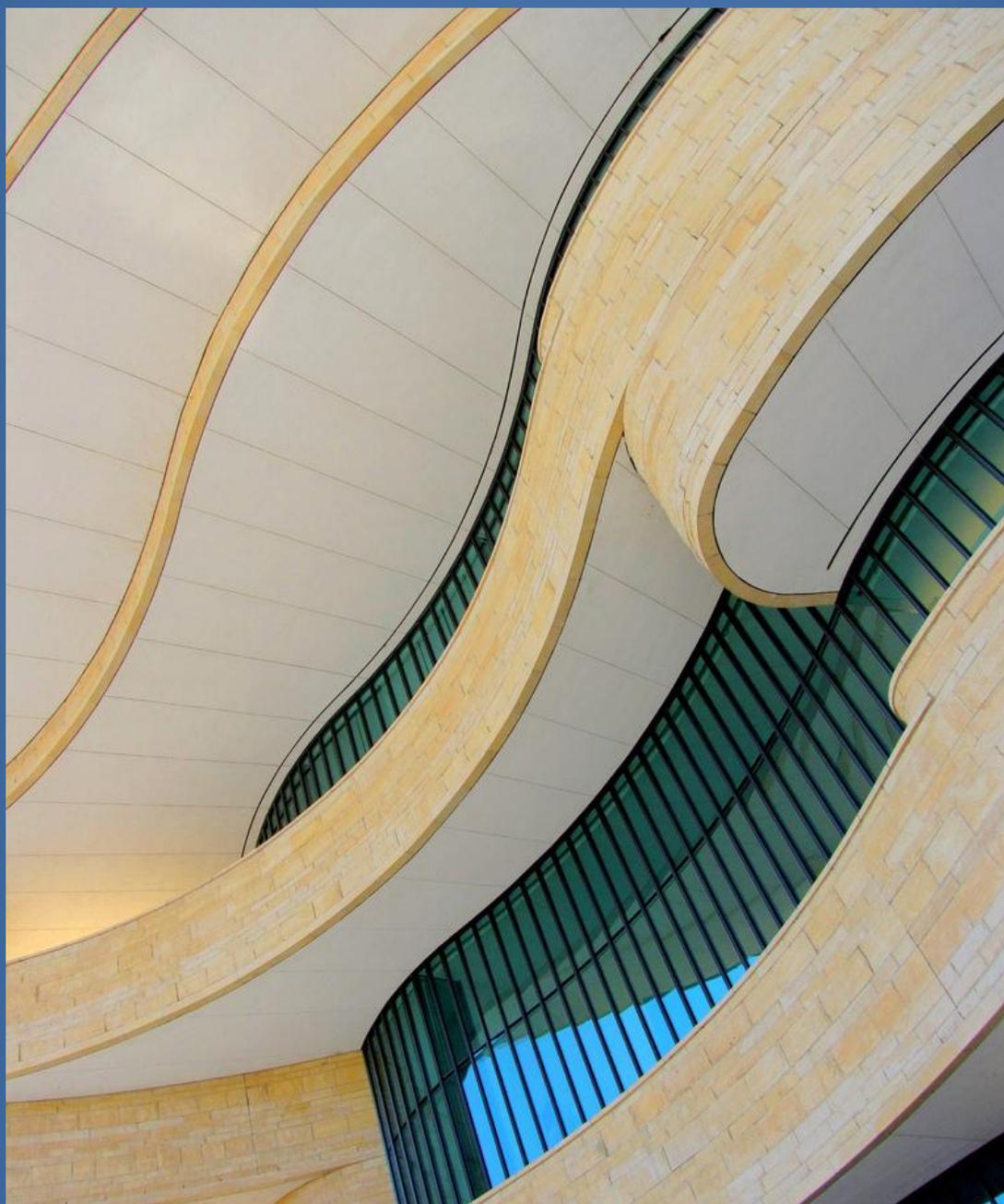


• Numero 19 – Aprile 2013 •



Curves by O Palsson

<http://www.flickr.com/photos/opalsson/4406339012>

CURVE ALGEBRICHE – OPINIONI – CHAOS – POTENZE – RADICE – TRE CORPI

Come proporre un contributo

Istruzioni per gli autori

La rivista pubblica articoli, interviste, buone pratiche e giochi relativamente alla matematica e alle sue applicazioni.

Lo stile, la terminologia e le idee espresse devono essere chiari e accessibili a tutti.

Gli articoli saranno valutati da uno o più collaboratori esperti in materia. La redazione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore.

È possibile che la redazione subordini la pubblicazione dell'articolo a modifiche anche sostanziali che devono essere fatte dall'autore. I contributi devono essere inviati in forma elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato .doc, .docx, .rtf, .odt o formati analoghi. Le formule possono essere in Microsoft Equation Editor, MathType, Open office math o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati e inviati in file a parte. Di ogni elemento non testuale deve essere indicata la posizione precisa all'interno del testo. Se le immagini utilizzate sono protette da diritti d'autore, sarà cura dell'autore dell'articolo ottenere le autorizzazioni necessarie.

Nella prima pagina andranno indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale e istituzione o ambiente professionale di appartenenza, indirizzo e-mail.

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (5-10 righe) preferibilmente in italiano e in inglese, e dovrà terminare con una bibliografia.

I riferimenti bibliografici devono essere indicati all'interno del testo nel seguente modo: [3] oppure [Ba], se si deve indicare la pagina usare [Ba, p.15].

Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia.

I contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

La redazione non garantisce la correttezza scientifica del contenuto degli articoli. Gli autori sono responsabili del contenuto dei testi inviati per la pubblicazione.

Se l'articolo è stato pubblicato in altra sede l'autore deve richiederne l'autorizzazione a chi ha pubblicato per primo l'articolo e fornire le coordinate alla redazione.

I testi pubblicati in questa rivista, se non diversamente indicato, sono soggetti a licenza Creative Commons Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate 3.0: la riproduzione, distribuzione e divulgazione dei testi sono consentite a condizione che vengano citati i nomi degli autori e della rivista Matematicamente.it Magazine; l'uso commerciale e le opere derivate non sono consentiti.

MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito
www.matematicamente.it

Registrazione del 19.12.2006 al n.953 del Tribunale di Lecce
ISSN 2035-0449

Direttore responsabile

Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it

Vicedirettore

Luca Lussardi
lucalussardi@matematicamente.it

Redazione

Flavio Cimolin
flaviocimolin@matematicamente.it
Diego Alberto - Luca Barletta - Michele Mazzucato - Nicola Chiriano

Hanno collaborato a questo numero

Rosa Marincola, Joseph Toscano, Nicola De Nitti, Stefano Borgogni, Michele T. Mazzucato, Marco Giancola, Daniela Molinari.

Sommario

179. Curve Algebriche: gioielli virtuali	5
Rosa Marincola	
180. Quando anche la matematica diventa un'opinione	14
Joseph Toscano	
181. Nonlinear Dynamics and Chaos: an Introduction.	19
Nicola De Nitti	
182. La fine delle potenze	25
Stefano Borgogni	
183. Storia dei metodi per il calcolo della radice	33
Michele T. Mazzucato	
184. Il problema ristretto dei tre corpi	41
Marco Giancola	
185. Lo scaffale dei libri	52
“Mathematics of Life” di Ian Stewart	
“Matematica Magica” di Vanni Bossi	
“Fisica delitti e digressioni” di Domenico Signorelli	

Imondi 3D e gli script di programmazione svelati da Rosa Marincola. I dubbi, le perplessità e gli errori nei libri di testo e nella matematica raccontata troppo in fretta, un'analisi stringente di Joseph Toscano. Un'introduzione, in inglese, della dinamica non lineare a cura di Nicola De Nitti. Molti quesiti, più o meno ricreativi, di matematica chiedono di individuare l'ultima cifra di una potenza piuttosto elevata di un numero, Stefano Borgogni fa un'analisi attenta di questa tipologia di quesiti. Michele Mazzucato racconta sinteticamente la storia dei metodi per calcolare la radice di un numero. Marco Giancola ci introduce al complesso problema dei tre corpi. Infine qualche consiglio per una buona lettura.

Antonio Bernardo

179. Curve algebriche: gioielli virtuali

Rosa Marincola
rosamarincola@virgilio.it

Premessa

Con EdMondo¹, l'INDIRE offre uno spazio gratuito (land) in un mondo virtuale, simile a Second Life e altri mondi virtuali 3D OpenSim, ma protetto, perché riservato a docenti e studenti italiani (anche minorenni), per sperimentare percorsi didattici innovativi, in una realtà "immersiva", dove è possibile collaborare in presenza e a distanza. L'ambiente consente la comunicazione sincrona sia in chat sia in voice, la presenza è simulata da avatar come nei videogames 3D abitualmente utilizzati dai ragazzi, con la differenza che i soggetti coinvolti sono risolutori e poi esecutori dei "videogiochi", non semplici fruitori. È possibile, infatti, esplorare, costruire (rezzare), ma soprattutto "animare" gli oggetti ossia simulare movimenti, comportamenti attraverso dei programmi: gli script, in LSL (Linden Scripting Language), un linguaggio simile a C, C #, Java, ma fortemente tipizzato.

