183. Storia dei metodi per il calcolo della radice

di Michele T. Mazzucato

A conoscere li numeri quadrati per pratica.
Molte volte accade nell'operare di havere a trovare il lato di un numero (la radice quadrata), che non havendo lato, l'operante non se ne ha a servire; e assai volte accade ne i numeri grandi, poi che si è affaticato assai invano, si trova tal numero non haver lato, per non essere quadrato, e hassi gettato il tempo e l'opera; però, per fuggire questo inconveniente, ho pensato di dar certe regole che assai facilitaranno la strada a conoscere quali siano li numeri quadrati.

Raffaele Bombelli (1526-1572), *L'Algebra... (1572)*

Viene definita radice ennesima di un numero **a** quel numero **x**, se esiste, la cui potenza ennesima è **a**.

$$x = \sqrt[n]{a}$$

Con n≠0 e a≥0 se n pari.
L'operazione con la quale viene determinato **x** si chiama *estrazione di radice*. Tale operazione è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza.
Nell'espressione matematica $\sqrt[n]{a}$ il numero **n** è detto *indice del radicale*, **a** è detto *radicando* e il simbolo $\sqrt{}$ è il segno dell'operazione estrazione di radice.
Le proprietà della radice sono:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Le suddette proprietà permettono di estendere le proprietà formali delle potenze alle potenze con esponenti razionali.

Simbolo della radice quadrata utilizzato da Leonardo da Pisa (meglio noto come Leonardo Fibonacci) (1180-1250) nell'opera *Practica geometrica* (1220). Il simbolo deriva dalla parola latina *radix* da cui il termine radice.

Il calcolo della radice di un numero reale si esegue di solito ricorrendo alle tavole dei logaritmi, poiché

$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$ con logaritmi di Henry Briggs (1561-1630) in base 10

$\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a$ con logaritmi di John Napier (1550-1617) in base e (=2.718281...)

Per l'estrazione di radice quadrata (con n = 2) si può ricorrere a vari metodi.

Uno dei metodi più antichi è quello babilonese chiamato anche metodo di Erone di Alessandria (I sec. a.C.) che ne diede una prima esplicita descrizione. Un valore iniziale x viene iterato con la media del valore stesso x e la divisione fra il radicando e il valore medesimo a/x, ossia:

$$x_0 \approx \sqrt{a}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

che converge quadraticamente fornendo il numero corretto delle cifre che, in genere, raddoppia ad ogni iterazione.
Il metodo di Isaac Newton (1642-1727) ricomprende come caso particolare quello babilonese. Newton descrisse il suo metodo nelle opere *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (1669) e *De metodis fluxionum et serierum infinitarum (1671).*

Isaac Newton (1642-1727). Il suo metodo, denominato anche metodo delle tangenti, perviene alla medesima formula del metodo generalizzato di Erone per l'estrazione di una radice ennesima. Erone partendo da basi geometriche e aritmetiche, Newton da quelle differenziali.

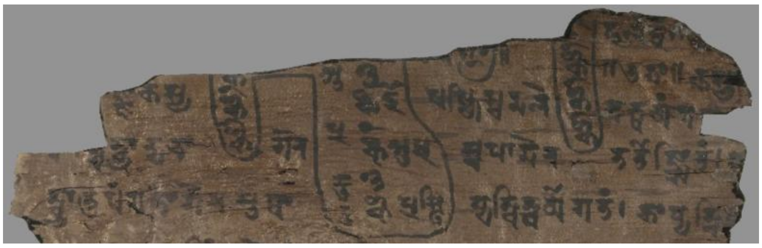
Un altro metodo, approssimato, per il calcolo della radice quadrata si trova nel Bakhshali, un antico manoscritto matematico indiano scoperto nel 1881 in una zona omonima dell'attuale Pakistan dal quale prende il nome. Scritto su corteccia di betulla viene datato fra il II sec. a.C. - III sec. d.C ed è, attualmente, conservato presso la Bodleian Library dell'università inglese di Oxford. In esso si trova la formula per calcolare le radici quadrate di numeri che non sono quadrati perfetti:

$$\sqrt{Q} = \sqrt{A^2 + b} \approx A + \frac{b}{2A} - \frac{\left(\frac{b}{2A}\right)^2}{2\left(A + \frac{b}{2A}\right)}$$

esempio

$$\sqrt{51} = \sqrt{7^2 + 2} \approx 7 + \frac{2}{14} - \frac{\left(\frac{2}{14}\right)^2}{2\left(7 + \frac{2}{14}\right)} = 7.141428571\ldots$$

con 6 cifre decimali esatte. Una moderna calcolatrice scientifica tascabile fornisce 7.141428429...



