180. Quando anche la matematica diventa un'opinione

Joseph TOSCANO[1]
joseph.toscano@sbai.uniroma1.it

A volte succede che dei luoghi comuni vengano eletti a "verità assolute" solo perché vengono proferiti da persone "affidabili" o dalla stragrande maggioranza delle persone. Ma, ad un esame più attento, può capitare che le cose non stiano effettivamente come appaiono a prima vista. Sembra strano, ma ciò avviene anche nel campo della matematica, sia ad opera di comuni mortali, sia ad opera dei cosiddetti "addetti al mestiere". Vediamo alcuni esempi.
Una volta, quando andavo al liceo, un docente (non di matematica) se ne uscì così: "Risolvere questo problema è impossibile, è come trovare la quadratura del cerchio. Come sapete è impossibile trovare un quadrato che abbia la stessa area di un cerchio". Lì per lì rimasi un po' perplesso e mi dissi: "Non è vero, se ho un cerchio di raggio 1 metro, avrà area pari a π metri quadri, e un quadrato che abbia stessa area avrà lato pari a $\sqrt{\pi}$ metri". Anni dopo capii che il docente aveva travisato la questione: infatti il problema della quadratura del cerchio non sta nel trovare un quadrato avente stessa area, bensì nel costruire un quadrato che abbia la stessa area di un dato cerchio, con uso esclusivo di riga e compasso.
Ricordo ancora un'altra volta che una maestra disse: "Un chilometro cubo è così grande che tutto il pianeta terra non ce la fa ad occuparlo!". Anche qui mi dissi: "Ma se solo il monte Everest è alto più di otto chilometri, cosa ci vuole ad avere un volume maggiore di un chilometro cubo!". Questi appena citati sono solo due esempi di come la matematica, in mano ai non addetti ai lavori, possa essere presa a calci. Spesso si assiste a delle classiche "invasioni di campo" da parte di persone che, per il solo fatto di avere un certo ruolo o una certa dialettica, pensano che anche nella matematica sia lecito spararle a proprio piacimento, forse credendo che, al contrario di altre situazioni, non sia possibile fare delle verifiche. Qui i matematici dovrebbero fare maggiore attenzione affinché persone del suddetto tipo non facciano invasione di campo.

Ordine di grandezza
Ma, ahimè, a volte anche i matematici fanno dei clamorosi autogol. Un esempio eclatante è la definizione di ordine di grandezza. È possibile verificare che molti libri di testo delle scuole superiori italiane di secondo grado recitano più o meno così:
"Si dice ordine di grandezza di un numero (positivo) la potenza di 10 più vicina a quel numero."
Subito dopo aggiungono la seguente regola per determinare l'ordine di grandezza:
1) si scrive il numero x in forma scientifica, e cioè nella forma $\boldsymbol{x = a \cdot 10^{n}}$, con $1 \le \boldsymbol{a} < 10$;
2) se $\boldsymbol{a < 5}$ l'ordine di grandezza è $\mathbf{10^{\boldsymbol{n}}}$; se $\boldsymbol{a \ge 5}$ l'ordine di grandezza è $\mathbf{10^{\boldsymbol{n}+1}}$.
Supposto lecito che ognuno possa dare la definizione come meglio crede (per esempio qualche autore afferma che è la massima potenza del 10 contenuta in quel numero), ciò non toglie che non deve cadere in contraddizione.
Nel caso citato sopra è fin troppo palese la contraddizione tra le due affermazioni; si voglia determinare per esempio l'ordine di grandezza del numero 52. Secondo la definizione il suo ordine di grandezza dovrebbe essere 10, infatti $|52-10| < |52-100|$, ossia 42 < 48.
Invece secondo la regola, una volta posto $52 = 5.2 \cdot 10^{1}$, e poiché $5.2 \ge 5$ l'ordine di grandezza dovrebbe essere 10^{2}.
In altre parole, secondo la definizione il punto di confine è 5.5, secondo la regola è 5.

[1] Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria - Sezione di Matematica. Università "La Sapienza", 00161 Roma.

Ora, dopo aver segnalato la cosa a varie case editrici, un autore mi ha risposto che il concetto di vicinanza va inteso nel senso di potenza e non di differenza. Per dirla in termini più chiari, il valore *a* andrebbe prima espresso nella forma 10^x con $0 \le x < 1$, poi se $x < 0.5$ l'ordine di grandezza è 10^n, se $x \ge 0.5$ l'ordine di grandezza è 10^{n+1}.

In pratica, ora il punto di confine diventa $10^{0.5} = \sqrt{10} \simeq 3.162$, ma evidentemente anche qui rimane la contraddizione con la regola; ed è proprio ciò che ho replicato all'autore.