A differenza di altri linguaggi con interfaccia grafica si possono utilizzare non solo le funzioni standard di libreria, gli operatori logici e aritmetici o le consuete tecniche di programmazione (metodologia top-down e altre), ma ad esempio per produrre animazioni o rezzare gli oggetti in particolari posizioni occorre predisporre dei modelli matematici in cui si utilizzano vettori e trasformazioni geometriche (in particolare rotazioni e traslazioni in R^3), equazioni parametriche, diversi sistemi di riferimento, ecc. Tutto ciò crea un'interessantissima commistione per l'apprendimento integrato dell'informatica e della matematica in uno scenario motivante per gli adolescenti.

In questo contributo, in prosecuzione col "Lezioni di scripting in LSL a Scriptlandia"², presenterò degli script (codici scritti in LSL), ma non per generare animazioni di oggetti, dialoghi o cambiamenti di texture, bensì per applicazioni matematiche: generare (plottare) curve algebriche da un prim. Tali costruzioni, possono costituire un nuovo modo per affrontare lo studio delle curve e delle loro proprietà, in un contesto, che ne esalta anche gli aspetti estetici.

Nota di building: per ciascuna delle seguenti curve occorre rezzare un cubo e una sferetta di piccole dimensioni, rinominata "punto" fare il take, cioè "prenderla" nell'inventario e trascinarla nel contenuto del cubo, in cui inserire anche lo script di ciascuna curva..



Figura 1: suggestivo fascio di semicirconferenze

¹ <http://www.scuola-digitale.it/ed-mondo/progetto/info/>

² Matematicamente.it Magazine N.18 Dicembre 2012 <http://www.matematicamente.it/magazine/18dic2012/177marincola-scriptlandia.pdf>

La catenaria

Ho trattato l'argomento nell'articolo "Elementi di geometria descrittiva in natura e in architettura" (http://www.matematicamente.it/magazine/maggio2008/7-M.Maricola-Geometria_descrittiva.pdf).

Per prendere visione della tipologia di ambiente e per favorire quanti non abbiano molta familiarità con tali piattaforme, suggerisco di seguire il video You Tube: Lezioni di scripting - Edmondo Rappresentazione tridimensionale di curve parametriche dell'esperto programmatore Salahzar Stenvaag: <https://www.youtube.com/watch?v=xk5uloijNxs>.

Lo script di base utilizzato per plottare le curve è stato distribuito dal medesimo esperto durante la lezione di scripting in Edmondo del 16/01/2013 a cui ho partecipato insieme ad altri docenti.



Figura 2: catenaria

```
float e=2.718281;
integer angle=-180;
vector u;
vector v;
vector center;

plot(vector x)
{
    string modo="rez";
    llRezObject("punto",x,ZERO_VECTOR,ZERO_ROTATION,0);
}
//funzione per calcolare il coseno iperbolico
float cosh(float rad)
{ return
  (llPow(e, rad)+(1/llPow(e, rad)))/2;
}

vector calcolapos(integer angle)
{
    float rad=DEG_TO_RAD*angle;
    //equazione parametrica della catenaria
    return rad*u+cosh(rad)*(v)+center;
}

default
{
    touch_start(integer total_number)
    {
        llSetText("catenaria", <0,0,0>, 1);
        v=llVecNorm(llRot2Left(llGetRot()));
        u=llVecNorm(llRot2Fwd(llGetRot()));

        center=llGetPos();
        // metodo con il timer per generare meno lag

        llSetTimerEvent(0.01);
    }
}
```

```

}
timer()
{
    vector pos=calcolapos (angle);
    plot (pos);
    angle+=5;
    if (angle>180) llSetTimerEvent (0);
}
}

```

Il quadrifoglio

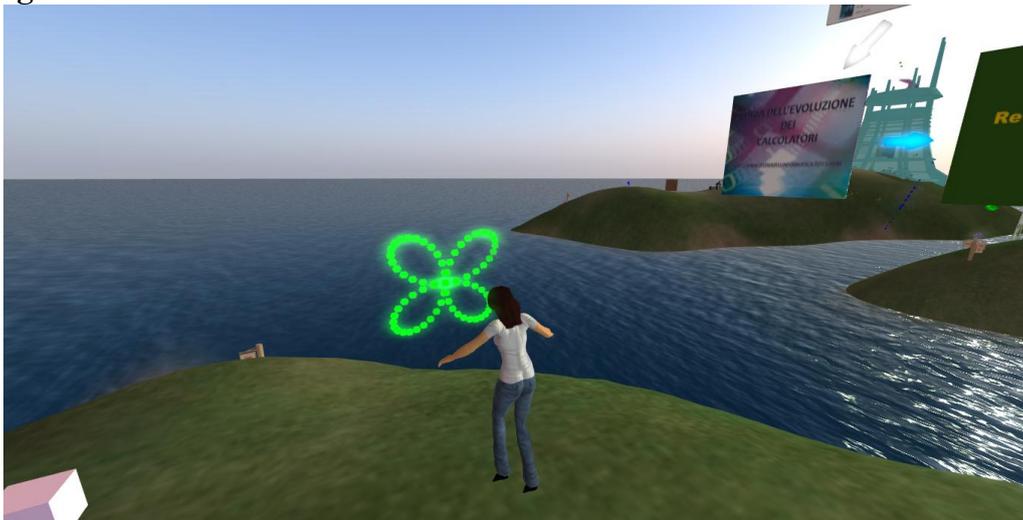


Figura 3: quadrifoglio

```

plot(vector x)
{
    string modo="rez";
    llRezObject ("punto", x, ZERO_VECTOR, ZERO_ROTATION, 0);
}
vector calcolapos (integer angle)
{
    float rad=DEG_TO_RAD*angle;
    return
//Equazione parametrica del quadrifoglio
(2*llCos (rad)*llPow (llSin (rad), 2))*u+(2*llSin (rad)*llPow (llCos (rad), 2))*(v)+center;
}
vector u; vector v;
vector center;
integer angle;
default
{
    touch_start (integer total_number)
    {
        v=llVecNorm (llRot2Left (llGetRot ()));
        u=llVecNorm (llRot2Fwd (llGetRot ()));

        center=llGetPos ();
        angle=0;
        llSetTimerEvent (0.01);
    }
}
timer()
{
    vector pos=calcolapos (angle);
    plot (pos);
    angle+=5;
}

```

```

        if (angle > 360) llSetTimerEvent(0);
    }
}

```

La rodonea



Figura 4: rodonea

```

//http://www.mi.imati.cnr.it/~alberto/mnG70cURPISP.pdf

plot(vector x)
{
    string modo="rez";
    llRezObject("punto",x,ZERO_VECTOR,ZERO_ROTATION,0);
}
vector calcolapos(integer angle)
{
    float rad=DEG_TO_RAD*angle;

//equazione parametrica della rodonea
    return (llCos(rad)*llSin(5*rad/7))*u+(llSin(rad)*llSin(5*rad/7))*(v)+center;
}

vector u; vector v;
vector center;
integer angle;

default
{
    touch_start(integer total_number)
    {
        v=llVecNorm(llRot2Left(llGetRot()));
        u=llVecNorm(llRot2Fwd(llGetRot()));

        center=llGetPos();
        angle=-500;
        llSetTimerEvent(0.01);
    }
    timer()
    {
        vector pos=calcolapos(angle);
        plot(pos);
        angle+=8;
        if (angle > 740) llSetTimerEvent(0);
    }
}

```

Lacrima



Figura 5: fascio di lacrime tra i fondali.

```

plot(vector x)
{
    string modo="rez";
    llRezObject("punto",x,ZERO_VECTOR,ZERO_ROTATION,0);
}
vector calcolapos(integer angle)
{
    float rad=DEG_TO_RAD*angle;
    //equazione parametrica di una curva lacrima
    return 2*llCos(rad)*u+(2*llSin(rad)*llPow(llSin(rad/2),4))*(v)+center;
}
//per ottenere un fascio di curve, dopo averne rezzato una, lasciare il prim generatore nella stessa
posizione e variare l'esponente della potenza llPow e sostituire il 4 con 2 e con 8
//per rezzare la circonferenza circoscritta al fascio di curve, sostituire l'equazione parametrica
con la seguente (lasciare il prim generatore nella stessa posizione):
2*llCos(rad)*u+(2*llSin(rad))*(v)+center;
//per ottenere le semicirconferenze dell'arcobaleno, occorre far variare l'angolo da 0 a 180°
}

vector u; vector v;
vector center;
integer angle;

default
{
    touch_start(integer total_number)
    {
        v=llVecNorm(llRot2Left(llGetRot()));
        u=llVecNorm(llRot2Fwd(llGetRot()));

        center=llGetPos();

        // metodo con il timer
        angle=0;
        llSetTimerEvent(0.01);
    }
    timer()
    {
        vector pos=calcolapos(angle);
        plot(pos);
        angle+=5;
        if(angle>360) llSetTimerEvent(0);
    }
}
    
```