Spezzone del manoscritto di Bakhshali conservato alla Bodleian Library.

Il matematico scozzese John Napier (1550-1617) nell'opera *Rhabdologiae seu Numerationis per virgulas libri duo* (1617) formulò artifici per eseguire, mediante piastre e asticciole (oggi meglio noti come i *bastoncini di Nepero*), oltre la moltiplicazione e la divisione anche l'estrazione di radici quadrate e cubiche.
L'estrazione di radice quadrata di un numero quadrato perfetto si può effettuare con il metodo della scomposizione in fattori primi dalla cui divisione fra l'indice del radicale e gli esponenti dei radicandi otteniamo il risultato cercato. Per esempio:

$$\sqrt{5664} =$$

$$\begin{array}{r|l} 56644 & 2 \\ 28322 & 2 \\ 14161 & 7 \\ 2023 & 7 \\ 289 & 17 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt{2^2 \cdot 7^7 \cdot 17^2} = 2 \text{ x } 7 \text{ x } 17 = 238 \text{ è il risultato cercato}$$

Lo stesso dicasi per la radice cubica di un numero cubo perfetto. Per esempio:

$$\sqrt[3]{3375} =$$

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 3 \\ 1125 & 3 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt[3]{3^3 \cdot 5^3} = 3 \text{ x } 5 = 15 \text{ è il risultato cercato}$$

Di un qualunque numero intero è possibile stimare da quante cifre è composta la parte intera della sua radice quadrata e quale sia la sua prima cifra, nel seguente modo:

si divide il numero in gruppi di due cifre partendo da destra, il numero dei gruppi fornisce il numero delle cifre della parte intera della sua radice quadrata mentre la radice quadrata approssimata per difetto a meno di una unità del primo gruppo a sinistra fornisce la prima cifra.
Per esempio, del numero intero 2573492 si formano i gruppi di due cifre 2 57 34 92 che risultano 4 pertanto 4 saranno le cifre che comporranno la parte intera della sua radice quadrata, mentre la radice quadrata approssimata per difetto a meno di una unità del primo gruppo a sinistra è 1 che sarà pertanto la prima cifra della sua radice quadrata.

Metodo 1
Metodo del bolognese Raffaele Bombelli (1526-1572) autore dell'opera *L'Algebra, opera di Rafael Bombelli da Bologna, divisa in tre libri con la quale ciascuno da sé potrà venire in perfetta cognitione della teoria dell'Aritmetica* (1572) in tre libri.

esempio per $\sqrt{2573492}$

- si divide il radicando 2573492 in gruppi di due cifre incominciando da destra (il gruppo a sinistra può essere costituito anche da una sola cifra) [2 57 34 92];

- si calcola la radice quadrata approssimata per difetto del primo gruppo di cifre (una o due) a sinistra [1], si calcola il quadrato [1^2] e lo si sottrae dal gruppo in questione [2-1];
- si abbassa il successivo gruppo di due cifre [57] accanto al quoziente precedente [1] e si separa l'ultima cifra [15 7];
- si raddoppia il numero finora calcolato come radice quadrata [1+1], si aggiunge un numero (da 1 a 9) e si moltiplica il tutto per lo stesso numero tale da permettere che il prodotto risultante sia inferiore al resto che abbiamo a sinistra (se nessun numero soddisfa questa condizione si inserisce 0);

```
√ 2 57 34 92       | 1604,2107...
  1                | 1
  157              | 6 1+1= 26 X 6 = 156
  156              |
    134            | 0 16+16= 32 > di 13 quindi 0
    13492          | 4 160+160= 3204 X 4 = 12816
    12816          |
      67600        | 2 1604+1604= 32082 x 2 = 64164
      64164        |
       343600      | 1 16042+16042= 320841 x 1 = 320841
       320841      |
       2275900     | 0 160421+160421= 320842 > di 227590 quindi 0
       227590000   | 7 1604210+1604210= 32084207 x 7 = 224589449
       224589449   |
         3000551 etc.
```

La radice quadrata di 2573492 è 1604 + 676 di resto: $1604^2 = 2572816 + 676 = 2573492$.