Al che egli stesso ha ammesso che il concetto andava rivisto, e in cuor mio l'ho apprezzato per il coraggio che ha avuto nell'ammettere tale svista.

Ma perché un numero considerevole di libri ha commesso lo stesso errore? A volte sembra che quando qualcuno genera una falsa notizia, gli altri si affrettino a innescare un tam tam deleterio, preoccupati soltanto di clonare nel modo più fedele possibile il messaggio ricevuto, dimenticando invece che uno dei compiti principali del matematico è quello di verificare prima di tutto la fondatezza del messaggio ricevuto.

Purtroppo, quello appena citato non è un caso isolato. Vediamone altri, rimanendo sempre nell'ambito dei testi di matematica (non solo delle scuole superiori).

Metodo di Cramer

Un altro caso eclatante è quello relativo al metodo di Cramer nella soluzione di sistemi di due equazioni lineari in due incognite. Essi recitano più o meno così:

sia dato il seguente sistema di due equazioni lineari nelle due incognite *x* e *y*: $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f. \end{cases}$

Costruite le matrici $\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} c & b \\ f & e \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix}$, si calcolino i valori dei rispettivi determinanti

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$, $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - bf$, $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - cd$.

Le soluzioni sono:

- se $\boldsymbol{D \neq 0}$, $\boldsymbol{x = \frac{D_x}{D}}$, $\boldsymbol{y = \frac{D_y}{D}}$;
- se $\boldsymbol{D = 0}$ e $\boldsymbol{(D_x = 0) \wedge (D_y = 0)}$ il sistema è indeterminato;
- se $\boldsymbol{D = 0}$ e $\boldsymbol{(D_x \neq 0) \vee (D_y \neq 0)}$ il sistema è impossibile.

Sui coefficienti *a, b, c, d, e, f* non viene fatta nessuna restrizione, solo qualcuno si sbilancia nel dire che essi non debbono essere tutti contemporaneamente nulli. In realtà se fossero tutti nulli non ci sarebbe nessun problema, ma se qualcuno di essi, per esempio *f* fosse diverso da zero, ecco che salterebbe subito all'occhio la contraddizione.

Esaminiamo per esempio il caso banale $a = b = c = d = e = 0$, $f = 1$, si ha il sistema

$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 1. \end{cases}$ equivalente a $\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 1. \end{cases}$ che risulta ovviamente impossibile (non indeterminato).

Invece applicando la regola di Cramer, per i determinanti si hanno i valori $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$ che danno come risposta un sistema indeterminato (e non impossibile), contraddicendo quanto trovato prima.

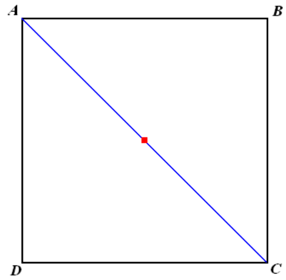
Risulta così evidente la non felice definizione del metodo di Cramer.

Indipendenza stocastica

Un altro caso riguarda l'indipendenza stocastica di due eventi. Molti testi danno la seguente definizione: *A è indipendente da B se e solo se P(A|B) = P(A),* senza porre nessuna condizione né su *A*, né su *B*; al massimo qualcuno impone che sia $P(B) \neq 0$. Poi in seguito dimostrano che se *A* è indipendente da *B*, allora anche *B* è indipendente da *A*, concludendo che l'indipendenza stocastica è una definizione simmetrica, sintetizzando il tutto nella seguente definizione: *A e B sono indipendenti se e solo se* $\boldsymbol{P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)}$.

Tutto ciò sarebbe corretto se si ponesse la condizione $0 < P(A), P(B) < 1$, ma questo non viene mai fatto. Purtroppo quando si lavora con eventi di probabilità pari a 0 o a 1 ci si inoltra su un terreno pericoloso dove è facile commettere errori.

Per chiarire le idee consideriamo il seguente esempio. Sia dato un quadrato di vertici *A*, *B*, *C* e *D*, e si scelga a caso un punto *P* su di esso; si definiscano i seguenti eventi:



E = "Il punto *P* cade esattamente al centro",
H = "Il punto *P* cade sulla diagonale *AC*".

Si ha ovviamente *P(E)*= 0, da ciò non segue però che *E* sia impossibile, in altre parole, pur avendo probabilità nulla, il punto *P* può cadere sul centro. Formalizzando, si ha *P(E)* = 0 $\not\Rightarrow$ *E* = Ø, avendo indicato con Ø l'evento impossibile.