La farfalla

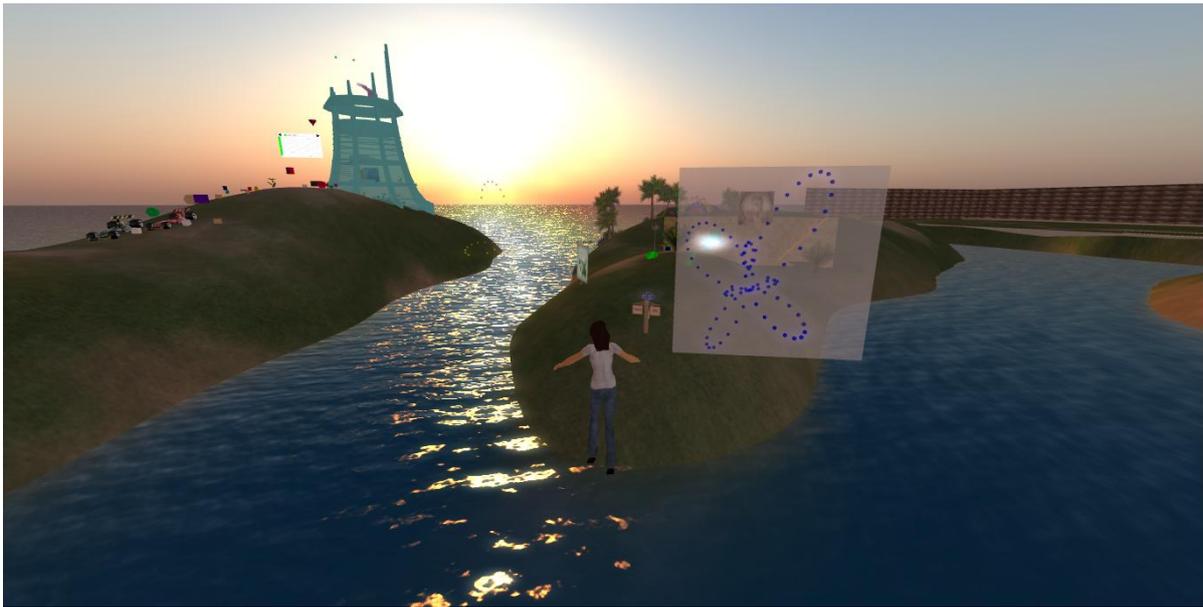


Figura 6: curva farfalla

<http://www.mi.imati.cnr.it/~alberto/mnG70cURPISP.pdf>

```
float e=2.7;
    integer angle=0;
    vector u;
    vector v;
vector center;

plot(vector x)
{
    string modo="rez";
    llRezObject("punto",x,ZERO_VECTOR,ZERO_ROTATION,0);
}

vector calcolapos(integer angle)
{
    float rad=DEG_TO_RAD*angle;
    return
    llSin(rad)*(llPow(e, llCos(rad))- 2*llCos(4*rad)+llPow(llSin(rad/12-PI/24), 5))*u +
    llCos(rad)*(llPow(e, llCos(rad))-2*llCos(4*rad)+
    llPow(llSin(rad/12-PI/24),5))*(v)+center;
}

default
{
    touch_start(integer total_number)
    {
        llSetText("Farfalla", <0,0,0>, 1);
        v=llVecNorm(llRot2Left(llGetRot()));
        u=llVecNorm(llRot2Fwd(llGetRot()));

        center=llGetPos();
        // metodo con il timer

        llSetTimerEvent(0.01);

    }
    timer()
    {
        vector pos=calcolapos(angle);
        plot(pos);
        angle+=2;
        if(angle>360) llSetTimerEvent(0);
    }
}
}
```



Figura 7: curva farfalla con effetti speciali.

L'elica

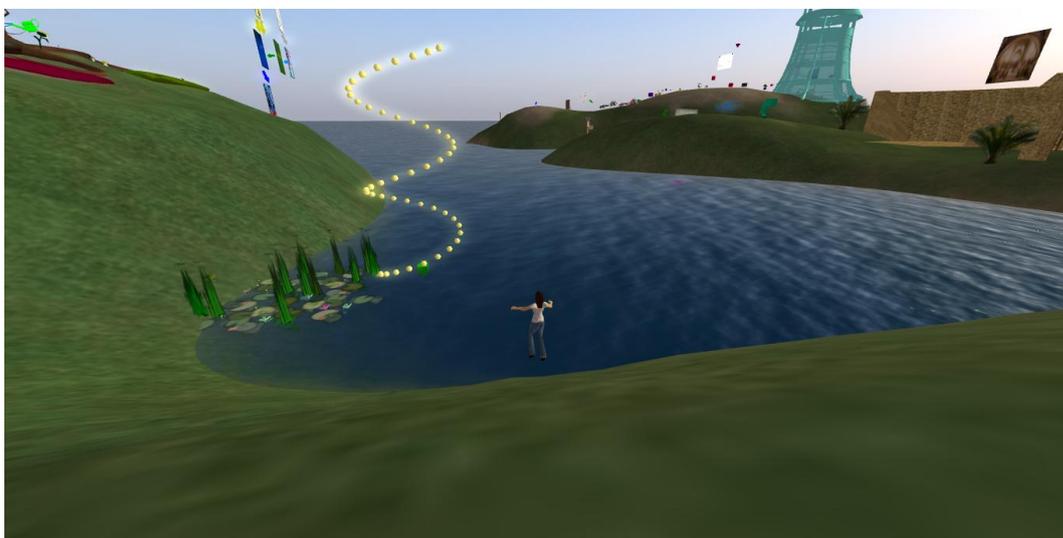


Figura 8: elica

```

plot(vector x)
{
    string modo="rez";
    llRezObject("nuvola",x,ZERO_VECTOR,ZERO_ROTATION,0);
}
vector calcolapos(integer angle)
{
    float rad=DEG_TO_RAD*angle;
    return 2*llCos(2*PI*rad)*u+2*llSin(2*PI*rad)*(v)+center+4*rad*w ;
}

vector u;
vector v;
vector w;
vector center;
integer angle;

default
{
    touch_start(integer total_number)
    {
        v=llVecNorm(llRot2Left(llGetRot()));
        u=llVecNorm(llRot2Fwd(llGetRot()));
        w=llVecNorm(llRot2Up(llGetRot()));
        center=llGetPos();
    }
}
    
```

```

angle=0;
llSetTimerEvent(0.01);

}
timer()
{
vector pos=calcolapos(angle);
plot(pos);
angle+=5;
if(angle>360) llSetTimerEvent(0);
}
}

```

Il Nastro di Möbius



Figura 9: nastro di Möbius

```

//Al posto della sferetta, per il rezzing, utilizzare un prim di nome "mattoncino"
//a forma di piccolo parallelepipedo, in questo modo si otterrà come effetto una superficie anziché
//di una curva. Trascinare il "mattoncino" dal proprio inventario in quello del prim da cui verrà rezzata
//la curva
plot(vector x)
{
string modo="rez";
llRezObject("mattoncino",x,ZERO_VECTOR,ZERO_ROTATION,0);
}
vector calcolapos(integer angle)
{
float rad=DEG_TO_RAD*angle;
//equazione parametrica
return
(1+0.5*llCos(rad/2))*llCos(rad)*u+(1+0.5*llCos(rad/2))*llSin(rad)*(v)+center+0.5*llSin(rad/2)*w;
}

vector u;
vector v;
vector w;
vector center;
integer angle;

default
{
touch_start(integer total_number)
{
llSetText("Nastro di Moebius", <1,1,1>,1);
v=llVecNorm(llRot2Left(llGetRot()));
u=llVecNorm(llRot2Fwd(llGetRot()));
w=llVecNorm(llRot2Up(llGetRot()));
center=llGetPos();
}
}

```

```
// metodo con il timer
angle=0;
llSetTimerEvent(0.01);

}
timer()
{
    vector pos=calcolapos(angle);
    plot(pos);
    angle+=8;
    if(angle>720) llSetTimerEvent(0);
}
}
```

Conclusioni

In questo contributo ho voluto mostrare la bellezza di alcuni modelli matematici in 2D e 3D realizzati con l'uso delle tecnologie in ambiente virtuale "giocando" in modo opportuno sulla variazione di angoli, vettori ed equazioni parametriche a partire da un unico script di base.

Sitografia essenziale

EdMondo:

<http://www.scuola-digitale.it/ed-mondo/progetto/info/>

LSL Portal:

http://wiki.secondlife.com/wiki/LSL_Portal

A quanti non conoscono il linguaggio LSL segnalo un mio breve tutorial con riferimenti anche ad altre risorse sull'argomento: Lezioni di scripting in LSL a Scriptlandia

http://www.matematicamente.it/il_magazine/numero_18%3a_dicembre_2012/177_lezioni_di_scripting_in_lsl_a_scriptlandia_201302017915/

Elementi di geometria descrittiva in natura e in architettura:

http://www.matematicamente.it/magazine/maggio2008/7-M.Marincola-Geometria_descrittiva.pdf

Repertorio di curve piane speciali:

<http://www.mi.imati.cnr.it/~alberto/mnG70cURPISP.pdf>

Encyclopédie des forms mathématiques remarquables:

<http://www.mathcurve.com/index.htm>

Il nastro di Möbius:

http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argomento/Matematicae/Aprile_07/AnelliMobius.htm

Playlist dei video di scripting EdMondo realizzati da Salahzar Steenvag:

http://www.youtube.com/playlist?list=PLXTK688RnbsFbDvW-5l8u8vdAgPoC_y_E

180. Quando anche la matematica diventa un'opinione

Joseph TOSCANO¹

joseph.toscano@sbai.uniroma1.it

A volte succede che dei luoghi comuni vengano eletti a “verità assolute” solo perché vengono proferiti da persone “affidabili” o dalla stragrande maggioranza delle persone. Ma, ad un esame più attento, può capitare che le cose non stiano effettivamente come appaiono a prima vista. Sembra strano, ma ciò avviene anche nel campo della matematica, sia ad opera di comuni mortali, sia ad opera dei cosiddetti “addetti al mestiere”. Vediamo alcuni esempi.

