione τ che trasforma l'origine O=(0,0) nel punto $O'=(x_0,y_0)$ sono:

(*) $$\begin{cases} x'=x+x_0 \\ y'=y+y_0 \end{cases}$$

Esse danno le coordinate di $P'=(x',y')$ traslato di un punto P=(x,y). Dalla (*) otteniamo

(**) $$\begin{cases} x=x'-x_0 \\ y=y'-y_0 \end{cases}$$

Queste permettono di determinare l'equazione della traslata in τ di una curva di data equazione, sostituendo $x'-x_0$ a x e $y'-y_0$ a y.
In relazione a esse osserviamo che il sistema di coordinate non è cambiato, perché τ è una traslazione del piano, non degli assi coordinati. E l'apice in x' e y' indica solo la nuova posizione P' di P; ma, avvenuta la redistribuzione dei punti nel piano, l'apice perde il suo ruolo, e quindi le equazioni (**) si possono scrivere senza apice, come sostituzioni di x con $x-x_0$ e y con $y-y_0$, che indichiamo come segue:

($) $$\begin{cases} x\to x-x_0 \\ y\to y-y_0 \end{cases}$$

Consideriamo ora la traslazione τ che muta O=(0,0) in un generico punto $V=(x_v,y_v)$ e determiniamo l'equazione della curva γ immagine della parabola γ_0: $y=ax^2$. Come abbiamo appena visto, l'equazione di γ si ottiene da $y=ax^2$ mediante le sostituzioni:

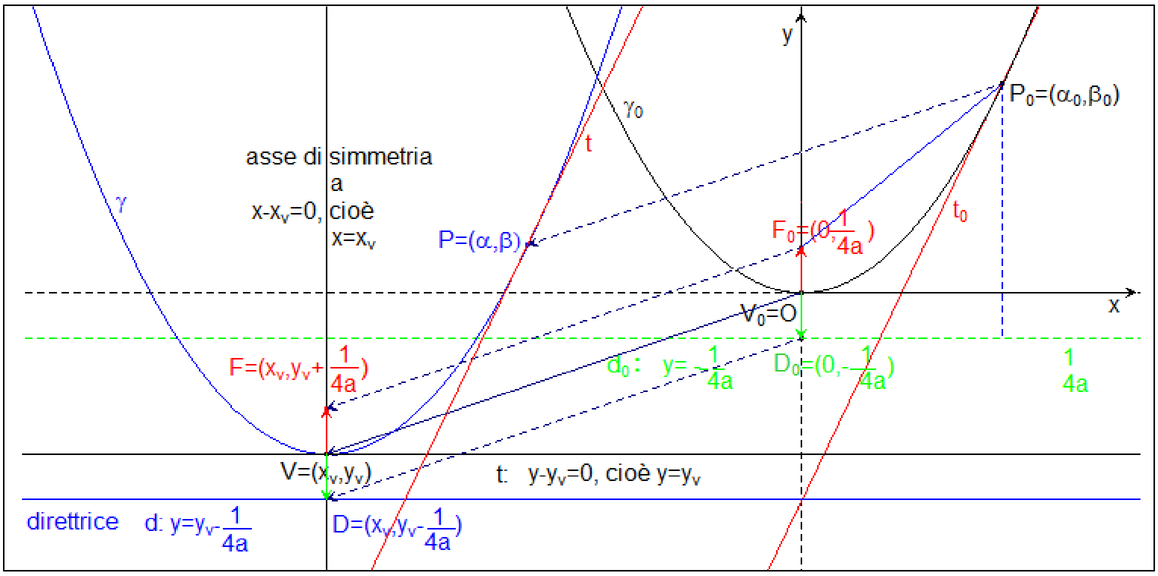
(***) $$\begin{cases} x\to x-x_V \\ y\to y-y_V \end{cases}$$

Essa assume così la forma:

(#) $$y-y_v=a(x-x_v)^2$$

Poiché τ è un'isometria - mantiene quindi invariate le distanze - quest'equazione rappresenta ancora una parabola in forza della definizione. Per le proprietà della traslazione individuata dalle (***), **γ** ha le seguenti caratteristiche: (figura sotto)

- Il punto $V=(x_v,y_v)$ dà le coordinate del vertice.
- Il fuoco $F=(x_f,y_f)$ ha coordinate $x_f=x_v$ e $y_f = y_v + (1/4a)$ ($\overrightarrow{VF}$ è equipollente a $\overrightarrow{V_0F_0}$). L'equazione della



tangente t nel vertice, traslata dell'asse $\vec{x}$ - che ha equazione y=0 –per la seconda delle (***), $y-y_v=0$, ossia $y= y_v$ (parallela all'asse $\vec{x}$: una retta si trasforma in una parallela).
- Detto D il traslato di D_0 (intersezione dell'asse $\vec{y}$ con la direttrice d_0: $y=-1/4a$), $D=(x_v, y_v -1/4a)$, perché $\overrightarrow{VF}$ è equipollente $\overrightarrow{V_0F_0}$; quindi l'equazione della direttrice d è $y = y_V - \dfrac{1}{4a}$.
- V è il punto medio del segmento FD, da cui: $y_V = \dfrac{y_F + y_D}{2}$

Osservazione

Poiché $y=ax^2$ ($a\neq0$) rappresenta tutte e sole le parabole col fuoco sull'asse $\vec{y}$ e direttrice parallela all'asse $\vec{x}$, l'equazione $y-y_v=a(x-x_v)^2$ esprime tutte e sole le parabole γ che hanno fuoco in un qualsiasi punto F del piano e direttrice d parallela all'asse $\vec{x}$; il vertice è $V=(x_v,y_v)$.
Se nella (#) svolgiamo i calcoli, otteniamo:

$$y-y_v=ax^2-2ax_vx+ax_v^2 \text{ o anche } y=ax^2-2ax_vx+ax_v^2+y_v,$$

il cui secondo membro è un polinomio di secondo grado; l'equazione è così del tipo:

(&) $$y=ax^2+bx+c$$

Affinché i secondi membri delle ultime due equazioni coincidano, per il principio d'identità dei polinomi, deve essere:

- $b=-2ax_v$, da cui $x_v=-b/2a$;
- $c=ax_v^2+y_v$, che per la precedente diventa $c=a(-b/2a)^2+y_v$ da cui $y_V = c - a\dfrac{b^2}{4a^2}$, cioè

$y_V = c - \dfrac{b^2}{4a}$ e infine $y_V = \dfrac{4ac-b^2}{4a}$ o anche $y_V = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

Facciamo notare che, trovata l'ascissa x_v del vertice, la sua ordinata y_v si può ottenere sostituendo il valore di x_v al posto di x in $y=ax^2+bx+c$, poiché il vertice è un punto della parabola e quindi le sue coordinate ne devono soddisfare l'equazione: $y_v =y(x_v)$.

Esempio

In $y=x^2-4x+3$, $x_v=b/2a=2$ e quindi $y_v=y(2)=2^2-8+3$, da cui $y_v=-1$.

Le considerazioni precedenti assicurano che l'equazione $y=ax^2+bx+c$ rappresenta nel piano cartesiano una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse $\vec{y}$; le coordinate del suo vertice sono:

$$\begin{cases} x_V = -\dfrac{b}{2a} \\ y_V = y(x_V) = -\dfrac{b^2-4ac}{4a} \end{cases}$$

I precedenti punti 2 e 4, consentono di scrivere espressamente, *se servono*, l'ordinata del fuoco e l'equazione della direttrice (l'ascissa del fuoco è uguale a quella del vertice):

- $y_f = y_v + 1/4a$, cioè $y_f = -\dfrac{b^2-4ac}{4a} + \dfrac{1}{4a}$.
- L'equazione della direttrice è $y = -\dfrac{b^2-4ac}{4a} - \dfrac{1}{4a}$.

N.B.

L'equazione della parabola sotto la forma $y-y_v=a(x-x_v)^2$ e le relazioni che coinvolgono fuoco, direttrice e vertice:

- $x_f = x_v = -b/2a$ (l'equazione dell'asse di simmetria x==-b/2a)
- $y_f = y_v + 1/4a$
- $y_V \dfrac{y_F + y_D}{2}$
- equazione della direttrice $y= y_v-1/4a$,

consentono di risolvere, con pochi calcoli, molti problemi relativi alla parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse $\vec{y}$.

Prima di qualche altro esempio due riflessioni e una osservazione che permette di trovare le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice, usando i punti 2. e 4. precedenti.

- La parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$ è chiaramente legata all'equazione generale di secondo grado $ax^2+bx+c=0$.
- Essa permette inoltre di svolgere in modo semplice e chiaro il segno di un polinomio di secondo grado ax^2+bx+c, quindi di risolvere le disequazioni di secondo grado, soprattutto se associata all'uso di *software* dinamici che determinano luoghi anche di semirette o segmenti.

Queste riflessioni suggeriscono che sarebbe allora opportuno introdurre la parabola prima della circonferenza nello studio delle coniche.

Osservazione

Sia $T(x)=ax^2+bx+c$ un trinomio di secondo grado con $\Delta \neq 0$. Mediante il *completamento del quadrato* T(x) si può scrivere come differenza o somma di quadrati. Qualche esempio.

$T_1(x)=x^2-6x+5$. $T_1(x)=x^2-2\cdot3x+5=x^2-2\cdot3x+9-9+5=(x^2-2\cdot3x+9)-9+5$;cioè $T_1(x)=(x-3)^2-4$.

$T_2(x)=x^2-3x-4$. $T_2(x)= x^2-2\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{4}-\dfrac{9}{4}-4$, da cui $T_2(x)=(x-\dfrac{3}{2})^2-\dfrac{25}{4}$.