Analogamente si ha *P(H)* = 0, anche qui non segue che *H* sia impossibile, infatti, pur avendo probabilità nulla, il punto *P* può cadere sulla diagonale *AC*; formalizzando si ha *P(H)* = 0 $\not\Rightarrow$ *H* = Ø.

Di conseguenza, si ha $P(E^C) = P(H^C) = 1$ (E^C è l'evento contrario di *E*), da ciò non segue però che sia E^C che H^C siano certi, in simboli $P(E^C) = 1 \not\Rightarrow E^C = \Omega$ e $P(H^C) = 1 \not\Rightarrow H^C = \Omega$, avendo indicato con Ω l'evento certo.

Ora, è intuitivo che si ha *P(E|H)* = 0: tanto per capirci, supposto vero che il punto sia caduto sul segmento *AC*, la probabilità che sia caduto esattamente al centro (supposto sempre che sia stato scelto a caso) è nulla, e quindi, essendo *P(E|H) = P(E)*, si conclude che *E* è stocasticamente indipendente da *H*. Consideriamo ora la probabilità *P(H|E)*, poiché *E* implica *H* è ovvio che *P(H|E) = 1*, e quindi si ottiene *P(H|E) ≠ P(H)*, si conclude che *H* non è stocasticamente indipendente da *E*, contravvenendo alla proprietà di simmetria enunciata da vari autori.

Sempre ragionando sul quadrato, si può notare che $P(E|H^C) = 0$ (infatti *E* ed H^C sono incompatibili) e *P(E) = 0*, e quindi *E* è stocasticamente indipendente da H^C; al contrario, si ha $P(H^C) = 1$, ma $P(H^C|E) = 0$, da cui H^C non è stocasticamente indipendente da *E*; quindi, anche considerando eventi con probabilità pari a 1 si possono generare delle contraddizioni.

Ora, per affrontare il problema in modo più profondo bisogna ricorrere a nozioni (si veda [1]) che indubbiamente non fanno parte di un corso di base di "Calcolo delle Probabilità", ma proprio per questo è meglio cautelarsi fin dall'inizio e dichiarare che si sta lavorando sotto la condizione :

$$0 < P(A),\ P(B) < 1$$

Alcune definizioni

Ci sono altri casi invece in cui non ci sono errori, ma sarebbe di gradimento che i matematici si mettessero d'accordo con le definizioni.

Per esempio, *lo "0" appartiene all'insieme dei numeri naturali?* Alcuni dicono di sì, altri dicono di no.

Un altro caso riguarda la definizione di funzione continua.

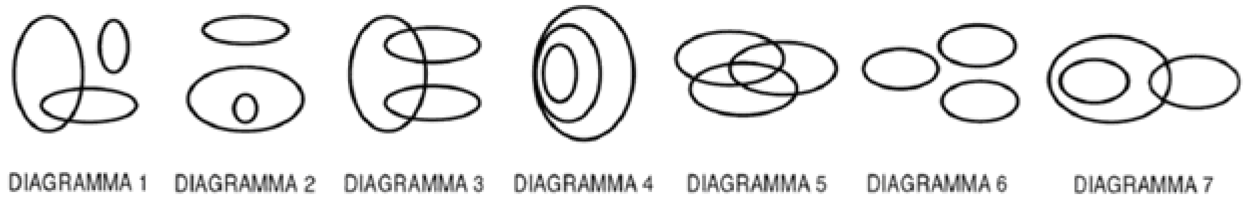
Per esempio *la funzione* $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$, *è continua nel punto x = 0?* Alcuni dicono che non ha senso parlare di continuità perché la funzione lì non è definita.

Altri dicono che è vero che lì la funzione non è definita, ma si può estendere il concetto di continuità anche a quei punti che sono solo di accumulazione per il dominio, e quindi dicono che in *x* = 0 la funzione non è continua.

Prove di valutazione

Oltre che sui libri (preposti all'insegnamento), gli errori possono essere presenti anche in prove di valutazione. Un caso è quello dei quiz on line preselettivi dell'ultimo concorso per docenti.

Per quanto riguarda i quesiti di logica c'era la seguente domanda:



Con riferimento alla figura in alto, individuare il diagramma che soddisfa la relazione insiemistica esistente tra i termini dati: Persone simpatiche, Residenti a Roma, Persone di nome Mario

1) Diagramma 2; 2) Diagramma 5; 3) Diagramma 4; 4) Diagramma 1.

Prima di tutto è buona norma circondare i suddetti insiemi con un rettangolo che rappresenta l'insieme universo (o ambiente), che in questo caso rappresenta l'insieme di tutte le persone. Inoltre, mentre essere residenti a Roma o chiamarsi Mario è un dato oggettivo, l'essere una persona simpatica è un dato soggettivo, e come tale non può rappresentare un insieme. Eppure è uno dei primi concetti che viene insegnato quando si affronta la teoria degli insiemi: "non si può definire un insieme in base a dati soggettivi".