Una volta, quando andavo al liceo, un docente (non di matematica) se ne uscì così: “Risolvere questo problema è impossibile, è come trovare la quadratura del cerchio. Come sapete è impossibile trovare un quadrato che abbia la stessa area di un cerchio”. Lì per lì rimasi un po' perplesso e mi dissi: “Non è vero, se ho un cerchio di raggio 1 metro, avrà area pari a π metri quadri, e un quadrato che abbia stessa area avrà lato pari a $\sqrt{\pi}$ metri”. Anni dopo capii che il docente aveva travisato la questione: infatti il problema della quadratura del cerchio non sta nel trovare un quadrato avente stessa area, bensì nel costruire un quadrato che abbia la stessa area di un dato cerchio, con uso esclusivo di riga e compasso.

Ricordo ancora un'altra volta che una maestra disse: “Un chilometro cubo è così grande che tutto il pianeta terra non ce la fa ad occuparlo!”. Anche qui mi dissi: “Ma se solo il monte Everest è alto più di otto chilometri, cosa ci vuole ad avere un volume maggiore di un chilometro cubo!”. Questi appena citati sono solo due esempi di come la matematica, in mano ai non addetti ai lavori, possa essere presa a calci. Spesso si assiste a delle classiche “invasioni di campo” da parte di persone che, per il solo fatto di avere un certo ruolo o una certa dialettica, pensano che anche nella matematica sia lecito spararle a proprio piacimento, forse credendo che, al contrario di altre situazioni, non sia possibile fare delle verifiche. Qui i matematici dovrebbero fare maggiore attenzione affinché persone del suddetto tipo non facciano invasione di campo.

Ordine di grandezza

Ma, ahimè, a volte anche i matematici fanno dei clamorosi autogol. Un esempio eclatante è la definizione di ordine di grandezza. È possibile verificare che molti libri di testo delle scuole superiori italiane di secondo grado recitano più o meno così:

“Si dice ordine di grandezza di un numero (positivo) la potenza di 10 più vicina a quel numero.”

Subito dopo aggiungono la seguente regola per determinare l'ordine di grandezza:

1) si scrive il numero x in forma scientifica, e cioè nella forma $x = a \cdot 10^n$, con $1 \leq a < 10$;

2) se $a < 5$ l'ordine di grandezza è 10^n ; se $a \geq 5$ l'ordine di grandezza è 10^{n+1} .

Supposto lecito che ognuno possa dare la definizione come meglio crede (per esempio qualche autore afferma che è la massima potenza del 10 contenuta in quel numero), ciò non toglie che non deve cadere in contraddizione.

Nel caso citato sopra è fin troppo palese la contraddizione tra le due affermazioni; si voglia determinare per esempio l'ordine di grandezza del numero 52. Secondo la definizione il suo ordine di grandezza dovrebbe essere 10, infatti $|52-10| < |52-100|$, ossia $42 < 48$.

Invece secondo la regola, una volta posto $52 = 5.2 \cdot 10^1$, e poiché $5.2 \geq 5$ l'ordine di grandezza dovrebbe essere 10^2 .

In altre parole, secondo la definizione il punto di confine è 5.5, secondo la regola è 5.

¹ Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria - Sezione di Matematica. Università “La Sapienza”, 00161 Roma.

Ora, dopo aver segnalato la cosa a varie case editrici, un autore mi ha risposto che il concetto di vicinanza va inteso nel senso di potenza e non di differenza. Per dirla in termini più chiari, il valore a andrebbe prima espresso nella forma 10^x con $0 \leq x < 1$, poi se $x < 0.5$ l'ordine di grandezza è 10^n , se $x \geq 0.5$ l'ordine di grandezza è 10^{n+1} .

In pratica, ora il punto di confine diventa $10^{0.5} = \sqrt{10} \approx 3.162$, ma evidentemente anche qui rimane la contraddizione con la regola; ed è proprio ciò che ho replicato all'autore.

Al che egli stesso ha ammesso che il concetto andava rivisto, e in cuor mio l'ho apprezzato per il coraggio che ha avuto nell'ammettere tale svista.

Ma perché un numero considerevole di libri ha commesso lo stesso errore? A volte sembra che quando qualcuno genera una falsa notizia, gli altri si affrettino a innescare un tam tam deleterio, preoccupati soltanto di clonare nel modo più fedele possibile il messaggio ricevuto, dimenticando invece che uno dei compiti principali del matematico è quello di verificare prima di tutto la fondatezza del messaggio ricevuto.

Purtroppo, quello appena citato non è un caso isolato. Vediamone altri, rimanendo sempre nell'ambito dei testi di matematica (non solo delle scuole superiori).

Metodo di Cramer

Un altro caso eclatante è quello relativo al metodo di Cramer nella soluzione di sistemi di due equazioni lineari in due incognite. Essi recitano più o meno così:

sia dato il seguente sistema di due equazioni lineari nelle due incognite x e y :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Costruite le matrici $\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} c & b \\ f & e \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix}$, si calcolino i valori dei rispettivi determinanti

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd, \quad D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - bf, \quad D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - cd.$$

Le soluzioni sono:

- se $D \neq 0$, $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$;
- se $D = 0$ e $(D_x = 0) \wedge (D_y = 0)$ il sistema è indeterminato;
- se $D = 0$ e $(D_x \neq 0) \vee (D_y \neq 0)$ il sistema è impossibile.

Sui coefficienti a, b, c, d, e, f non viene fatta nessuna restrizione, solo qualcuno si sbilancia nel dire che essi non debbono essere tutti contemporaneamente nulli. In realtà se fossero tutti nulli non ci sarebbe nessun problema, ma se qualcuno di essi, per esempio f fosse diverso da zero, ecco che salterebbe subito all'occhio la contraddizione.

Esaminiamo per esempio il caso banale $a = b = c = d = e = 0$, $f = 1$, si ha il sistema

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 1. \end{cases} \text{ equivalente a } \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 1. \end{cases} \text{ che risulta ovviamente impossibile (non indeterminato).}$$

Invece applicando la regola di Cramer, per i determinanti si hanno i valori $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$ che danno come risposta un sistema indeterminato (e non impossibile), contraddicendo quanto trovato prima.

Risulta così evidente la non felice definizione del metodo di Cramer.

Indipendenza stocastica

Un altro caso riguarda l'indipendenza stocastica di due eventi. Molti testi danno la seguente definizione: A è indipendente da B se e solo se $P(A|B) = P(A)$, senza porre nessuna condizione né su A , né su B ; al massimo qualcuno impone che sia $P(B) \neq 0$. Poi in seguito dimostrano che se A è indipendente da B , allora anche B è indipendente da A , concludendo che l'indipendenza stocastica è una definizione

simmetrica, sintetizzando il tutto nella seguente definizione: A e B sono indipendenti se e solo se $P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$.

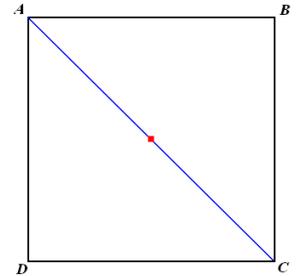
Tutto ciò sarebbe corretto se si ponesse la condizione $0 < P(A), P(B) < 1$, ma questo non viene mai fatto. Purtroppo quando si lavora con eventi di probabilità pari a 0 o a 1 ci si inoltra su un terreno pericoloso dove è facile commettere errori.

Per chiarire le idee consideriamo il seguente esempio. Sia dato un quadrato di vertici A, B, C e D , e si scelga a caso un punto P su di esso; si definiscano i seguenti eventi:

E = “Il punto P cade esattamente al centro”,

H = “Il punto P cade sulla diagonale AC ”.

Si ha ovviamente $P(E) = 0$, da ciò non segue però che E sia impossibile, in altre parole, pur avendo probabilità nulla, il punto P può cadere sul centro. Formalizzando, si ha $P(E) = 0 \not\Rightarrow E = \emptyset$, avendo indicato con \emptyset l'evento impossibile.



Analogamente si ha $P(H) = 0$, anche qui non segue che H sia impossibile, infatti, pur avendo probabilità nulla, il punto P può cadere sulla diagonale AC ; formalizzando si ha $P(H) = 0 \not\Rightarrow H = \emptyset$.

Di conseguenza, si ha $P(E^c) = P(H^c) = 1$ (E^c è l'evento contrario di E), da ciò non segue però che sia E^c che H^c siano certi, in simboli $P(E^c) = 1 \not\Rightarrow E^c = \Omega$ e $P(H^c) = 1 \not\Rightarrow H^c = \Omega$, avendo indicato con Ω l'evento certo.

Ora, è intuitivo che si ha $P(E|H) = 0$: tanto per capirci, supposto vero che il punto sia caduto sul segmento AC , la probabilità che sia caduto esattamente al centro (supposto sempre che sia stato scelto a caso) è nulla, e quindi, essendo $P(E|H) = P(E)$, si conclude che E è stocasticamente indipendente da H . Consideriamo ora la probabilità $P(H|E)$, poiché E implica H è ovvio che $P(H|E) = 1$, e quindi si ottiene $P(H|E) \neq P(H)$, si conclude che H non è stocasticamente indipendente da E , contravvenendo alla proprietà di simmetria enunciata da vari autori.