$T_3(x)=2x^2-3x+1$. Moltiplicando e dividendo per 2 coefficiente di x^2, $T_3(x)=2(x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2})$ che, in virtù del procedimento precedente, diventa $T_3(x)=2\left(x^2-2\dfrac{3}{4}x+\dfrac{9}{16}-\dfrac{9}{16}+\dfrac{1}{2}\right)$, ovvero

$T_3(x)=2[(x^2-2\dfrac{3}{4}x+\dfrac{9}{16})-\dfrac{1}{16}]$, quindi $T_3(x)=2(x-\dfrac{3}{4})^2-\dfrac{1}{4}$ (2 è quadrato di $\sqrt{2}$).

Le considerazioni precedenti consentono di scrivere le parabole di equazione $y=x^2-6x+5$, $y= x^2-3x-4$ e $y= 2x^2-3x+1$ sotto la forma $y-y_v=a(x-x_v)^2$, che permette di ottenere facilmente coordinate del vertice e del fuoco ed equazione della direttrice.

Per $y=x^2-6x+5$, abbiamo $y=(x-3)^2-4$, cioè $y+4=(x-3)^2$. Da cui $x_v=3$, $y_v=-4$, $x_f=x_v=3$; da 2. del § 3 $y_f=y_v+(1/4a)$ che, per noi diventa: $y_f=-4+1/4$, ossia $y_f=-17/4$.
La direttrice ha equazione $y=y_v-1/4a$, che dà $y=-4-1/4$, quindi $y=-17/4$.

Analogamente l'equazione $y=x^2-3x-4$ si può scrivere: $y=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{25}{4}$, dalla quale si ha $y+\frac{25}{4}=(x-\frac{3}{2})^2$.

Così: $x_f=x_v=3$, $y_f=-\frac{25}{4}$ e l'equazione della direttrice è $y=-\frac{25}{4}-\frac{1}{4}$, cioè $y=-\frac{13}{2}$. Da cui $x_f=x_v=\frac{3}{4}$, $y_v=-\frac{1}{4}$, $x_f=$, $y_f=-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=-\frac{1}{4}$ e l'equazione della direttrice è $y=-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$, cioè $y=-\frac{3}{4}$.

Per i problemi di "passaggio per punti" o "altro" si può usare la $y=ax^2+bx+c$.
Qualche altro esempio.

- Equazione della parabola noto il vertice $V=(2,-1)$ e passante per $A=(-1,8)$.

Da $y-y_v=a(x-x_v)^2$ deriva $y+1=a(x-2)^2$; imponiamo in questa il passaggio per A si ha $8+1=a(-1-2)^2$, da cui $a=1$: quindi l'equazione cercata è $y=x^2-4x+3$.

- Equazione di una parabola di fuoco $F=(4,5)$ e direttrice di equazione $y=1$.

Si ha $x_v=x_f=4$; inoltre $y_V=\frac{y_F+y_D}{2}$, quindi $y_V=\frac{5+1}{2}=3$. Da $y-y_v=a(x-x_v)^2$, l'equazione è (*) $y-3=a(x-4)^2$; e, dato che $y_f=y_v+1/4a$, si ha $5=3+\frac{1}{4a}$, cioè $20a=12a+1$, da cui $a=\frac{1}{8}$ che sostituito nella (*) dà $y-3=\frac{1}{8}(x-4)^2$ cioè, svolgendo i calcoli, $y=\frac{1}{8}x^2-x+5$.

- Trovare coordinate di vertice V e fuoco F della parabola di equazione: $y=x^2-4x+3$; determinare inoltre le equazioni dell'asse di simmetria e della direttrice.

L'ascissa di V è $x_v=-b/2a$, cioè $x_v=2$; l'ordinata $y_v=y(x_v)=4-8+3$, quindi $y=-1$.
L'ascissa di F è $x_f=x_v=2$; la sua ordinata è $y_f=y_v+1/4a$, cioè $y_f=-1+1/4=-3/4$.
L'equazione dell'asse di simmetria è $x=x_v$, ossia $x=2$, e l'equazione della direttrice è $y=y_v-1/4a$, ovvero $y=-1-1/4=-5/4$.

10. Equazione della tangente alla parabola γ: $y=ax^2+bx+c$ in un suo punto $P=(\alpha,\beta)$.

Ci serviremo ancora della traslazione τ di equazioni

$$\begin{cases} x'=x+x_V \\ y'=y+y_V \end{cases} \quad \text{da cui derivano le sostituzioni} \quad \begin{cases} x\to x+x_V \\ y\to y+y_V \end{cases}$$

che permettono di traslare una curva.
Tenendo ora conto che in τ un punto $P_0=(\alpha_0,\beta_0)$ del piano si trasforma in $P=(\alpha,\beta)$ tale che

$$\begin{cases} \alpha=\alpha_0+x_V \\ \beta=\beta_0+y_V \end{cases} \quad \text{abbiamo che} \quad \begin{cases} \alpha_0=\alpha-x_V \\ \beta_0=\beta-y_V \end{cases}$$

Mediante τ, da γ_0: $y=ax^2$, abbiamo ottenuto l'equazione della parabola traslata γ di l'equazione $y-y_v=a(x-x_v)^2$, il cui asse di simmetria è parallelo all'asse $\vec{y}$; essa si può scrivere come $y=ax^2+bx+c$. Indicato poi con $P=(\alpha,\beta)$ un qualunque punto di γ, sia $P_0=(\alpha_0,\beta_0)$ il punto di γ_0 che ha per immagine in τ $P=(\alpha,\beta)$. Sappiamo che l'equazione della tangente t_0 a γ_0 in $P_0=(\alpha_0,\beta_0)$ è $y=2a\alpha_0x-\beta_0$; allora l'equazione della tangente a γ in $P=(\alpha,\beta)$ è quella della retta t che passa per esso ed è parallela a t_0, perché in una traslazione una retta ha per corrispondente una retta parallela. Il coefficiente angolare di t_0 è $m=2a\alpha_0$ che, essendo $\alpha_0=\alpha-x_v$ diventa $m=2a(\alpha-x_v)$; di conseguenza l'equazione di t è:

$$y-\beta=2a(\alpha-x_v)(x-\alpha).$$

Questa è dunque l'equazione della retta tangente alla parabola γ: $y=ax^2+bx+c$ in un suo punto $P=(\alpha,\beta)$.

Per ciò che riguarda punti interni o esterni e le tangenti alla parabola γ, valgono le argomentazioni esposte per la parabola γ_0.

Esempi

- Scrivere l'equazione della tangente alla parabola γ: $y=x^2-4x+3$, nel suo punto $A=(0,3)$.

L'ascissa del vertice V è $x_v=-b/2a=2$ e il suo coefficiente angolare $m=2a(\alpha-x_v)=2(0-2)=-4$;
l'equazione della tangente in A è allora: $y-3=-4\,x$, cioè: $y=-4x+3$
Per quanto riguarda le equazioni delle tangenti a una parabola del tipo $y=ax^2+bx+c$ condotte da un punto a essa esterno, si può procedere in analogia a ciò che si è fatto per $y=ax^2$.

- Scrivere le equazioni delle tangenti alla parabola γ: $y=-x^2-2x+3$, condotte dal punto $P=(-3,1)$ (esterno a γ come è facile verificare).

L'equazione della tangente t a γ in un suo punto $A=(\alpha,\beta)$ è, $y-\beta=2a(\alpha-x_v)(x-\alpha)$; troviamo per primo l'ascissa del vertice, $x_v=-b/2a$, $x_v=-1$. L'equazione di diventa: $y-\beta=-2(\alpha+1)(x-\alpha)$. Imponiamo che la retta t passi per $P=(-3,1)$, sostituendo le sue coordinate nell'equazione, abbiamo: (*) $y-\beta=-2(\alpha+1)(x-\alpha)$. Poiché A sta sulla parabola, (#) $\beta=-\alpha^2-2\alpha+3$, così l'equazione, diventa $1-\beta=-2(\alpha+1)(-3-\alpha)$ cioè $\alpha^2+2\alpha-2=-2(-a^2-4a-3)$ che, svolgendo i calcoli dà: $\alpha^2+6\alpha+8=0$. Risolvendo questa otteniamo i valori $\alpha_1=-2$ e $\alpha_2=-4$ che:

- Sostituiti nella (*) forniscono le equazioni delle rette tangenti t_1 e t_2 a γ uscenti da $P=(-3,1)$, che risultano: $y=2x+7$ e $y=6x+19$.
- Messi al posto delle in (#) permettono di determinare le coordinate dei punti di contatto $T_1=(-2,3)$ e $T_2=(-4,-5)$ delle due tangenti con la parabola.

Molteplici sono le applicazioni della parabola. Ne segnaliamo alcune.
Con antenne o specchi parabolici molto grandi si raccolgono, nel fuoco, deboli segnali di eventi lontanissimi nello spazio e nel tempo.
Diverse sono in fisica le leggi che si esprimono mediante funzioni paraboliche. Una che conoscete è quella del moto con accelerazione costante **a** che lega lo spazio al tempo, che nella formulazione generale è $s=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0$, dove v_0 ed s_0 indicano rispettivamente velocità e spazio al tempo $t=0$ (l'insegnante ne saprà presentare altre parimenti importanti).
Concludiamo questa proposta didattica evidenziando due aspetti di quella che il premio Nobel per la fisica del 1983, Wigner definisce la "*irragionevole efficacia*" del linguaggio della matematica nella formulazione delle leggi della natura.
Il primo è indicato da Galileo nel celebre passo de *Il Saggiatore*: in cui sostiene che
«…il grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto».
Il secondo è ancora più stupefacente: concetti e relazioni che i matematici studiano per considerazioni ed esigenze che non hanno a prima vista legami con eventuali applicazioni, si rivelano a distanza di decenni o addirittura di secoli soluzioni inaspettate di problemi che hanno le loro radici nella realtà fisica.
Le coniche ne rappresentano un esempio significativo.
Galileo scoprì che l'equazione della parabola rappresenta il moto uniformemente accelerato, a esempio dei proiettili e più in generale dei corpi che si muovono in vicinanza della Terra.
La legge di Boyle, che regola come variano pressione e volume di un gas (ideale) se la temperatura è tenuta costante, riproduce un'iperbole equilatera.
Keplero scoprì che le orbite dei pianeti sono ellissi di cui il sole occupa uno dei fuochi, e Newton aprì lo scrigno che conteneva i segreti del moto dei corpi del sistema solare:
sono trascorsi quasi duemila anni da Menecmo!
Vi esortiamo a riflettete su questo.