Per calcolare anche i decimali della radice quadrata si prosegue il procedimento aggiungendo due zeri alla volta.

metodo 2

Metodo iterativo di Newton che ricerca la radice quadrata di a mediante la funzione

$\mathbf{f(x)} = \mathbf{x}^2 - \mathbf{a}$	da cui	$\mathbf{x}_0 = 1$ $\mathbf{x}_{n+1} = \dfrac{\mathbf{x}_n}{2} + \dfrac{\mathbf{a}}{2\mathbf{x}_n}$
$x_0 =$	esempio per $\sqrt{11}$	1
$x_1 =$	$\dfrac{1}{2} + \dfrac{11}{2 \cdot 1} =$	6
$x_2 =$	$\dfrac{6}{2} + \dfrac{11}{2 \cdot 6} =$	3.916666
$x_3 =$	$\dfrac{3.916666}{2} + \dfrac{11}{2 \cdot 3.916666} =$	3.442588
$x_4 =$	$\dfrac{3.442588}{2} + \dfrac{11}{2 \cdot 3.442588} =$	3.318929
$x_5 =$	$\dfrac{3.318929}{2} + \dfrac{11}{2 \cdot 3.318929} =$	3.316625
$x_6 =$	$\dfrac{3.316625}{2} + \dfrac{11}{2 \cdot 3.316625} =$	**3.31662**...

Christoff Rudolff (1500-1543). Fu il primo ad utilizzare il simbolo di radice √ oggi a noi noto che lo in trodusse nell'opera *Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre, so gemeinicklich die Coß genennt werden* (1525), il primo libro di algebra in lingua tedesca.

metodo 3

Metodo iterativo di Newton che ricerca il reciproco della radice quadrata di **a** mediante la funzione

$g(x) = \frac{1}{x^2} - a$	da cui	$x_0 = 0.5$ $x_{n+1} = 0.5x_n(3 - ax_n^2)$	
$x_0 =$	esempio per $\sqrt{11}$	0.5	
$x_1 =$	$0.5\ 0.5[3\text{-}11\ (0.5)^2] =$	0.0625...	$1/x_1 = 16$
$x_2 =$	$0.5\ 0.0625[3\text{-}11\ (0.0625)^2] =$	0.0924...	$1/x_2 = 10.8216$
$x_2 =$	$0.5\ 0.0924[3\text{-}11\ (0.0924)^2] =$	0.1342...	$1/x_3 = 7.4481$
$x_4 =$	$0.5\ 0.1342[3\text{-}11\ (0.1342)^2] =$	0.1880...	$1/x_4 = 5.3189$
$x_5 =$	$0.5\ 0.1880[3\text{-}11\ (0.1880)^2] =$	0.2454...	$1/x_5 = 4.0740$
$x_6 =$	$0.5\ 0.2454[3\text{-}11\ (0.2454)^2] =$	0.2868...	$1/x_6 = 3.4865$
$x_7 =$	$0.5\ 0.2868[3\text{-}11\ (0.2868)^2] =$	0.3004...	$1/x_7 = 3.3283$
$x_8 =$	$0.5\ 0.3004[3\text{-}11\ (0.3004)^2] =$	0.3015...	$1/x_8 = 3.3166$
$x_9 =$	$0.5\ 0.3015[3\text{-}11\ (0.3015)^2] =$	0.3015...	$1/x_9 =$ **3.3166**

Michael Stifel (1487-1567). Autore di *Die Coss Christoffs Rudolffs* (1553) una revisione dell'opera di Rudolff.

Il simbolo di radice oggi a noi noto venne introdotto per la prima volta dal matematico tedesco Christoff Rudolff (1500-1543) nel 1525. Nel simbolo $\surd$, tuttavia, non appariva il *vinculum*, la linea sopra il radicando. Fu René Descartes (Cartesio) (1596-1650) che usò il simbolo $\sqrt{\ }$ (completo del *vinculum*) nell'opera *La Geometrie* (1637). Il posizionamento dell'indice del radicale $\sqrt[n]{\ }$ venne, invece, proposto dal matematico francese Albert Girard (1595-1632) nell'opera *Invention nouvelle* del 1629, notazione suggerita inizialmente per la radice cubica. Mentre, il francese Michel Rolle (1652-1719) fu la prima persona ad accogliere il suggerimento di Girard nell'opera *Traité d'algèbre, ou principes generaux pour resoudre les questions de mathematique* del 1690, non escludendo a priori che ciò avvenne prima con lo stesso Girard (1633) e Leibniz (1676). Il dividere le cifre a gruppi di due (per la radice quadrata) e di tre (per la radice cubica) necessarie per il calcolo dell'estrazione di radice sono indicazioni già fornite e usate dal matematico indiano Aryabhata (476-550) nel V secolo. La regola pratica di estrazione della radice ennesima, con indice intero e maggiore di tre, si trova nell'opera *General trattato di numeri et misure* (1556) del bresciano Niccolò Fontana (Tartaglia) (1499-1557) e anche nell'opera *De numerosa potestatum ad exegesim resolutione* (1600) di François Viète (1540-1603). Il matematico bolognese Pietro Antonio Cataldi (1552-1626) nell'opera *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadrata delli numeri* (1613) utilizzò per primo le frazioni continue e le serie. Anche se le proprietà dei radicali erano in parte già note a vari matematici quali Diofanto di Alessandria (III sec.), Fibonacci (XIII sec.), all'aretino di Sansepolcro