Sempre ragionando sul quadrato, si può notare che $P(E|H^c) = 0$ (infatti E ed H^c sono incompatibili) e $P(E) = 0$, e quindi E è stocasticamente indipendente da H^c ; al contrario, si ha $P(H^c) = 1$, ma $P(H^c|E) = 0$, da cui H^c non è stocasticamente indipendente da E ; quindi, anche considerando eventi con probabilità pari a 1 si possono generare delle contraddizioni.

Ora, per affrontare il problema in modo più profondo bisogna ricorrere a nozioni (si veda [1]) che indubbiamente non fanno parte di un corso di base di “Calcolo delle Probabilità”, ma proprio per questo è meglio cautelarsi fin dall'inizio e dichiarare che si sta lavorando sotto la condizione :

$$0 < P(A), P(B) < 1$$

Alcune definizioni

Ci sono altri casi invece in cui non ci sono errori, ma sarebbe di gradimento che i matematici si mettessero d'accordo con le definizioni.

Per esempio, lo “0” appartiene all'insieme dei numeri naturali? Alcuni dicono di sì, altri dicono di no.

Un altro caso riguarda la definizione di funzione continua.

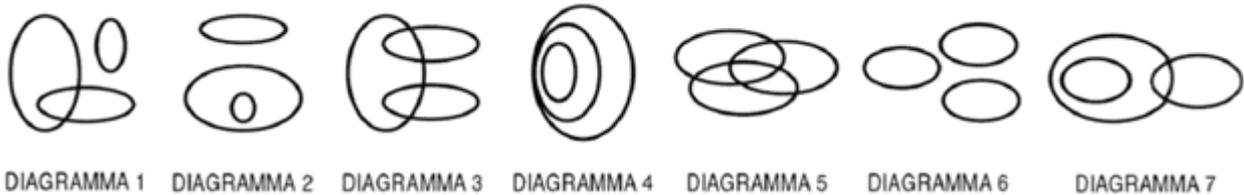
Per esempio la funzione $y = \frac{1}{x}$, è continua nel punto $x = 0$? Alcuni dicono che non ha senso parlare di continuità perché la funzione lì non è definita.

Altri dicono che è vero che lì la funzione non è definita, ma si può estendere il concetto di continuità anche a quei punti che sono solo di accumulazione per il dominio, e quindi dicono che in $x = 0$ la funzione non è continua.

Prove di valutazione

Oltre che sui libri (preposti all'insegnamento), gli errori possono essere presenti anche in prove di valutazione. Un caso è quello dei quiz on line preselettivi dell'ultimo concorso per docenti.

Per quanto riguarda i quesiti di logica c'era la seguente domanda:



Con riferimento alla figura in alto, individuare il diagramma che soddisfa la relazione insiemistica esistente tra i termini dati: *Persone simpatiche, Residenti a Roma, Persone di nome Mario*

- 1) Diagramma 2; 2) Diagramma 5; 3) Diagramma 4; 4) Diagramma 1.

Prima di tutto è buona norma circondare i suddetti insiemi con un rettangolo che rappresenta l'insieme universo (o ambiente), che in questo caso rappresenta l'insieme di tutte le persone. Inoltre, mentre essere residenti a Roma o chiamarsi Mario è un dato oggettivo, l'essere una persona simpatica è un dato soggettivo, e come tale non può rappresentare un insieme. Eppure è uno dei primi concetti che viene insegnato quando si affronta la teoria degli insiemi: "non si può definire un insieme in base a dati soggettivi".

Qual è la risposta giusta del suddetto quesito? Il diagramma 5 (come richiedeva il test)?

E se a qualcuno stanno antipatici i romani? Quale sarebbe stata la risposta giusta? Il diagramma 3 (che però non veniva data tra le possibili risposte esatte)?!

E se invece oltre ai romani stanno antipatici anche tutti quelli di nome Mario (per il solo fatto di chiamarsi Mario), quale sarebbe stata la risposta giusta? Il diagramma 1?!

E se invece i romani gli stanno simpatici? Quale sarebbe stata la risposta giusta? Tra i sette diagrammi non ne esiste uno rappresentativo!

Ma come mai errori così grossolani vengono commessi proprio da chi dovrebbe valutare la preparazione dei docenti, in questo caso dal ministero? Evidentemente la continua opera di demolizione della scuola pubblica comincia a far sentire i suoi effetti anche nelle sfere più alte.

Il quorum

Andiamo ora ad argomenti di maggiore diffusione: qual è la esatta definizione di quorum? Spesso se ne sente parlare, soprattutto in prossimità di consultazioni elettorali: "Raggiungere il quorum significa che deve andare a votare almeno il 50 % più 1 degli aventi diritto!". Si supponga che ad un referendum abbiano diritto al voto 40'000'001 cittadini, qual è il numero minimo affinché il referendum sia valido?

Il 50 % di 40'000'001 è 20'000'000.5, aggiungendo 1 fa 20'000'001.5. Il numero minimo è 20'000'001, oppure 20'000'002? Qualche buontempone (ce ne sono molti) se ne esce così: "Ma dai, vuoi che vadano a votare proprio 20'000'001 persone? È un caso che ha probabilità troppo piccola per verificarsi". Ora, a parte il fatto che anche un evento di probabilità 0 può verificarsi (e qui torna il discorso di prima), è il principio che è sbagliato. Inoltre il problema si presenta molto più frequentemente in altre situazioni dove la probabilità è di gran lunga maggiore. Per esempio, in una riunione di condominio di 11 persone, qual è il 50 % più 1? La metà è 5.5 persone, più 1 fa 6.5 persone. Se si presentano 6 persone la riunione è valida? Ovviamente è valida, ma è la definizione che è poco chiara. Eppure non ci vuole niente a sistemare le cose, basta dire che la riunione è valida se partecipa più della metà delle persone. Penso che sia anche più facile da capire. Ovviamente la stessa definizione va estesa anche agli altri casi, quindi si potrebbe dire in maniera più chiara: "il quorum viene raggiunto quando va a votare più della metà degli aventi diritto".

La forma della piazza S. Pietro a Roma

Purtroppo a volte le parole non riescono a rappresentare con precisione la realtà. Invece altre volte acquistano addirittura importanza maggiore dell'argomento stesso di cui sono veicolo. E in questi casi è più facile che succeda che una certa affermazione (di per sé falsa) diventi sempre più vera per il solo fatto che la maggior parte delle persone la riporta, dando luogo al quel tam tam che dicevamo all'inizio. Paradossalmente, per fare un esempio, potrebbe succedere che la capitale del Canada sia Toronto (e non Ottawa) solo perché la maggioranza delle persone la pensa così.

Un altro esempio eclatante è quella della forma della piazza S. Pietro a Roma, essa ha forma ellittica perché ormai la gente, e molti libri, la pensano così. La persona intellettualmente onesta, invece, si documenta meglio e trova che la forma è quella del raccordo di due semicerchi; in particolare, i due semicerchi sono ottenuti da due cerchi, ognuno dei quali ha il centro sulla circonferenza dell'altro.

Purtroppo, spesso le parole vanno al di là del significato intrinseco dell'argomento in questione, e vanno per così dire quasi a sostituire i concetti di fondo, assumendo maggiore importanza dell'argomento stesso. È come un bel piatto di pesce che viene apprezzato solo per il condimento.

Penso che i matematici, non solo non debbano permettere che ci siano invasioni di campo, ma debbano a loro volta intervenire in altri campi a mettere ordine, perché troppo spesso con le parole si riesce a travisare a piacimento la realtà. Non è un caso che i politici si permettano il lusso di “sparare balle” a proprio piacimento avendo sempre buon gioco della popolazione.

Bibliografia

[1] Coletti-Scozzafava, “Probabilistic Logic in a Coherent Setting”, Kluwer 2002

181. Nonlinear Dynamics and Chaos: an Introduction

Nicola De Nitti
nicoladenitti@gmail.com

I Introduction

Nonlinear dynamics is an active and fascinating discipline that is having a profound effect on a wide variety of topics. Its combination of innovative mathematics and high speed computing has produced new insights into the behaviour of complex systems and has revealed surprising results even in the simplest nonlinear models.

Recently, the ideas of so-called ‘chaos theory’ have found applications in economics, ecology, population dynamics and sociology. This paper aims to offer a brief overview of nonlinear dynamics and chaos.

II A brief history of chaos

Arguably, Aristotle was already conscious of something similar to what is currently named ‘sensitive dependence’, since in his writings on methodology and epistemology, he realised that “the minimum initial deviation from the truth is multiplied consequently a thousand fold” (Aristotle, *OTH*, 271b8). Notwithstanding, the investigating how tiny disturbances may grow explosively to generate substantial effects on a physical system’s behaviour pattern became a phenomenon of increasingly intensive research starting with a famous paper by Edward Lorenz (1963), in which he documented that a specific meteorological model could exhibit exquisitely sensitive dependence on modest alterations to initial conditions. Previously, the framework for formulating questions related to sensitive dependence had been articulated in 1922 by French mathematician Jacques Hadamard, who argued that any sort of solution showing evidence of sensitive dependence was an indicator of a mathematical model that improperly described its target system.

However, nonlinear dynamics has its origins in the famous ‘three body problem’, along with the efforts, at the turn of the century, by the brilliant French mathematician and physicist, Henri Poincare, to calculate the movement of a planet around the sun while under the perturbing influence of another nearby planet or moon. In many instances, as expected, the presence of the third body altered the original orbit. Nevertheless, there were also situations in which the planet moved in an extremely erratic way, even to the extent of behaving chaotically.