Alfino Grasso

176. Il pendolo di Foucault

Michele T. Mazzucato
mazzucatomichele@tiscali.it

Abstract
The French physicist Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868) and his experiments with the pendulum. The visual and practical demonstration of the Earth rotation.

Vous êtes invités à venir voir tourner la Terre
Léon Foucault, Parigi 1851

Jean Bernard Léon Foucault
Nel marzo del 1851 venne inaugurato un celebre esperimento pubblico che permise di dimostrare, prima volta nella storia, la rotazione della Terra attorno al proprio asse polare attraverso l'effetto della forza apparente di Coriolis senza ricorrere a osservazioni astronomiche. All'interno del Panthéon parigino venne sospeso alla cupola centrale un pendolo costituito da una sfera metallica dal peso di 28 chilogrammi mediante un cavo d'acciaio lungo 67 metri e 1,4 millimetri di diametro. Sotto al pendolo, per una superficie circolare di 3 metri di raggio, venne sistemato uno strato uniforme di sabbia sul quale una punta fissata sulla sfera lasciava una traccia visiva ad ogni oscillazione. Era il cosiddetto pendolo di Foucault dal nome di uno dei più noti fisici sperimentali francesi suo ideatore: Jean Bernard Léon Foucault.

Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868).

Emissione filatelica francese in occasione del primo centenario della morte di Léon Foucault (1968).

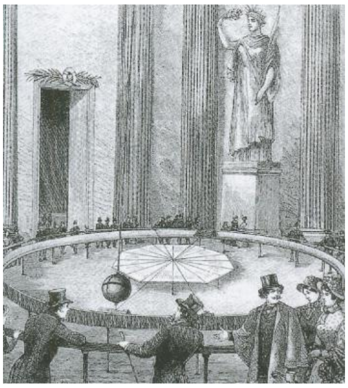
Foucault nacque a Parigi il sabato 18 settembre 1819. Intraprese studi medici che lasciò per approfondire quelli fisici. Lavorò anche presso l'Osservatorio Astronomico di Parigi. Si occupò di elettromagnetismo, di ottica e di geofisica. Insieme a Hippolyte Louis Armand Fizeau (1819-1896) effettuò esperimenti sulla fotografia solare e apportò miglioramenti delle tecniche di dagherrotipia (il primo procedimento fotografico per lo sviluppo delle immagini) e scoprendo il difetto di reciprocità.
Misurò con grande precisione la velocità della luce con il dispositivo degli specchi rotanti (1862) e dimostrò che essa è inversamente proporzionale all'indice di rifrazione del mezzo che attraversa (1850). Nel 1851 effettuò la celebre esperienza pubblica, oggetto di questo scritto, sulla proprietà di invarianza del piano di oscillazione del pendolo. Ideò il giroscopio (1852), un polarizzatore per la luce (1857) e apportò miglioramenti agli strumenti ottici in particolare ai metodi di lavorazione degli specchi utilizzati nei telescopi (ancora oggi per definire la qualità di lenti e specchi si esegue un metodo da lui sviluppato e denominato *test di Foucault*). Scoprì le correnti elettriche parassite (1855), denominate anche *correnti di Foucault*, generate nei conduttori dai campi magnetici.

Membro straniero alla Royal Society di Londra (1864), membro del Bureau des Longitudes (1862), membro fondatore della Société Française de Photographie (1854), ottenne numerosi riconoscimenti fra cui il cavalierato della Legione d'onore francese (1850) e la medaglia Copley (1855). Morì a Parigi martedì 11 febbraio 1868 all'età di quarantanove anni a seguito di una paralisi progressiva (oggi nota anche come morbo di Lou Gehrig) le cui prime acute manifestazioni si presentarono già nel luglio 1867.

A Foucault è dedicato un cratere selenico (50.4° N / 39.7° W; 23 chilometri di diametro e 2100 metri di altezza) e l'asteroide *(5668) Foucault* scoperto nel marzo 1984 dall'astromono Antonín Mrkos (1918-1996). Il nome Foucault (n. 46 sul lato École Militaire) è compreso nella lista dei settantadue nominativi di personalità francesi scelti dallo stesso Alexandre Gustave Eiffel (1832-1923) che volle inciderli (diciotto per lato) ai quattro lati esterni (Trocadéro, Grenelle, École Militaire e La Boudonnais-Paris) del primo piano della Torre Eiffel (1889) ad una altezza di circa 60 metri dal suolo. A lato la tomba di Léon Foucault nel cimitero di Montmartre a Parigi.

L'esperimento di Foucault del 1851

L'esperimento pubblico del Panthéon seguì i due precedenti effettuati dallo stesso Foucault. Il primo, nel gennaio 1851, utilizzando un pendolo di circa 2 metri nella cantina della sua casa in rue d'Assas e il secondo, nel febbraio 1851, con un pendolo di circa 11 metri nella Sala Meridiana presso l'Osservatorio Astronomico di Parigi, dove stava lavorando proprio alla sistemazione di un pendolo conico necessario a orientare un telescopio rilevandone appunto dei movimenti anomali nel suo moto e cercando quindi di capirne le cause.
A firma di François Jean Dominique Arago (1786-1853), allora direttore dell'Osservatorio di Parigi, il biglietto di invito recitava: "*Siete inviati a venire a vedere la Terra girare...*".
Di questa sua scoperta Foucault scriveva: "Il fenomeno si sviluppa con calma: è fatale, irreversibile... Si sente, vedendolo nascere e intensificarsi, che non è possibile per lo sperimentatore affrontarne o ritardarne la manifestazione... Ogni uomo davanti ad un tale fatto... per qualche istante rimane pensoso e silenzioso e si ritira quindi recando in sé il senso pressante e vivissimo del nostro incessante movimento nello spazio".



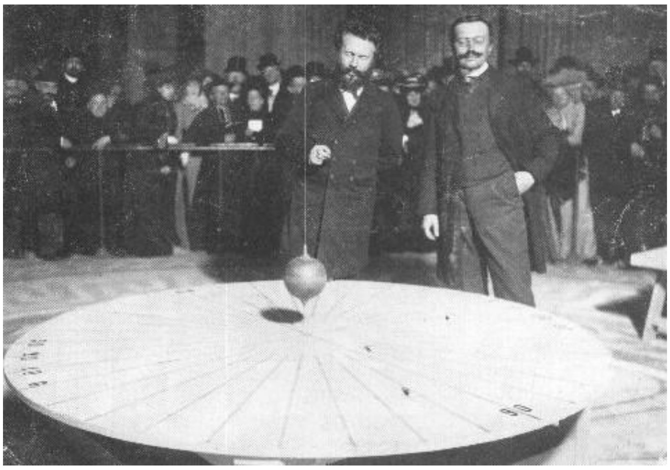
L'esperimento del Panthéon nel 1851, sotto la guida di Foucault e dell'ingegnere Paul Gustave Froment (1815-1865), ebbe enorme successo e risonanza nella pubblica opinione che venne replicato e riprodotto in moltissime località del mondo.
Sempre al Panthéon di Parigi venne effettuato un altro esperimento nel 1902, in occasione del cinquantenario della famosa esperienza di Foucault, sotto la guida di Nicolas Camille Flammarion (1842-1925) e dell'ingegnere Alphonse Berget (1860-1934) e dal 1995, la cui istallazione è stata affidata all'ingegnere Jacques Foiret, è possibile ammirarne una terza fedele ricostruzione. Oggi il pendolo di Foucault viene replicato in molti istituti, musei e luoghi di scienza e conoscenza pressoché a scopi prettamente didattici ma d'allora oggetto di fascino e di riflessioni.

Dati dell'esperimento del Panthéon 1851

giorno siderale	23.93h = 23h 56m 04.91s	ts
accelerazione di gravità	9.81 m/s^2	g
peso sfera	28 kg	
diametro sfera	38 cm	
lunghezza cavo	67 m	L
durata doppia oscillazione	16.4 s	$2\pi(L/g)^{0.5}$
spostamento lineare ogni doppia oscillazione	2.5 mm verso est	
latitudine del luogo	48.87° = 48°52′ Nord	φ
tempo di rotazione completa del piano (in ore)	31.78h = 31h 46m 41s	ts/senφ
tempo di rotazione completa del piano (in gradi)	477.97°	360/senφ
componente verticale (gradi/ora)	11.33° = 11° 19′ 43′′	(360/ts)senφ
componente orizzontale (gradi/ora)	9.89° = 9° 53′ 39′′	(360/ts)cosφ

L'esperimento di Flammarion del 1902

In omaggio a Foucault e al suo esperimento del 1851 Flammarion, nel prologo del suo discorso inaugurale del 22 ottobre, disse: *"Era la dimostrazione pratica, evidente, maestosa, del movimento di rotazione del nostro globo e l'affermazione grammaticale del titolo di pianeta, o 'astro mobile', per il mondo che abitiamo"*.



Il giornale francese *Le Petit Parisien* (1876-1944) nel *Supplément Littéraire Illustré* di domenica 2 novembre 1902 riporta l'esperimento di Flammarion.

Che il periodo dipendesse dalla sua lunghezza e dal valore dell'accelerazione di gravità del luogo erano proprietà caratteristiche del moto di un pendolo già conosciute alla fine del XVI secolo, Foucault studiò e aggiunse quella della rotazione apparente del suo piano di oscillazione.