Luca Bartolomeo de Pacioli (XV sec.), Tartaglia, al pavese Girolamo Cardano (1501-1576) e Bombelli (XVI sec.) la loro trattazione rigorosa e sistematica si ebbe da Descartes (Cartesio) nel XVII secolo in avanti.

similmente si ha per la ricerca della radice cubica di **a** mediante la funzione

$f(x) = x^3 - a$	da cui	$x_0 = 1$ $x_{n+1} = \frac{1}{3}(2 \cdot x_n + \frac{a}{x_n^2})$
$x_0 =$	esempio per $\sqrt[3]{11}$	1
$x_1 =$	$\frac{1}{3}(2 \cdot 1 + \frac{11}{1^2}) =$	4.3333
$x_2 =$	$\frac{1}{3}(2 \cdot 4.3333 + \frac{11}{4.3333^2}) =$	3.0841
$x_3 =$	$\frac{1}{3}(2 \cdot 3.0841 + \frac{11}{3.0841^2}) =$	2.4415
$x_4 =$	$\frac{1}{3}(2 \cdot 2.4415 + \frac{11}{2.4415^2}) =$	2.2427
$x_5 =$	$\frac{1}{3}(2 \cdot 2.2427 + \frac{11}{2.2427^2}) =$	2.2241
$x_6 =$	$\frac{1}{3}(2 \cdot 2.2241 + \frac{11}{2.2241^2}) =$	2.2239
$x_7 =$	$\frac{1}{3}(2 \cdot 2.2239 + \frac{11}{2.2239^2}) =$	**2.2239...**

In generale, la radice ennesima di un numero $\sqrt[n]{a}$ la possiamo calcolare applicando il metodo di Newton all'equazione x^n-a = 0 partendo da una prima approssimazione x_0 (ad esempio lo stesso valore di a) e ottenendo iterativamente i valori successivi di x_k con la formula seguente:

$$x_0 = a$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n - a}{n \cdot x_k^{n-1}}$$

sino alla precisione desiderata. Migliore sarà la stima iniziale di x_0, che meglio approssima il valore della radice, minori saranno le iterazioni da effettuare per ottenere il risultato.


Die Coss
Christoffs Rudolffs
Die schönen Exempeln der Coss
Durch
Michael Stifel
Gebessert vnd sehr gemehret.
Den Innhalt des gantzen Buchs
such nach der Vorred.
Zu Königsperg in Preussen
Gedrückt/ durch Alexandrum
Lutomyslensem im jar
1553.

Das 7 Capitel Fol. 88
Als.
$\sqrt{}2\frac{2}{3}$ zu $\sqrt{}16\frac{2}{3}$. Facit $\sqrt{}.\frac{98}{3}$
Item wenn es sich begeben wirt/das die ein zal vngebrochen ist/so müss sye auch gebrochen werden/vnd vnder gleyche benennung gebracht/ Als
$\sqrt{}2\frac{2}{3}$ zu $\sqrt{}6$. steht also
$\sqrt{}.\frac{8}{3}$ vnd $\sqrt{}.\frac{18}{3}$ facit $\sqrt{}.\frac{50}{3}$
Sind aber die zeler vorhin rational/so bedarff es keynes reducirens das sye rational werden.
Als $\sqrt{}.\frac{16}{3}$ zu $\sqrt{}.\frac{25}{3}$ facit $\sqrt{}27$. Denn 4 vnd 5 ist 9. Das ist $\sqrt{}81$. steht also $\sqrt{}.\frac{81}{3}$. facit $\sqrt{}27$.
Item
$\sqrt{}2$ zu $\sqrt{}.\frac{25}{2}$. steht also $\sqrt{}.\frac{4}{2}$. $\sqrt{}.\frac{25}{2}$.
Facit $\sqrt{}.\frac{49}{2}$
Bb ij Subo

Copertina e una pagina dell'opera *Die Coss Christoffs Rudolffs* (1553) di Stifel.

Bibliografia

Bottazzini U. - Freguglia P. - Toti Rigatelli L., *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze 1992
Cajori F., *A History of mathematics*, Macmillan, New York 2nd ed. 1919
Channabasappa M.N., "On the square root formula in the Bakshali manuscript", Indian J. History Sci. vol. 11 (2) pp. 112-124
Ifrah G., *Enciclopedia universale dei numeri*, Mondadori, Milano 2008
Piccato A., *Dizionario dei termini matematici*, Rizzoli, Milano 1987
Rittaud B., *La favolosa storia della radice quadrata di due*, Bollati Boringhieri, Torino 2010