To have discovered chaos at the heart of a supposedly stable solar system came as a significant surprise. On the other hand, further exploration associated with these ideas had to await the development of new mathematical methods and the development of high-speed computer systems capable of displaying their complex solutions graphically.

Today the application of nonlinear dynamics can be found in almost every branch of science, including systems in which iterations, nonlinear interactions, and the general dependency of each part of the system upon the behaviour of all other parts demands the use of nonlinear differential equations rather than more simple and common linear differential equations.

III The Newtonian paradigm

The assumptions of classical physics are called into question by nonlinear dynamics. Consequently, it is worth examining them in detail.

i. Defining a system

Classical physics assumes that it is possible to focus upon a well-defined system, conceptually isolated from its surroundings, with a characterisation which should not be altered radically over time. For this reason, if the entire nature of the system were to change in an uncontrolled fashion, it would be impossible to be aware of whether it was the same system or something entirely different. Furthermore, based on this theory, it must be possible to separate the internal behaviour of the system from external fluctuations. However, when we enter the nonlinear domain, a great deal of these assumptions are no longer valid.

ii. System description

In physics, the essential features of a natural system can be identified and quantified. It is consequently possible to associate them with mathematical variables (indeed, a system in physics is normally associated with a point in phase space). Moreover, it is assumed that, in principle, it is possible to obtain a complete, experimental description of the system in terms of the numerical values of all its variables, any errors or uncertainties having a negligible implication.

iii. System dynamics

Newton's laws show how it is possible, given an initial point in phase space, to plot out the trajectory of a system for all future time intervals (i.e. given the full specification of a system, it is undoubtedly possible to determine its future behaviour patterns). Any exterior force or perturbation will produce a predictable change while tiny external fluctuations have a negligible effect.

Following from this, it is assumed that the behaviour of the system is orderly, and does not fluctuate erratically or totally change its qualitative nature: when the system begins to deviate from its preassigned or nominal behaviour, it should be possible to exercise control and dampen any unwanted oscillations.

iv. Deviations from the Newtonian paradigm

Where deviations from this well-defined scheme occur, where any sudden qualitative changes in behaviour occur, and where chaotic or wild oscillations are found in a hitherto well behaved system, it is assumed that one can track them down to an external factor, and action can be taken to modify or steer the system back in the right direction. And, while major external alterations may disturb a system, it is assumed that minor fluctuations will produce only very minor changes.

IV Nonlinearities and definition of nonlinear systems

Wherever nonlinearities occur in a system, a situation arises in which one or more of the above assumptions become invalid. While this happens, the whole framework upon which classical physics is based must be called into question, and some new approaches have to be developed.

There are several manifestations of nonlinearity that can frustrate an attempt at analysis of a physical system.

i. Sensitivity to initial conditions and to externalities ('Butterfly effect')

It may not always be possible to pin down a system exactly. There may be, for example, certain unidentified or uncertain factors. The boundary of a system may not be well defined, or the very act of observation and measurement may introduce uncertainties.

For instance, B. Mandelbrot has pointed out that the distribution and number of weather stations has a "lower fractal dimension" than that of any real weather system (i.e. in principle, it is impossible to gather sufficient information to characterise the world's weather). A tiny degree of uncertainty in a linear system does not really influence an attempt at analysis, but for some nonlinear systems these uncertainties increase exponentially. Such systems are infinitely sensitive to their initial conditions: so much so, that the smallest initial fluctuation can quickly swamp the entire system.

Other systems may be infinitely sensitive to externalities – the ‘butterfly effect’ – so that a tiny fluctuation or perturbation arising in some nearby system will overflow the system. Another aspect of the ‘butterfly effect’ is that a small periodic effect operating over a long enough period of time might end up dominating the system, whereas large external ‘shocks’ are dumped out. Consequently, not only will the future of such systems be ambiguous but endeavours at control, or corrective measures, will give unpredictable results.

ii. Sudden changes

Nonlinear systems are characterised by having ‘bifurcation-points’: regions where the system may suddenly change its qualitative behaviour (in fact, a system that has been behaving in an orderly fashion for a long period of time may suddenly start fluctuating erratically).

Over its life, a nonlinear system can enter a series of quite different behaviours. Furthermore – it must be stressed – these changes need not always be the result of external perturbations, but can be the natural output of the internal dynamics of the system.

iii. Exogenous or endogenous change?

When a system undergoes a sudden dramatic change it is apparently due to some external cause. However, sometimes this major fluctuation or qualitative change has no relation to external circumstances, but is endogenous (i.e. the result of purely internal dynamics). It is of obvious importance to be able to distinguish endogenous from exogenous factors.

iv. Chaotic behaviour

At times, systems enter regions of highly erratic and chaotic behaviour. In such cases it becomes impossible to predict the future behaviour patterns of the system even when based on its entire history. Although there is no universally accepted mathematical definition of chaos, a commonly adopted explanation states that, for a dynamical system to be classified as chaotic, it must satisfy the following properties:

1. it must be sensitive to initial conditions;
2. it must be topologically mixing;
3. its periodic orbits must be dense.

1. ‘Sensitivity to initial conditions’ means that each point in such a system is arbitrarily closely approximated by other points with significantly different future trajectories. Hence, an arbitrarily insignificant perturbation of the present trajectory may lead to significantly different future behaviour. However, it has been shown that the last two properties in the list above actually imply sensitivity to initial conditions and, if analysis is limited to intervals, the second property suggests the other two.

Sensitivity to initial conditions is popularly known as the ‘butterfly effect’, so named mainly due to the title of a paper submitted by Edward Lorenz in 1972 to the American Association for the Advancement of Science in Washington D.C., entitled *Predictability: Does the Flap of a Butterfly’s Wings in Brazil set off a Tornado in Texas?* The flapping wing represents a tiny alteration in the initial condition of the system, which may cause a chain of events leading to large-scale phenomena: had the butterfly not flapped its wings, the trajectory of the system could have been immeasurably different.

2. ‘Topological mixing’ means that the system will evolve over time so that any given region or open set of its phase space will eventually overlap with any other given region.

3. ‘Density of periodic orbits’ means that every point in the space is approached at an arbitrary distance by periodic orbits.

v. Deterministic chaos

A chaotic system appears perfectly unpredictable in its behaviour. Yet somehow, what is actually known as ‘deterministic chaos’ appears to exhibit certain regularities. For instance, erratic swings, even though entirely unpredictable, might nevertheless be limited to a specific restricted area, called a ‘chaotic or strange attractor’. Therefore, even while the moment-to-moment behaviour of the system is unpredictable, identifying the geometry of the strange attractors offers details about the general range of its behaviour. It is also a matter of debate as to whether a chaotic system should be spoken of as definitely devoid of any order, or as exhibiting a highly complex and not immediately recognisable order. Moreover, such systems may also exhibit ‘intermittency’, periods of simple order which arise repeatedly out of chaos.

vi. Self-similarity

Chaotic systems have much in common with fractals: indeed their ‘strange attractors’ have a fractal structure. Likewise, there may be fractal patterns in their dynamics that repeat at different time intervals.

Fractals go beyond the pure mathematics of the concept as the practical uses are just starting to be found. By being able to recognise natural structures with mathematical formulas, it is possible to predict and hypothesise about the future of our environment, species, or many other natural phenomena. John Briggs, in his book entitled *Fractals: The Patterns of Chaos*, mentions many elements in our universe that behave as fractals, reaching the conclusion that having knowledge of the patterns of fractals would make it possible to make better overall micro predictions.

V Examples

The manifestation of nonlinear effects can be discovered in a wide variety of branches of science (e.g. sociology, population dynamics, economics and ecology). However, in every single case, mathematical models may be built. Even if they have the potential for a wide range of behaviour, including stability; gradual growth; persistent oscillations; self-organization; or infinite sensitivity to externalities, obviously, mathematical models are far removed from the real world.

i. Ecology

To analyse a simple case in which nonlinearities occur, it may be interesting to take as an example the effect of increasing carbon dioxide on plant growth: a highly complex issue. In fact, not only will growth rates change but the whole balance of a region will be altered, some species being favoured over others. In turn, the effects of these changing vegetation patterns will feed back into the atmosphere, both directly – in terms of the amount of carbon dioxide that is established by plant-life – but also indirectly, for as the mixes of different vegetation change, so too will the economics as well as the lifestyles of populated regions. As the economy and social structure of a region change, so do its energy demands, which results in different amounts of carbon dioxide being released into the atmosphere.

In addition, attempts to control variations in one part of a cycle may have the effect of magnifying another and even the attempt to isolate a single variable in this whole complex system becomes incredibly complex since a single variable will exhibit the whole range of behaviours from extreme sensitivity to extreme stability, as well as limit cycles, bifurcation points, large oscillations, and possibly even chaotic behaviour. Moreover, this system, by itself, belongs to a much broader system that is inserted into global – and also local – politics. Each of these elements is, in turn, determined by additional factors, including religious as well as ethical values, which are of crucial importance in population growth and attitudes to the environment.

This single example shows how complex a system may be and that a given problem can be sensitive to a wide range of externalities, each of which is related to a range of other factors. Clearly, a completely new science of chaos is required.

ii. Economics

Economics is currently under the scrutiny of experts in the field of nonlinear dynamics and a variety of analyses of short and long term stock market trends have been made. Nevertheless, there are serious

questions to be answered about the very definition of economic systems and about the meaning of their variables. Chaos theory and nonlinear dynamics have been adding weight to those voices that are questioning the basis of economic theory.