L'oscillazione del pendolo è indipendente dalla rotazione che la Terra compie ruotando, da ovest verso est, intorno al proprio asse polare in 23 ore 56 minuti 04.91 secondi (86164.91 secondi corrispondenti all'intervallo di tempo, denominato giorno siderale, che intercorre tra due passaggi consecutivi di una stella, supposta fissa nella sfera celeste, sullo stesso meridiano del luogo di osservazione) rispetto alle stelle fisse (sistema di riferimento inerziale). Il piano di oscillazione del pendolo mantiene invariata la direzione rispetto alle stelle fisse, ma l'osservatore che ruota assieme alla Terra (sistema di riferimento non inerziale), vedrà tale piano ruotare lentamente di un angolo dipendente dalla latitudine del luogo.

Una completa rotazione apparente del piano di oscillazione del pendolo (giorno pendolare) avviene in un giorno siderale di 23.93 ore (360/23.93= 15.041° ogni ora) al Polo Nord (in senso orario) e al Polo Sud (in senso antiorario). A latitudini intermedie, procedendo dai poli all'equatore, la rotazione rallenta sempre più fino ad arrestarsi.

Rotazione completa del piano di oscillazione del pendolo e relativa velocità angolare alle varie latitudini geografiche

latitudine	rotazione completa in	velocità angolare di
± 90°	23.93 ore	15.04° /ora
± 80°	24.30 ore	14.81° /ora
± 70°	25.47 ore	14.13° /ora
± 60°	27.63 ore	13.03° /ora
± 50°	31.24 ore	11.52° /ora
± 40°	37.24 ore	9.67° /ora
± 30°	47.87 ore	7.52° /ora
± 20°	69.98 ore	5.14° /ora
± 10°	137.83 ore	2.61° /ora
± 0°	0.00 ore	0.00° /ora

rot. compl. = 23.93ore/senφ [in ore]   vel. ang. = (360°/23.93ore)senφ [in gradi/ora]

A latitudini intermedie la frequenza di rotazione polare, $\omega = 360°/23{,}93h$, viene scomposta nelle due componenti orizzontale, $\omega_o = (360°/23{,}93h)\cos\varphi$, tangente alla superficie terrestre e astronomicamente vista come la velocità angolare di transito delle stelle allo zenit del luogo e verticale, $\omega_v = (360°/23{,}93h)\text{sen}\varphi$, perpendicolare al punto di latitudine φ e astronomicamente vista come velocità angolare di transito delle stelle all'orizzonte. La prima ha influenza sul moto verticale degli oggetti (deviazione verso est dei corpi in caduta libera) ma non sul moto del pendolo. Mentre è la seconda componente a influenzare in maniera macroscopica la rotazione apparente del piano di oscillazione del pendolo.
La scoperta degli effetti della componente verticale della rotazione terrestre è dovuta agli studi di Siméon Denis Poisson (1781-1840) e del suo allievo Gustave Gaspard de Coriolis (1792-1843) nei lavori *Mémoire sur le mouvement des projectiles dans l'air, en ayant égard à la rotation de la Terre* (1837) e *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps* (1835) mentre Foucault rese visibili tali effetti, il suo scritto è *Démonstration du Mouvement de Rotation de la Terre au moyen du Pendule* (1851).
Un quarto e ultimo pendolo, anch'esso di 11 metri come quello dell'Osservatorio Astronomico, venne realizzato ed esposto nel Palazzo dell'Industria (demolito nel 1900) da Foucault per la prima Esposizione Universale tenutasi a Parigi nel maggio-novembre 1855.
Sicuramente il migliore tra quelli realizzati da Foucault in quanto beneficiante dell'esperienza acquisita dai precedenti. Nell'occasione Foucault era membro della giuria della classe 9 *Impiego economico del calore, della luce e dell'elettricità* (come lo sarà per la seconda Esposizione Universale parigina del 1867 però per la classe 12 *Strumenti di precisione e materiale didattico*) pertanto il fisico scozzese David Brewster (1781-1868) in qualità di presidente e gli altri membri della giuria mista nel loro rapporto scriveranno: "*Le Jury, qui aurait décerné la plus haute distinction à M. Foucault, s'il n'avait pas été hors de concours comme juré, a décidé que sa belle découverte serait mentionnée de la manière la plus honorable*". Il pendolo dell'Esposizione e il suo nuovo sistema di guida furono donati, nel 1869, al Conservatoire Impérial des Arts et Métiers.
L'opera completa di Foucault *Receuil des travaux scientifiques de Léon Foucault* (2 volumi, 1878) è stata curata da Aimée Nicole Lepetit (1793-1880), madre di Foucault, e da Charles Marie Gariel (1841-1924), professore di fisica e marito di Marguerite (1846-1928), nipote di Foucault figlia della sorella Aimée Alexandrine Fortunée (1823-1904) con il primo marito.

A lato l'interno del Panthéon, opera dell'architetto Jacques Germain Soufflot (1713-1780), con l'esposizione del pendolo di Foucault installato dal 1995.

Bibliografia

Aczel, D. Amir, Pendulum. Léon Foucault e il trionfo della scienza, Il Saggiatore, Milano 2006

Tobin, William, *Lèon Foucault*, EDP Sciences 2002

Receuil des travaux scientifiques de Léon Foucault (2 volumi, 1878) online(University of Strasbourg)

http://imgbase-scd-ulp.u-strasbg.fr/displayimage.php?album=627&pos=3 vol. I

http://imgbase-scd-ulp.u-strasbg.fr/displayimage.php?album=648&pos=1 vol. II

Simulazione dell'esperimento di Foucault a cura di Massimo Fantin, 2005

http://digilander.libero.it/fantinma/foucault/foucault.htm

Simulazione dell'esperimento di Foucault (Università di Nantes)

http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/RefTerre/Foucault0.html

177. Lezioni di scripting in LSL a Scriptlandia

Rosa Marincola
rosamarincola@virgilio.it

Premessa

Scriptlandia è stata creata il 7 dicembre 2012 ed è costituita da un piccolo arcipelago nel mondo virtuale 3D **edMondo**. È una realtà finalizzata a percorsi didattici sperimentali basati su applicazioni d'intelligenza artificiale che il MIUR e l'INDIRE conducono con docenti di alcune scuole d'Italia (http://www.scuola-digitale.it/ed-mondo/progetto/info/). Tra questi, la classe III A Sistemi Informativi Aziendali, dell'indirizzo Tecnico Economico dell'IIS "A. Guarasci" di Rogliano (Cs) sotto la mia guida in qualità di docente d'informatica, ha avviato un percorso innovativo sull'uso delle tecnologie in classe. In questo spazio protetto, gli utenti autorizzati e registrati, accedono mediante avatar che possono camminare, volare e teletrasportarsi da una regione all'altra. All'atto della consegna, **Scriptlandia** era solo una landa desolata e informe, ma già in poco tempo si è notevolmente evoluta e arricchita. L'arcipelago è stato "terraformato" su modello di tre isole delle Galápagos:

Virtual Lab: dove gli studenti svolgono le loro esercitazioni e sperimentazioni sotto la guida della loro docente d'informatica. In questo spazio la classe svolge attività di building 3D, ma soprattutto di programmazione (scripting) in LSL (Linden Scripting Language) in presenza e, talvolta a distanza.

Agorà: un luogo d'incontro con un anfiteatro in posizione centrale dove si può discutere, condividere esperienze, organizzare attività ed eventi, esporre lavori della classe di tipo interdisciplinare in mostre temporanee e permanenti.

Library: uno spazio dedicato a un percorso didattico d'informatica con materiali fruibili da tutti i visitatori. Si tratta di una biblioteca virtuale 3D molto insolita: è dominata *dall'Albero della cultura* (per gentile concessione del builder Giorgio Lo Forti alias Beduino Ruben). Esso, pur piantato in terreni infruttuosi (dominati dall'arroganza, dalla presunzione, dall'ignoranza, dalla superstizione, ecc.), se alimentato da elementi positivi (quali la costanza, la volontà, la ricerca, ecc.) riesce a crescere rigoglioso e a produrre le arti, la matematica, l'informatica e le altre scienze. Dal terreno intorno all'albero nascono funghi contenenti lezioni di script in LSL e fiori che rilasciano come contenuto dei problemi a carattere logico-matematico e algoritmico. I libri sono sostituiti da pannelli contenenti slides, links a siti esterni, timeline. Le mappe mentali e concettuali sono realizzate in 3D. Gli argomenti sviluppati in classe (secondo i programmi ministeriali) prendono forma nella realtà virtuale, come in un cantiere *in fieri*. Essi trattano elementi di storia dell'informatica, di programmazione, dell'architettura di un calcolatore, d'ingegneria del software, di reti di computer, di database, d'intelligenza artificiale, con un ampio spazio dedicato al Web.

Questa mia avventura nei mondi virtuali è iniziata nell'ottobre 2012, grazie al ricercatore INDIRE Andrea Benassi che ha presentato EdMondo in un seminario per tutor nei piani nazionali (da diversi anni svolgo l'attività di tutor in vari progetti: M@t.abel, Cl@ssi 2.0, Innovadidattica, DIDATEC Avanzato).

La mia formazione iniziale è stata assistita da un mentore d'eccezione: Salahzar Stenvaag a cui vanno i miei ringraziamenti per tutti i materiali online, le lezioni, i suggerimenti e i video (https://www.youtube.com/user/salahzarstenvaag/videos?view=0). Ho deciso così di condividere in rete questa serie di lezioni che ho preparato per i miei studenti sull'LSL (http://wiki.secondlife.com/wiki/LSL_Portal), nell'auspicio che possano essere utili anche ad altre persone.