Qual è la risposta giusta del suddetto quesito? Il diagramma 5 (come richiedeva il test)?

E se a qualcuno stanno antipatici i romani? Quale sarebbe stata la risposta giusta? Il diagramma 3 (che però non veniva data tra le possibili risposte esatte)?!

E se invece oltre ai romani stanno antipatici anche tutti quelli di nome Mario (per il solo fatto di chiamarsi Mario), quale sarebbe stata la risposta giusta? Il diagramma 1?!

E se invece i romani gli stanno simpatici? Quale sarebbe stata la risposta giusta? Tra i sette diagrammi non ne esiste uno rappresentativo!

Ma come mai errori così grossolani vengono commessi proprio da chi dovrebbe valutare la preparazione dei docenti, in questo caso dal ministero? Evidentemente la continua opera di demolizione della scuola pubblica comincia a far sentire i suoi effetti anche nelle sfere più alte.

Il quorum

Andiamo ora ad argomenti di maggiore diffusione: qual è la esatta definizione di quorum? Spesso se ne sente parlare, soprattutto in prossimità di consultazioni elettorali: "Raggiungere il quorum significa che deve andare a votare almeno il 50 % più 1 degli aventi diritto!". Si supponga che ad un referendum abbiano diritto al voto 40˙000˙001 cittadini, qual è il numero minimo affinché il referendum sia valido?

Il 50 % di 40˙000˙001 è 20˙000˙000.5, aggiungendo 1 fa 20˙000˙001.5. Il numero minimo è 20˙000˙001, oppure 20˙000˙002? Qualche buontempone (ce ne sono molti) se ne esce così: "Ma dai, vuoi che vadano a votare proprio 20˙000˙001 persone? È un caso che ha probabilità troppo piccola per verificarsi". Ora, a parte il fatto che anche un evento di probabilità 0 può verificarsi (e qui torna il discorso di prima), è il principio che è sbagliato. Inoltre il problema si presenta molto più frequentemente in altre situazioni dove la probabilità è di gran lunga maggiore. Per esempio, in una riunione di condominio di 11 persone, qual è il 50 % più 1? La metà è 5.5 persone, più 1 fa 6.5 persone. Se si presentano 6 persone la riunione è valida? Ovviamente è valida, ma è la definizione che è poco chiara. Eppure non ci vuole niente a sistemare le cose, basta dire che la riunione è valida se partecipa più della metà delle persone. Penso che sia anche più facile da capire. Ovviamente la stessa definizione va estesa anche agli altri casi, quindi si potrebbe dire in maniera più chiara: "il quorum viene raggiunto quando va a votare più della metà degli aventi diritto.".

La forma della piazza S. Pietro a Roma

Purtroppo a volte le parole non riescono a rappresentare con precisione la realtà. Invece altre volte acquistano addirittura importanza maggiore dell'argomento stesso di cui sono veicolo. E in questi casi è più facile che succeda che una certa affermazione (di per sé falsa) diventi sempre più vera per il solo fatto che la maggior parte delle persone la riporta, dando luogo al quel tam tam che dicevamo all'inizio. Paradossalmente, per fare un esempio, potrebbe succedere che la capitale del Canada sia Toronto (e non Ottawa) solo perché la maggioranza delle persone la pensa così.

Un altro esempio eclatante è quella della forma della piazza S. Pietro a Roma, essa ha forma ellittica perché ormai la gente, e molti libri, la pensano così. La persona intellettualmente onesta, invece, si documenta meglio e trova che la forma è quella del raccordo di due semicerchi; in particolare, i due semicerchi sono ottenuti da due cerchi, ognuno dei quali ha il centro sulla circonferenza dell'altro.

Purtroppo, spesso le parole vanno al di là del significato intrinseco dell'argomento in questione, e vanno per così dire quasi a sostituire i concetti di fondo, assumendo maggiore importanza dell'argomento stesso. È come un bel piatto di pesce che viene apprezzato solo per il condimento.

Penso che i matematici, non solo non debbano permettere che ci siano invasioni di campo, ma debbano a loro volta intervenire in altri campi a mettere ordine, perché troppo spesso con le parole si riesce a travisare a piacimento la realtà. Non è un caso che i politici si permettano il lusso di "sparare balle" a proprio piacimento avendo sempre buon gioco della popolazione.

Bibliografia

[1] Coletti-Scozzafava, "Probabilistic Logic in a Coherent Setting", Kluwer 2002