The concept of money, for instance, is highly complex and analysts are questioning the notion of economic equilibrium and an intrinsically stable market: “An economic world in which money is introduced in a nontrivial way can be highly complex in its behaviour in theory, just as in reality”, argues Richard Day (University of Southern California). Day himself has already shown that even simple models might give rise to chaotic fluctuations.

VI Order in chaos

The notion that it is the inherent nonlinear dynamics of the market that produce fluctuations, rather than a combination of externalities, may suggest that it might be possible to carry out “micro forecasting”, whereas a more careful analysis will point out that it is impossible to separate endogenous from exogenous causes. Some scholars claim to notice the features of deterministic chaos (i.e. strange attractors) within economic data. Supposing that this is true, it suggests that while economic fluctuations are unpredictable, they will always lie within certain bounds.

Besides, there are certainly suggestions that a degree of self-similarity holds, which is related to fractal structures, and which would indicate that a certain range of behaviour patterns repeats at various time intervals and if this is correct, micro predictions will take into consideration that a random fluctuation will fall within a precise range.

Other analysts are searching for ‘co-operative effects’ (for instance, the choices made in a collective way may give rise to predictable results, or the market itself may manifest a degree of self-organization).

VII Conclusions

The results presented in this paper demonstrate the limitations in describing any nonlinear system, or placing faith in its variables and parameters. Physics normally aims to describe a system and make predictions about general trends, but, as the physicist Richard Feynman puts it, “nature cannot be fooled”, and it is absurd to suppose that mathematical models can cover the wide range of behaviour possible within natural, social and economic systems.

Indeterminacy and related concepts are pervading our existence: in spite of strenuous efforts to reach truth, certainty and precision, both in theoretical and pragmatical matters, mental activity is openly or surreptitiously challenged by indeterminacy, which seems to threaten the inherent order of the natural world.

Attempting to control and correct a natural system will only work within a limited context. Thus, a new science of chaos is required.

Bibliography

- ABARBANEL, H. D. I., RABINOVICH, M. I. and SUSHCHIK, M. M., *Introduction to Nonlinear Dynamics for Physicists*, 1993, Singapore, World Scientific.
- BAKER, G. L. and GOLLUB, J. B., *Chaotic Dynamics: An Introduction*, 2nd ed., 1996, Cambridge University Press.
- BISHOP, ROBERT, *Chaos*, <http://plato.stanford.edu/entries/chaos/>
- CVITANOVIC, P., *Universality in Chaos: A Reprint Selection*, 2nd ed., 1989, Bristol, Adam Hilger.
- DRAZIN, P. G., *Nonlinear Systems*, 1992, Cambridge University Press.
- FIELD, M. and GOLUBITSKY, M., *Symmetry in Chaos: A Search for Pattern in Mathematics, Art and Nature.*, 1992, Oxford University Press.
- GLEICK, J., *Chaos: Making a New Science*, 1988, New York, Penguin.
- HILBORN, R. C., *Chaos and Nonlinear Dynamic*, 1994, New York, Oxford University Press.
- KAPITANIAK, T. and BISHOP, S. R., *The Illustrated Dictionary of Nonlinear Dynamics and Chaos*, 1998, New York, Wiley.
- LORENZ, E. N., *The Essence of Chaos*, 1996, Seattle, University of Washington Press.

- MANDELBROT, BENOIT B., *Fractals: Form, Chance, and Dimension*, 1997, San Francisco, W.H. Freeman and Co.
- MANDELBROT, BENOIT B., *The Fractal Geometry of Nature*, 1998, New York, W.H. Freeman and Co.
- OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*, 1993, New York, Cambridge University Press.
- OTT, E., SAUER, T. and YORKE, J. A. *Coping with Chaos: Analysis of Chaotic Data and the Exploitation of Chaotic Systems*, 1994, New York, Wiley.
- PEAT, F. D. *Nonlinear Dynamics (Chaos Theory) and its Implications for Policy Planning*, <http://www.f davidpeat.com/bibliography/essays/chaos.htm>
- PEITGEN, H.-O., JÜRGENS, H. AND SAUPE, D. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*, 1992, New York, Springer-Verlag.
- RASBAND, S. N., *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*, 1990, New York, Wiley.
- SMITH, P., *Explaining Chaos*, 1998, Cambridge, England: Cambridge University Press.
- STEWART, I., *Does God Play Dice? The Mathematics of Chaos*, 1990, Blackwell Publishers.
- STROGATZ, S. H., *Nonlinear Dynamics and Chaos, with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 1994, Reading, Addison-Wesley.
- TABOR, M., *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An Introduction*, 1989, New York, Wiley.
- TUFILLARO, N. ABBOTT, T. R. and REILLY, J., *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos*, 1992, Redwood City, Addison-Wesley.
- WIGGINS, S., *Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods*, 1988, New York, Springer-Verlag.
- WIGGINS, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, 1990, New York, Springer-Verlag.

182. La fine delle potenze

Stefano Borgogni

e-mail: stfbrg@rocketmail.com

Introduzione

Rispondere in pochi secondi senza fare calcoli: quale tra i numeri 5.212; 1.897; 2.401; 6.168 è l'unico quadrato perfetto?

Troppo facile? Proviamo, allora, con quest'altra domanda: ci sono dei quadrati perfetti tra i numeri 6.415; 8.240; 7.519; 2.409; 7.434? Se sì, quali?

Certo, si vive benissimo anche senza saper rispondere alle domande precedenti, ma probabilmente gli appassionati di matematica possono avere interesse ad approfondire quesiti di questo tipo.

È quanto si propone di fare il presente articolo, che tratterà le potenze dei numeri interi, esaminandone in particolare un aspetto: le regole riguardanti la loro "fine", ossia le loro cifre terminali.

E non solo per quanto riguarda i quadrati, come negli esempi sopra riportati, ma anche per tutte le potenze di grado superiore.

1. Aritmetica modulare

Prendere in considerazione solo le cifre finali di un numero equivale a operare nell'aritmetica modulare con moduli che sono le successive potenze di 10. Ad esempio, l'ultima cifra di un numero n corrisponde a $n \bmod 10$, le ultime due cifre a $n \bmod 100$ e così via.

Dunque, nel prosieguo del lavoro - anche per evitare ripetizioni - si utilizzeranno indifferentemente locuzioni come "cifre finali", "cifre terminali" e "terminazioni", oppure le più sintetiche notazioni proprie dell'aritmetica modulare.

Va aggiunto che si approfondirà in particolare l'analisi relativa alle ultime due cifre delle potenze ($n^k \bmod 100$), mentre si farà solo qualche breve accenno al caso dell'ultima cifra ($n^k \bmod 10$), chiaramente assai meno significativo e interessante da studiare.

2. La fine delle potenze: periodicità

Entriamo ora nel vivo dello studio, prendendo in considerazione due elementi che - pur essendo tra loro collegati - conviene per maggiore chiarezza trattare in due capitoli separati.

Il primo riguarda la periodicità con cui si ripetono i numeri che costituiscono le cifre finali delle potenze - cioè i valori di $n^k \bmod 100$ - a seconda dell'ordine k .

Quadrati

Cominciamo con il caso più semplice, quello dei quadrati.

Se consideriamo solo l'ultima cifra ($n^2 \bmod 10$), vediamo che la successione relativa è 1-4-9-6-5-6-9-4-1-0. Tutto ciò dà una prima indicazione: nessun quadrato perfetto può terminare per 2, 3, 7 o 8.

A questa limitazione ne vanno aggiunte altre, facilmente ricavabili passando ad esaminare le ultime due cifre del numero, cioè $n^2 \bmod 100$:

ogni quadrato pari deve essere "doppiamente pari", cioè divisibile per 4, per cui anche le sue ultime 2 cifre devono essere divisibili per 4;

ogni quadrato divisibile per 5 deve esserlo anche per 25, per cui si possono scartare tutti i numeri che terminano per 5 preceduto da cifra diversa da 2 (05, 15, 35 ...95);

ogni quadrato divisibile per 10 deve esserlo anche per 100, per cui si devono eliminare tutti i numeri che terminano con un solo 0 (10, 20, 30...90).¹

La seguente tabella, che riporta i valori di $n^2 \bmod 100$ per i quadrati da 1 a 100, conferma quanto appena detto.

n	$n^2 \bmod 100$	n	$n^2 \bmod 100$						
1	01	21	41	41	81	61	21	81	61
2	04	22	84	42	64	62	44	82	24
3	09	23	29	43	49	63	69	83	89
4	16	24	76	44	36	64	96	84	56
5	25	25	25	45	25	65	25	85	25
6	36	26	76	46	16	66	56	86	96
7	49	27	29	47	09	67	89	87	69
8	64	28	84	48	04	68	24	88	44
9	81	29	41	49	01	69	61	89	21
10	00	30	00	50	00	70	00	90	00
11	21	31	61	51	01	71	41	91	81
12	44	32	24	52	04	72	84	92	64
13	69	33	89	53	09	73	29	93	49
14	96	34	56	54	16	74	76	94	36
15	25	35	25	55	25	75	25	95	25
16	56	36	96	56	36	76	76	96	16
17	89	37	69	57	49	77	29	97	09
18	24	38	44	58	64	78	84	98	04
19	61	39	21	59	81	79	41	99	01
20	00	40	00	60	00	80	00	100	00

Con l'ausilio della tabella, vediamo ancora alcune proprietà di $n^2 \bmod 100$.