Lezione di Salahzar

Lezione 1: far apparire un messaggio in chat e una scritta su un prim

```
//Primo script con la terza A  istituto  tecnico economico S.I.A. IIS "A. Guarasci" di Rogliano (Cosenza)  in LSL (Linden Scripting Language)
//tutto quello che è preceduto da doppio/ è un commento, quindi non sarà eseguito
//rezzare un cubo, cambiare il nome all'oggetto e la texture,nella scheda contenuto cliccare su Nuovo Script e aprire la finestra
//attenzione l'LSL è case sensitive, distingue le maiuscole dalle minuscole
default
{
//siamo nello stato iniziale di esecuzione dello script, tutte le parentesi che si aprono, si devono chiudere
      state_entry()
      {
//quando si salva o si ripristina lo script il prim (cubo o quello che avete rezzato)  comunica (dice) nella chat (canale 0) la frase scritta tra apici
llSay(0, "Primo script di Rosa con la classe terza");
//questa funzione crea una scritta fluttuante sul prim di colore blu
llSetText("Marincola Rosa", <0,0,1>,1);
      }
      touch_start(integer count)
      {
//al tocco, cioè quando si clicca sul prim, sulla chat compare la scritta tra apici
llSay(0, "Hello World!");
      }
}
```

//**Esercizio**: rezza una sfera, cambia nome e texture a piacere. Fai in modo che nello stato iniziale dica in chat "Benvenuto a Scriptlandia", che sulla sfera ci sia la scritto "Esercizio di script di ..."(metti il tuo nome) e quando si clicca sulla sfera venga mostrato in chat un messaggio di saluto.

Lezione 2: Colorare in modo random un prim

```
//Lezione commentata tratta dal Blog di Salahzar
//http://alicorsi.wordpress.com/author/salahzar/
//RGB è il nome di un modello basato sui tre colori rosso (Red), verde
(Green) e blu (Blue).
//Con questo script imparerai a dare un colore di default ad un prim e a
cambiarlo in modo casuale ad ogni tocco.
//Rezza un cubo
default
{
      state_entry()
      {
//messaggio in chat
             llSay(0, "Clicca e cambio di colore");
//nello stato iniziale il prim è blu, prova a  modificare le 3 componenti
dei colori
             llSetColor(<0,0,1>,ALL_SIDES);
//scritta fluttuante sul prim, il simbolo \n serve per andare a capo
llSetText("Colori random \n se mi tocchi cambio colore",<0,0,1>,1 );
      }
      touch_start(integer total_number)
{
 // ad ogni tocco, cambia il colore (in modo casuale) a tutte le facce del
prim
             llSetColor(<llFrand(1),llFrand(1),llFrand(1)>, ALL_SIDES);
//  la funzione llFrand crea un numero random da zero al numero contenuto
nel suo parametro.
// quindi llFrand(1) restituisce un numero casuale tra zero e 1.
//Prova a sostituire ALL_SIDES con un numero intero da 1 a 6 (cioè il
numero di una faccia del cubo), cosa succede?
      }
}
```

//**Esercizio**: rezza una piramide, riutilizza e adatta lo script precedente in modo da eliminare la scritta in chat, modifica la scritta fluttuante in modo che sia su 3 righe e fai in modo che ad ogni tocco, ciascuna faccia sia colorata in modo casuale.
//Suggerimento: la funzione llRound(…) tronca la parte decimale di un numero quindi llRound(2.7) restituisce 2
// sostituisci ALL_SIDES con llRound(llFrand(5.9))
//avrai un colore casuale per ciascuna delle 5 facce della piramide.

Lezione per i docenti in Welcome area

Lezione 3: Come dare un URL per far visitare siti, video e altre risorse nel web browser

```
//Rezza un prim, e seleziona una texture (meglio un'immagine del sito che
vuoi far visitare o crea una scritta e importala nell'inventory.

default
{
            state_entry()
            {
                        llSetText("Cliccami per visitare \n sito della III
A ITC \n di Rogliano",<1,1,1>,1);
       }
       touch_start(integer count)
      {
//questa  istruzione  apre  una  finestra  con  cui   chiunque  clicca
llDetectedKey(0)
//può visitare il sito di cui si è scritto l'URL
 llLoadURL(llDetectedKey(0),"Sito     della     III     A     ITC     di
Rogliano","http://iiaitc.webs.com");
}
}
```

//**Esercizio**: ricerca un buon sito sull'architettura di un computer (possibilmente con un simulatore per l'assemblaggio di un PC.
//Crea o trova un'immagine pertinente, poi rezza un cartello che permetta di visitare il sito.

Prime costruzioni in edmondo

Lezione 4: Come rilasciare un testo scritto in una notecard

```
//Rezza un prim, seleziona una texture (meglio un'immagine importata nell'inventory).
//Crea una notecard nel tuo inventario e scrivi dentro il messaggio che vuoi che gli altri leggano.
//Trascina la notecard nell'inventario del prim e crea un nuovo script
//Risorsa consigliata
http://secondtechnologies.blogspot.it/2010/09/lldetectedname-e-lldetectedkey.html

default
{
state_entry()
{
            llSetText("Clicca per avere \n una notecard",<1,1,1>,1);
}
       touch_start(integer total_number)
       {
// Prende la notecard presente nell'inventario del prim (llGetInventoryName) e la cede (llGiveInventory) a chi clicca (llDetectedKey(0))
             llGiveInventory(llDetectedKey(0),
llGetInventoryName(INVENTORY_NOTECARD, 0));
       }
}
```

//**Esercizio**: invece di una notecard inserisci nell'inventario di un prim un oggetto di nome ad esempio "Margherita" (trascinalo dal tuo inventario nel contenuto del prim).
//Stai attento a scrivere esattamente il nome rispettando maiuscole-minuscole ed eventuali spazi, modifica la scritta sul prim,
//sostituisci la riga che dà l'oggetto dall'inventory
// llGiveInventory(llDetectedKey(0),"Margherita");
//verifica che nell'inventario di chi ha cliccato è stato caricato l'oggetto donato

Lezione su Virtual Lab

Lezione 5: Come rilasciare un oggetto nell'inventory

```
//Questo script è la soluzione del precedente esercizio.
default
{
            state_entry()
            {
                        llSetText("Clicca   per   avere   \n   un   fiore\n
nell'inventario",<1,1,1>,1);
            }
       touch_start(integer total_number)
      {
            llGiveInventory(llDetectedKey(0),"Margherita");
       }
}
```

Come rilasciare un oggetto ad un avatar particolare o ai membri di un gruppo

```
//Modifichiamo il codice in modo che se clicca un avatar particolare venga
dato l'oggetto, altrimenti, ci sia un messaggio in chat

default
{
state_entry()
      {
            llSetText("Regalo per XXX",<1,1,1>,1);
}
       touch_start(integer total_number)
       {
key avatar= llDetectedKey(0);
//clicca sull'avatar a cui vuoi fare il regalo, poi su profilo e su copy
key, copia il codice identificativo dell'avatar
if (avatar=="26ecc3a5-9243-470e-b8d9-4afcacdecf59")
{
             llGiveInventory(avatar,"Margherita");
}
                  else
                        {
                                    llSay(0, "Mi dispiace, ma questo regalo
è solo per XXX!");
                        }
            }
}

//Facciamo un'altra variante per dare un oggetto di nome "Margherita" solo
ai membri di un gruppo.

default
{
state_entry()
       {
            llSetText("Regalo per il mio gruppo",<1,1,1>,1)
}
       touch_start(integer total_number)
       {
key avatar= llDetectedKey(0);
string nomeavatar=llDetectedName(0);
llSay(0, "Mi ha toccato " + nomeavatar);
            if (llSameGroup(avatar))
```

```
            {
                   llGiveInventory(avatar,"Margherita");
            }
else
            {
llSay(0, "Mi dispiace, ma non fai parte del mio gruppo!");
            }
      }
}
```

Lezione 6: Funzioni matematiche

```
//Per comprendere questa lezione devi conoscere: i tipi di dati, le variabili locali e globali. Di seguito segnalo alcune risorse.
//http://wiki.secondlife.com/wiki/User:Michel_Lemmon/Script_Propedeutico#variabili_globali_e_locali
//Funzioni matematiche: //http://wiki.secondlife.com/wiki/Category:LSL_Math
//Cos'è il Lag:
//http://virtualworldsmagazine.wordpress.com/2012/09/27/come-sopravvivere-al-lag-tra-verita-e-leggende-metropolitane/

integer handle;

default
{
      touch_start(integer count)
      {
                  llSay(0, "Digita il numero di cui vuoi calcolare la radice quadrata");
//la variabile globale "handle" acquisisce il valore ascoltato sul canale 0 cioè in chat
handle=llListen(0,"",llDetectedKey(0),"");
      }
      //ora segue l'elaborazione di ciò che è stato ascoltato sul canale zero
      listen(integer channel,string name,key id,string str)
      {
//I listeners creano lag, in particolare sul canale 0.
//Occorre limitare il numero di listeners al minimo possibile e rimuovere l'handle non appena possibile con la funzione seguente
            llListenRemove(handle);
//"input" è una variabile locale, è un numero reale (virgola mobile)  e acquisisce il valore digitato in chat (il tipo stringa è convertito in numero in virgola mobile)
            float input=(float)str;
//istruzione di controllo sul valore digitato
if (input<0)
            {
                  llSay(0, "Errore, il radicando deve essere maggiore o uguale a zero");
            }
else
{
 //se il numero è >=0 calcola e visualizza la radice quadrata, i dati sono convertiti in stringhe
                        llSay(0,"La radice quadrata di "+(string)input +" è: "+(string)llSqrt(input));
                        }
      }
```

```
}
```

//**Esercizio**: modifica il codice in modo che calcoli il logaritmo di un numero

Lezione 7: Impariamo a usare le finestre di dialogo

```
//handle è una variabile globale di tipo intero
integer handle;

default
{
            state_entry()
            {
                        lSetText("Domanda", <1,1,0>,1);
                        handle=llListen(30,"",NULL_KEY,"");
       }
touch_start(integer total_number)
       {
//id è una variabile locale di tipo chiave, essa identifica chi ha cliccato sul prim
            key id=llDetectedKey(0);
//la finestra di dialogo richiede: la chiave, un testo (facoltativo), in [...] la lista di ciò che scriverà su ciascun pulsante (nell'esempio seguente 4 pulsanti)  e infine il canale su cui si ha il dialogo, in questo caso 30
            llDialog(id,"Quante macchinine di Formula 1 ha Mario se sono tutte Ferrari meno 3, sono tutte McLaren meno 2 ed ha anche una Williams?", ["3","4","5","6"],30);
       }
listen(integer channel, string name, key id, string str)
      {
llListenRemove(handle);
 //a seconda dell'opzione selezionata, si avrà   una risposta in chat
if (str=="3" ) llSay(0,"Risposta errata");
if (str=="4" ) llSay(0,"Risposta corretta N=1+(N-3)+(N-2)");
if (str=="5" ) llSay(0,"Risposta errata");
if (str=="6" ) llSay(0,"Risposta errata");
//lo script viene resettato/ripristinato per le esecuzioni successive
llResetScript();
       }
}
```

//**Esercizio:** modifica il codice precedente in modo che ci sia un quesito a scelta multipla da te inventato, con 5 opzioni:a, b, c, d, e;
//in corrispondenza ad ogni opzione un messaggio diverso in chat

Lezione 8: Primi movimenti lineari: facciamo muovere un prim lungo i lati di un quadrato di lato 1m nel piano XY (orizzontale)

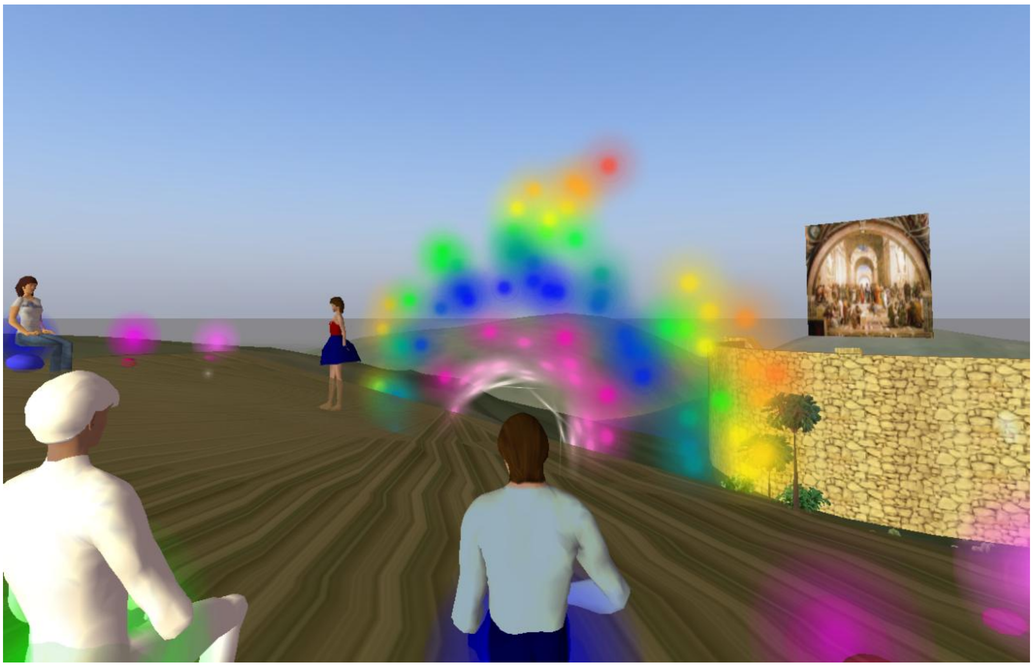
```
default
{
            touch_start(integer total_number)
            {
//Se vogliamo leggere in chat le coordinate assolute (della regione) del punto di partenza usiamo llGetPos() che restituisce la terna <X,Y,Z>
                   llSay(0, "Ora mi trovo " + (string)llGetPos());
//La funzione llSetPos(120, 42, 56) invece posiziona il prim nel punto di coordinate assolute indicate <120, 42, 56>
```

```
//nel nostro primo caso, alla sua posizione si aggiunge la terna < 0, 1, 0
> che lascia immutata X e Z e incrementa di 1 solo la Y
                   llSetPos( llGetPos() + < 0, 1, 0 > );
//poi incrementa di 1 la X;
                   llSetPos( llGetPos() + < 1, 0,0 > );
                   llSetPos( llGetPos() + < 0, -1, 0 > );
                   llSetPos( llGetPos() + < -1, 0,0 > );
}
}

//Modifichiamo il codice in modo che per 4 volte il prim descriva un
quadrato,
//ma ad ogni giro (ciclo) il lato abbia la misura del contatore i (indice)

default
{
touch_start(integer total_number)
{
integer i;
//per 4 volte (i va da 1 a 4 compreso, esegue il blocco di istruzioni in
parentesi {}, e incrementa di 1 il contatore i++ sarebbe i=i+1, quindi la
misura del lato aumenta di 1m.
      for(i=1;i<5;i++)
{
                   llSetPos( llGetPos() + < 0, i, 0 > );
                   llSetPos( llGetPos() + < i, 0,0 > );
                   llSetPos( llGetPos() + < 0, -i, 0 > );
//nel il terzo vertice dice le coordinate assolute del punto in cui si
trova
                   llSay(0, "Ora mi trovo " + (string)llGetPos());
                   llSetPos( llGetPos() + < -i, 0,0 > );
                         }
      }
}
```

//**Esercizio**: rezza una sfera e scrivi il codice in modo che ad ogni tocco, rimbalzi per 6 volte all’altezza costante di 0.5m.



Visione di alcuni effetti speciali

Lezione 9: Prime rotazioni

```
//Prima di iniziare, leggi alcune pagine:
//http://virtualworldsmagazine.wordpress.com/2012/06/23/facciamoci-un-sistema-solare-in-casa-secondlife-o-opensim-esempio-di-un-progetto-astronomico/
//http://wiki.secondlife.com/wiki/LlTargetOmega

default
{
state_entry()
{
//con seguente funzione il prim ruota sempre attorno all'asse Z una volta al secondo (vedi terna <0,0,1> ),
//la velocità di rotazione è PI rad/sec cioè 180° al secondo,
//1.0 è la forza che viene data allo spin, questo numero è un valore che ha effetto quando il prim è fisico,e va settato diverso da 0 per i prims non fisici).
//http://secondtechnologies.blogspot.it/2010/09/rotazione-di-un-prim-con-lltargetomega.html
//la rotazione dipende dal viewer del client, cioè non tutti vedono la stessa rotazione

llTargetOmega(<0,0,1>,PI,1.0);
      }
}
```

//**Esercizio**: modifica i parametri e osserva le diverse rotazioni.
//Crea un link-set con due prim e inserisci il codice nel prim radice, cosa osservi?

Lezione 10: Alcune funzioni per gestire le rotazioni di un prim

```
//Prima devi leggere attentamente
http://wiki.secondlife.com/wiki/Rotation/it

//Con le nuove funzioni che useremo, la rotazione appare la stessa a tutti i client

//Rotazione di 90° intorno asse Z

default
{
touch_start(integer total_number)
{
//Con questa istruzione leggiamo in chat il valore della funzione llGetRot()
llSay(0, (string)llGetRot());
//Essa restituisce un quaternione come a quattro numeri, tre dei quali rappresentano
//la direzione verso la quale un oggetto è rivolto ed un quarto che rappresenta l’inclinazione sinistra o destra dell’oggetto intorno a questa direzione.

//delta e rot sono variabili locali di tipo rotation
            rotation rot = llGetRot();

//La funzione llEuler2Rot converte il vettore contenuto in <> da radianti in una rotazione che viene assegnata alla variabile delta
//DEG_TO_RAD = 0.01745329238f; è una costante di tipo float che quando moltiplicata per un angolo in gradi dà l’angolo in radianti.
```

```
//90 * DEG_TO_RAD converte 90°in radianti, cioè PI/2
//<0,0,90 * DEG_TO_RAD>, in questo modo ci sarà una rotazione di 90° solo attorno all'asse Z

            rotation delta = llEuler2Rot (<0,0,90 * DEG_TO_RAD>);
//Ora si ha la composizione dei due quaternioni: a quello iniziale si applica quello che effettua la rotazione di 90° secondo l'asse Z
                  rot = delta * rot;
//llSetRot() posiziona il prim secondo i valori calcolati della rotazione rot
                  llSetRot(rot);
}
}
```

//**Esercizio:** ora combiniamo insieme ciò che è stato fatto finora per gestire alcuni movimenti base attraverso una finestra di dialogo.

```
//Completa lo script seguente e testalo inserendolo nel contenuto di un prim in modo che sia radice di un link-set (con un'auto)

rotation delta;
rotation rot;
integer handle;

default
{
state_entry()
{
       llSetText("movimenti base", <1,1,0>,1);
handle=llListen(30,"",NULL_KEY,"");
}
touch_start(integer total_number)
{
             key id=llDetectedKey(0);
             llDialog(id,"Inizia a gestire i movimenti:X+1 significa che incrementa di un metro la coordinata X, mentre -30°z indica una rotazione attorno all'asse z di 30°in senso orario", ["X+1","Y+1","Z+1","X-1","Y-1","Z-1","30°x","-30°x","30°y","-30°y","30°z","-30°z"], 30);
}
listen(integer channel, string name, key id, string str)
{
      llListenRemove(handle);
      rotation rot = llGetRot();
if (str=="X+1")
{ llSetPos( llGetPos() + < 1, 0,0 > );}
if (str=="30°x")
{
  delta = llEuler2Rot (<30 * DEG_TO_RAD,0,0>);
                    rot = delta * rot;
                    llSetRot(rot);
}
//scrivi le traslazioni e le rotazioni mancanti indicate sui pulsanti della finestra di dialogo
..........................................................................
..................................................
...............................................................................................................
llResetScript();
}
}
```

Lezione 11: Alcuni operatori logici

```
/ /Prima di affrontare la lezione, devi conoscere gli operatori logici, sono importantissimi in programmazione:
//http://it.wikipedia.org/wiki/Tabella_della_verit%C3%A0
//http://wiki.secondlife.com/wiki/LSL_Operators
//Rezza un cubo, sarà il nostro dado con cui facciamo un gioco molto semplice:
//1)se viene generato il numero 1 oppure 5, chi ha toccato vince
//2)se esce un numero 2<=n<=4, il giocatore perde.
//3)Se esce il 6, il giocatore deve ritentare
//Scriviamo la condizione 2) nella forma n>1 AND n>5, (ma potevamo scriverlo in altro modo equivalente... prova!)

default
{
touch_start(integer total_number)
      {
//scrivi l'istruzione per colorare le facce in modo casuale (Lezione 2)
//n è un numero casuale da 1 a 6
integer n=(integer)(llFrand(6)+1);
//il numero estratto viene visualizzato con una scritta sul cubo
llSetText( (string)n, <1,1,1>, 1);

if (n==1 || n==5)       {llSay(0,  "Hai  vinto,  è  uscito  "+  (string)n);}
//1)
if (n>1 && n<5)    {llSay(0, "Hai perso, è uscito "+(string)n);}    //2)
if (n==6)     {llSay(0, "Devi ritentare, è uscito "+(string)n);}  //3
}
}
```

//**Esercizio**: modifica le regole del gioco (le condizioni di vittoria o di sconfitta con gli operatori).
//Fai in modo venga estratto un numero a caso da 1 a 20, poi il cubo rimbalzi e rotei in aria un numero di volte pari al numero estratto.
//Con un programma di grafica puoi "disegnare" le sei facce del cubo e applicare le diverse texture per rendere realistica la simulazione.

Library

Lezione 12: Istruzione ciclica col controllo in testa

```
//Rezza una sfera e applicale la texture di un pallone
//In questa lezione utilizziamo l'istruzione ciclica precondizionale
//http://it.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_iterativo
//http://wiki.secondlife.com/wiki/User:Michel_Lemmon/Script_Propedeutico

default
{
 touch_start(integer total_number)
{
integer n=(integer)(llFrand(10)+1);

//n è un numero casuale da 1 a 10
//vogliamo che al tocco, il pallone rimbalzi da terra
//finquando è vera la condizione che il numero n sia positivo e diverso da
3

vector position = llGetPos();

while (n!=3 && n>0)
{

llSetPos( llGetPos() + <0, 0, 0.1*n > );
// con il prodotto 0.1*n facciamo in modo che i balzi non siano tutti
uguali...prova il codice e vedrai!

llSetPos( llGetPos() + <0, 0, -0.1*n > );
//decrementiamo n di 1 ad ogni ciclo
                        n--;
}
}
}
```

Istruzione ciclica col controllo in coda

```
//Se hai testato più volte lo script precedente, avrai osservato che alcune
volte la palla non eseguiva alcun balzo.
//Questo si verifica se il numero generato in modo casuale è 3, cioè quando
la condizione iniziale è falsa al tocco, il ciclo non viene eseguito.
//Per fare in modo che il blocco di istruzioni, venga eseguito almeno una
volta,
//possiamo utilizzare l'istruzione ciclica postcondizionale

default
{
touch_start(integer total_number)
{
integer n=(integer)(llFrand(10)+1);
//n è un numero casuale da 1 a 10
do
            {
llSetPos( llGetPos() + <0, 0, 0.1*n > );
                  llSetPos( llGetPos() + <0, 0, -0.1*n > );
n--;
}
while(n>0);
//il blocco di istruzioni viene ripetuto finquando n è positivo, n ad ogni
ciclo è decrementato di 1, quando n=0 non verrà più eseguito
}
```

```
}
```

//**Esercizio**: rezza un cilindro e riduci l'altezza in modo che sembri una moneta,
//applica sulle due facce le texture testa e croce.
//Riutilizza i codici precedenti e modificali per simulare il lancio
//di una moneta che rotei un numero casuale di volte in aria.

Vista su due isole dell'arcipelago

Conclusioni

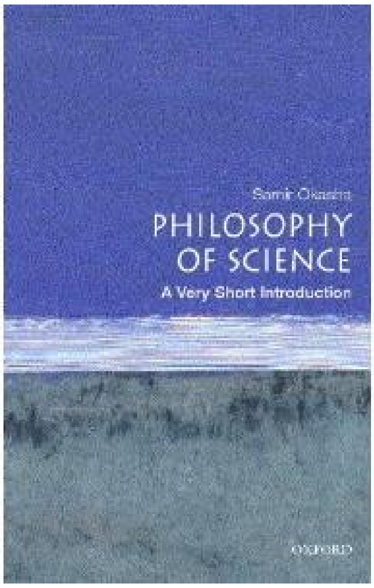
In questa prima serie di lezioni, ho trattato tipi di dati semplici, istruzioni operative e di controllo e alcune funzioni base in LSL, col solo evento touch_start. Le lezioni sono state pensate per studenti di 15-16 anni che studiano informatica come disciplina curricolare, dunque come applicazione della teoria anche in un ambiente virtuale per sperimentare l'animazione di oggetti 3D in linguaggio LSL.
La pubblicazione di questo lavoro vuole essere un aiuto all'apprendimento graduale e divertente per quanti hanno un primo approccio con questo linguaggio di scripting. Certo la programmazione richiede applicazione, tempo, approfondimento progressivo e tanta creatività, ma i mondi virtuali offrono più di altri ambienti, molti stimoli per affrontare un simile percorso di autoformazione a qualsiasi età!

"Il bambino che non gioca non è un bambino, ma l'adulto che non gioca ha perso per sempre il bambino che ha dentro" (Pablo Neruda).

Rosa Marincola

178. Lo scaffale dei libri

"Philosophy of Science: A Very Short Introduction" di Samir Okasha



Yet another excellent entrant in the Very Short Introductions series: Okasha, Lecturer in Philosophy at the University of York, gives a well-organized brief tour of the main topics in the Philosophy of Science. The key idea of the series of Very Short Introductions published by Oxford University Press since 1995 is to ask an expert to introduce readers to the essential notions of a subject, which is actually stimulating, since there is something very pleasant about holding in one's hand a small book that can serve as a serious introduction to a very thoughtful topic.

Starting with an introductory chapter on "What is Science?", the author takes the reader on a tour of "Scientific Reasoning", "Explanation in Science", "Realism and anti-Realism", "Scientific Change and Revolutions", with an interesting reference to three specific historical philosophical disputes: (1) the dispute between Newton and Leibniz about the nature of space (absolute or relative); (2) the dispute among three different schools of taxonomic classification in biology; (3) the dispute among psychologists about the 'modularity' of the human mind.

The closing chapter on some of the disputes about science ('Scientism', or an over-reliance on 'science' as a model for all of – or the only legitimate kind of – 'knowledge'; Science and Religion; the debate around whether Science is 'value-free') turns out to be an interesting shortcut to opening the reader's mind to significant unsolved problems.

In each case, Okasha gives a very clear, objective overview of the arguments that have persisted (since the 16th Century) about the topics the book discusses using an undoubted ability to find analogies or examples that make otherwise abstract propositions understandable and incredibly concrete. He deftly lays out (which is difficult to do) the reasons why philosophical questions about science are not resolved by science itself, and thus why disputes over these topics continue even today. For instance, all 'empirical' scientific theories ultimately rest on concepts that are more or less 'metaphysical' – which does not mean that choosing among fundamental principles is simply a matter of taste, belief or faith (e.g., Creation Science is clearly not just as good a 'scientific' theory as Evolution), but it does help clarify the nature of the assumptions that serve as the foundations of our scientific theories.

Okasha assumes some scientific and philosophical knowledge on the part of the reader (in fact there is not enough space to dedicate to explanations of specific scientists or theories). However, the book clearly appears to be for scientists rather than philosophers since the author goes into more detail describing the philosophical aspects than the scientific ones. At the same time, the author tries not to take sides in the debates of the field, such as the importance of direct observation, the ideas of Thomas Kuhn (on scientific revolutions), Karl Popper (on the definition of science), etc. The basic scientific issues such as causality, inductive vs. deductive reasoning, and how conflict can arise between science and religion are also covered with extraordinary expertise and attention to detail.

Philosophy of science, as described in this book, seems to have become a rather esoteric subject, removed from the daily practice of scientists and the everyday use of science. Furthermore, there are several questions that spring to mind but which are not covered in this book: Does the publication and independent verification of results lead to the self-correcting nature of science? Why is the simplest explanation the best? How can scientists who cannot easily perform experiments (e.g. astronomers and sociologists) make verifiable theories?
However there is a reason why. Asking a scholar to write a broad survey of his or her field is an invitation to ponder what is crucial and what is secondary so that a 'very short introduction' is likely to be more influenced by the author's particular choices and preferences than a longer book would be. Moreover, the dialogic nature of philosophy – 'socratically' understood – is a very strong invitation to give space to your way of thinking. Despite this, the author is able to lead by the hand the reader in the world of the philosophy of science in an interesting (and – obviously – short) way.
There is one glaring flaw though: no reference whatever to the frequentist / Bayesian controversy. In addition, probability was mentioned only once in connection to epistemology: rather than saying we know or don't know something for sure, which is bound up with philosophical difficulties, we can assess probabilities of it between 0 and 1 instead.
Given the importance of science to modern life, understanding the debates around the core concepts on which modern science rests (and the enormously broad reach – as well as the limits – of science as a way of generating knowledge), is something every educated modern person should do at some level. This little book is an excellent way to get started: it is extremely clear and covers a broad range of topics (although some rather superficially). So, this is definitely not a thorough introduction, but a very well written primer. This book will acquaint you with the core concepts and debates within the philosophy of science, and whet your appetite for further reading (in fact the author provides an interesting list for further reading broken down chapter by chapter).
In summary, the author does a commendable effective job of introducing the key task of the philosophy of science (i.e. to analyze the methods of enquiry used in the various sciences) and the main philosophical topics of scientific interest. Shortcomings aside, it is a worthwhile read for everyone interested in the subject.

Nicola De Nitti

"La solitudine dei numeri primi" di Paolo Giordano

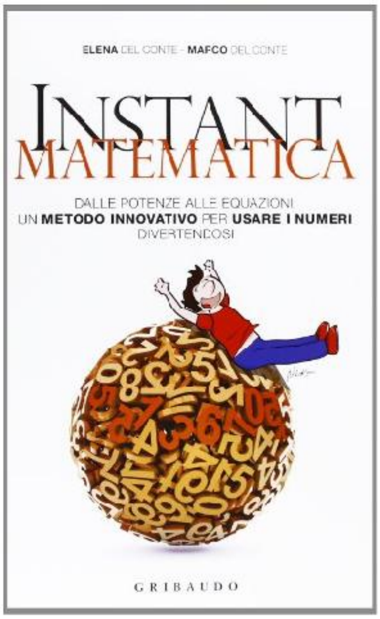
La storia narrata in questo romanzo è appassionante, ma anche sconcertante: i due protagonisti, Mattia e Alice – ragazzi decisamente problematici – vengono descritti con il loro disagio psichico, del quale non viene tralasciato alcun particolare. Le due vicende si dipanano in un intreccio continuo, dalla fanciullezza all'età adulta, fino a quando entrambi trovano la propria strada. La lettura è semplice: considerato che Mattia studia matematica all'università, alcune volte ci sono dei riferimenti a questa materia, ma la priorità è data alle difficoltà della crescita dei due protagonisti. Entrambi i protagonisti portano nel corpo e nell'anima le conseguenze di alcuni gesti compiuti durante la loro infanzia: Alice è zoppa a causa di una caduta sugli sci, avvenuta quando aveva sette anni ed era costretta a praticare questo sport dal padre; Mattia ha abbandonato in un parco la sorella gemella ritardata, Michela, per poter partecipare a una festa di compleanno e porta con sé un grande senso di colpa. Entrambi si puniscono per questi errori: Alice con l'anoressia e non riuscendo a costruire rapporti sereni con i suoi coetanei; Mattia si ferisce fisicamente con oggetti appuntiti.
Adolescenti, procedono insieme in questo cammino che li porterà all'età adulta, vicini e lontani al tempo stesso, proprio come due numeri primi gemelli, soli e perduti, vicini ma non abbastanza per sfiorarsi davvero, in quanto separati da un solo numero.
Dopo la scuola superiore, Mattia si laurea con il massimo dei voti in matematica, dopo aver superato brillantemente tutti gli esami, si trasferisce in Inghilterra. Alice, abbandonata la scuola, si dedica alla fotografia. Andando a trovare la madre, che sta morendo in ospedale per un male incurabile, Alice conosce Fabio, che sposa nonostante non lo ami. Quando il matrimonio con Fabio fallisce, Alice decide di curare l'anoressia e in ospedale le sembra di riconoscere Michela, la gemella di Mattia. Decide quindi di far rientrare Mattia in Italia, perché possa conoscere la verità sulla sorella e ricominciare a vivere. Ma non tutto va come previsto…

Nel giugno del 1792, due astronomi, Jean-Baptiste-Joseph Delambre e Pierre-François-André Méchain partono da Parigi per misurare l'arco di meridiano compreso tra Dunkerque e Barcellona: hanno il compito di effettuare queste misurazioni, per fissare una nuova unità di misura della lunghezza – il metro – che sarebbe stato un decimilionesimo della distanza tra il Polo Nord e l'Equatore. Nel manifestare gli intenti dell'Accademia delle Scienze francese, era stato dichiarato che il sistema metrico decimale era destinato "a tutti gli uomini e a tutti i tempi", esattamente come la Terra che appartiene a tutti.
Nel XVIII secolo, le unità di misura erano molto numerose e questo costituiva un ostacolo per la comunicazione e il commercio, oltre a impedire un'onesta amministrazione dello stato. Si stimava che all'interno dell'Ancien Régime francese ci fossero duecentocinquantamila diverse unità di peso e di misura: all'indomani di una Rivoluzione che aveva proclamato diritti universali per tutti gli uomini, era una situazione paradossale.
Delambre e Méchain viaggiarono lungo il meridiano per sette anni, dal 1792 al 1799. Durante la loro missione, vennero scambiati per spie e spesso rischiarono di morire per la rivoluzione in atto. L'operazione mostrava tutta la sua delicatezza, in proporzione alla violenza sempre più diffusa nella nazione.

Durante la missione, Méchain, bloccato nei pressi di Barcellona per un infortunio, notò un'incongruenza nelle misurazioni, ma non riuscì a risolvere il problema e fu costretto a lasciare la città senza trovare una spiegazione, visto che nel frattempo Francia e Spagna erano entrate in guerra. Vista la sua propensione al perfezionismo, non poteva accettare un errore nelle sue misurazioni, ma temeva di confidarsi e quel peso interiore minò le sue energie fisiche.
Al termine della missione, i due astronomi decisero di convergere a Carcassonne, da dove tornarono a Parigi per presentare i propri dati a una Commissione internazionale. Dopo aver fatto di tutto per evitare di incontrarsi con Delambre e dopo aver ottenuto dall'Accademia di non presentare i suoi diari – la testimonianza del suo errore – Méchain, al termine dell'impresa e ossessionato dall'imperfezione, si fece assegnare una nuova missione, per estendere la misurazione del meridiano a sud di Barcellona. Approdato vicino a Valencia, sulle coste infestate dalla malaria, fu vittima dell'epidemia e morì il 20 settembre 1804.
Attualmente, solo Stati Uniti, Myanmar (ex Birmania) e Liberia non hanno riconosciuto come sistema di misura ufficiale il sistema metrico decimale, ma in anni recenti i produttori americani hanno dato inizio a una riconversione, una rivoluzione silenziosa e necessaria, viste le pressioni della nuova economia globale. Altri eventi premono per questa riconversione, basti ricordare che nel 1999 alla base della perdita del Mars Climate Orbiter c'era il lavoro di due squadre di ingegneri, che avevano usato due diverse unità di misura: tale differenza generò un errore di traiettoria di 96,5 km e una perdita di 125 milioni di dollari.
Anche la Francia, nonostante sia stata la nazione che inventò il sistema metrico, lo respinse: la gente comune rifiutò con forza la nuova unità di misura, vedendo minacciati i propri guadagni e sentendosi ingannata. Alla vigilia dell'invasione della Russia, Napoleone dovette tornare alle antiche unità di misura e solo nel 1840 la Francia riuscì a riavere il metro.
L'errore commesso da Méchain era in qualche modo annunciato nella relazione ufficiale redatta da Delambre, la Base du système métrique décimal: "Non ho rivelato al pubblico ciò che non è obbligato a sapere. Ho eliminato tutti quei dettagli che potrebbero ridurre la sua fiducia in una missione così importante, per la quale non ci sarà data occasione di fare una verifica." Ma in una scatola di cartone accuratamente sigillata, l'autore ha trovato dozzine di lettere, nelle quali è raccontato l'errore. Secondo gli odierni rilevamenti satellitari, il metro elaborato da Delambre e Méchain è più corto di circa 0,2 mm, perché la lunghezza del meridiano equivale a 10.002.290 metri. Eppure, come ci dice lo stesso autore, "persino nel fallimento, Delambre e Méchain ebbero successo, poiché attraverso il loro lavoro, non soltanto rielaborarono la nostra conoscenza della forma della Terra, ma anche la nostra conoscenza dell'errore".

Daniela Molinari

"Instant matematica" di Elena e Marco Del Conte



Elena Del Conte è docente di matematica e scienze nella secondaria di primo grado; Marco è autore di programmi comici tra cui il notissimo Zelig. Insieme hanno realizzato un manuale essenziale di matematica sulla falsarigha di Instant English, un libro di successo per imparare l'inglese. L'obiettivo è quello di far apprendere le tecniche di calcolo essenziali cercando di rompere gli schemi spesso noiosi dei manuali scolastici. Il libro si presenta allegro nella veste grafica, semplice, schematico e ben organizzato nella struttura e suddivisione degli argomenti. Ogni capitolo è composto sia dalle 'regole' essenziali (l'autrice afferma di essersi ispirata al suo quaderno delle regole condiviso con i ragazzi), da esempi svolti ed esercizi ben mirati, legati sempre alle applicazioni concrete della matematica. Instant matematica è rivolto principalmente ad adulti ma con un linguaggio semplice e adatto ai bambini. È difficile immaginare che un ragazzo della secondaria di primo grado acquisti un altro libro di matematica oltre il proprio manuale scolastico, è più semplice immaginarsi un genitore (ma anche un docente in cerca di nuove proposte didattiche) che voglia riprendere i concetti di base di matematica per sé e per i propri figli, per poterli aiutare nei compiti, per poter proporre esercizi aggiuntivi, particolarmente interessanti e utili nella vita reale.

Dal punto di vista narrativo i due autori instaurano un dialogo durante tutto il libro incarnando le due anime dello studente: la parte più razionale che vorrebbe impare e la parte più istintiva che vorrebbe lasciar perdere, che canzona l'insegnante, che cerca la via più semplice e immediata, tra battute spiritose e denigrazione del lavoro dell'insegnante. Gli argomenti trattati riguardano principlamente l'aritmetica e l'algebra, insomma il cosiddetto "far di conto": le quattro operaioni, le potenze, multipli e divisori, frazioni, rapporti e proporzioni, numeri relativi, equazioni, calcolo delle probabilità.

MAGAZINE

MATEMATICAMENTE.IT

Rivista trimestrale di matematica
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito

Anno 6 Numero 18 DICEMBRE 2012
Registrazione n. 953 del 19.12.2006 – Tribunale di Lecce
ISIN ISSN 2035-0449
Direttore responsabile Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it