La successione delle cifre finali dei quadrati si ripete sempre uguale ogni 50 numeri. Inoltre, ogni 25 numeri, si “torna indietro” ripercorrendo a ritroso la strada percorsa, per cui $26^2 \bmod 100 = 24^2 \bmod 100$; $27^2 \bmod 100 = 23^2 \bmod 100 \dots 49^2 \bmod 100 = 1^2 \bmod 100$.

In generale, si può dire che $n^2 \bmod 100 = (50-n)^2 \bmod 100$, con n variabile tra 1 e 49.²

Altre potenze di ordine pari

Le altre potenze con esponente pari $k=2m$ (con m intero) seguono regole simili a quanto visto per i quadrati: in generale, resta valido per qualsiasi ordine il fatto che i numeri si ripetono con un “periodo” di 50, suddiviso in due cicli di 25. Ad esempio, $3^6 = 729$; da ciò possiamo dedurre che il numero 97^6 terminerà anch'esso per 29.

Abbiamo detto “in generale” e non “sempre” poiché - in realtà - vi è un'eccezione, quella relativa a ogni ordine $k=10m$. Tale caso sarà trattato più avanti, in un paragrafo specifico.

Cubi

Analogamente a quanto visto in precedenza per i quadrati, riportiamo la tabella relativa a $n^3 \bmod 100$ per i numeri da 1 a 100.

¹ Per maggiore completezza, aggiungiamo un'altra regola, che peraltro non riguarda le cifre finali: ogni quadrato divisibile per 3 deve esserlo anche per 9, per cui vanno scartati tutti i numeri che hanno come somma delle cifre 3 o 6.

² Per evitare inutili complicazioni, sia qui che nel prosieguo del testo saranno ignorati i casi-limite (in questo caso $n=0$ e $n=50$).

n	n ³ mod 100	n	n ³ mod 100						
1	01	21	61	41	21	61	81	81	41
2	08	22	48	42	88	62	28	82	68
3	27	23	67	43	07	63	47	83	87
4	64	24	24	44	84	64	44	84	04
5	25	25	25	45	25	65	25	85	25
6	16	26	76	46	36	66	96	86	56
7	43	27	83	47	23	67	63	87	03
8	12	28	52	48	92	68	32	88	72
9	29	29	89	49	49	69	09	89	69
10	00	30	00	50	00	70	00	90	00
11	31	31	91	51	51	71	11	91	71
12	28	32	68	52	08	72	48	92	88
13	97	33	37	53	77	73	17	93	57
14	44	34	04	54	64	74	24	94	84
15	75	35	75	55	75	75	75	95	75
16	96	36	56	56	16	76	76	96	36
17	13	37	53	57	93	77	33	97	73
18	32	38	72	58	12	78	52	98	92
19	59	39	19	59	79	79	39	99	99
20	00	40	00	60	00	80	00	100	00

Come si vede, la successione delle 100 terminazioni non ha un periodo come quello dei quadrati; vi è, però, un'altra forma di regolarità che merita di essere segnalata.

Se prendiamo le coppie di numeri 1-99; 2-98 ... 49-51, vediamo che i loro cubi hanno per cifre finali numeri anch'essi complementari a 100; ad esempio $3^3 = 27$ e $97^3 = 912.673$, ossia $97^3 \text{ mod } 100 = 73$.

Utilizzando l'aritmetica modulare, la formula generale si può scrivere come $n^3 \text{ mod } 100 = 100 - [(100-n)^3 \text{ mod } 100]$, con n che varia da 1 a 99.

Questa stessa regola - con le eccezioni che vedremo nel prossimo paragrafo - vale per tutte le altre potenze di ordine dispari: ad esempio, 13^7 vale 62.748.517 (cioè $13^7 \text{ mod } 100 = 17$), per cui la terminazione di 87^7 sarà 83.

Quinte potenze

Come si accennava, tra le potenze di ordine dispari ve ne sono alcune che presentano caratteristiche particolari; si tratta di quelle il cui esponente è multiplo di 5. Vediamo la tabella relativa al caso "standard" delle quinte potenze.

n	n ⁵ mod 100	n	n ⁵ mod 100	n	n ⁵ mod 100	n	n ⁵ mod 100	n	n ⁵ mod 100
1	01	5	25	9	49	13	93	17	57
2	32	6	76	10	00	14	24	18	68
3	43	7	07	11	51	15	75	19	99
4	24	8	68	12	32	16	76	20	00

È inutile proseguire oltre nella tabella, poiché è facile verificare che la successione delle cifre finali si ripete esattamente uguale ogni 20 numeri; in altre parole, $21^5 \text{ mod } 100 = 1^5 \text{ mod } 100 = 01$; $22^5 \text{ mod } 100 = 2^5 \text{ mod } 100 = 32$ etc.

Inoltre, vale una formula analoga a quella vista per i cubi, sostituendo la periodicità 100 con la periodicità 20: sono complementari a 100, ad esempio, $2^5 \bmod 100$ e $18^5 \bmod 100$ (che valgono rispettivamente 32 e 68).

La formula sintetica per esprimere questa proprietà, decisamente più complicata rispetto a quelle viste in precedenza, è la seguente: $(n+20q)^5 \bmod 100 = 100 - \{[(20(q+1)-n)]^5 \bmod 100\}$, con n variabile tra 1 a 19 e q variabile tra 0 e 4.

Per assicurarci che tale scrittura sia corretta, proviamo un caso concreto, utilizzando il numero 23. In questo caso $n=3$ e $q=1$. Applicando la formula si ottiene $23^5 \bmod 100 = 100 - [(40-3)^5 \bmod 100]$ e con gli opportuni calcoli si può verificare che l'identità è valida, cioè $23^5 \bmod 100$ e $37^5 \bmod 100$ sono effettivamente complementari a 100.³

Come nei casi precedenti, anche stavolta è possibile fare una generalizzazione: queste caratteristiche valgono, infatti, per tutte le potenze con esponente k dispari del tipo $k=5m$.

La decima potenza

Ma l'analisi non finisce qui; occorre, infatti, considerare separatamente anche la decima potenza: esaminiamola con il supporto di una tabella analoga a quelle viste in precedenza.

n	$n^{10} \bmod 100$	n	$n^{10} \bmod 100$	n	$n^{10} \bmod 100$	n	$n^{10} \bmod 100$	n	$n^{10} \bmod 100$
1	01	5	25	9	01	13	49	17	49
2	24	6	76	10	00	14	76	18	24
3	49	7	49	11	01	15	25	19	01
4	76	8	24	12	24	16	76	20	00

Il fatto che 10 sia contemporaneamente pari e divisibile per 5 suggerisce l'idea che la decima potenza riassume in sé le caratteristiche delle due tipologie corrispondenti precedentemente analizzate. In effetti, è proprio così; in particolare, esiste una periodicità 10 e si “torna indietro” ogni 5 numeri, secondo la successione 01-24-49-76-25-76-49-24-01-00.

Ciò conferma che l'esponente pari di una potenza dimezza la periodicità: in generale, si passa da 100 a 50 (come nei casi, già esaminati, di quadrati e cubi), mentre per gli ordini $k=5m$ si passa da 20 a 10.

Inoltre, va aggiunto che le stesse regole della decima potenza valgono anche per tutte quelle di ordine $k=10m$.

Ma esiste una potenza, di qualsiasi ordine, con una periodicità minore di 10?

Esaminando la successione, ci si rende conto immediatamente che ciò è impossibile; infatti, ogni 10 numeri si deve necessariamente avere per $n^k \bmod 100$ un valore “00” (le potenze di 10, 20, 30 ...) e, altrettanto evidentemente, tale terminazione non può valere per nessun altro numero.

3. La fine delle potenze: terminazioni possibili e non

Detto della periodicità, consideriamo adesso un secondo aspetto: i valori che possono assumere le ultime due cifre delle potenze, ossia i valori ammissibili per $n^k \bmod 100$.

Per maggiore chiarezza, si possono costruire delle tabelle 10×10 e colorare le celle che costituiscono valori accettabili di $n^k \bmod 100$ a seconda delle diverse potenze. Infine, raggruppando insieme gli ordini per i quali tali valori coincidono, si ottiene la seguente figura riepilogativa di tutte le potenze da 2 a 20.⁴

³ Infatti 23^5 vale 6.436.343, mentre $37^5 = 69.343.957$.

⁴ Non è necessario andare oltre la ventesima potenza, poiché anche tutte quelle di ordine superiore devono appartenere a una delle sei tipologie descritte nella figura 1.

FIG. 1 - Potenze fino alla 20° - Valori possibili per $n^k \pmod{100}$

Esponente 2,6,14,16,18 - 22 valori

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	00

Esponente 3,7,9,11,13,17,19 - 63 valori

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	00

Esponente 4,8,12,16 - 12 valori

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	00

Esponente 5,15 - 15 valori

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	00

Esponente 10 - 6 valori

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	00

Esponente 20 - 4 valori

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	00

Basta uno sguardo alla figura per notare che il numero di terminazioni ammissibili può variare considerevolmente: si passa dai soli 4 valori accettabili per la ventesima potenza (e per tutte quelle di ordine $k=20m$) ai 63 valori accettabili per le potenze con esponente dispari e non divisibile per 5.

In generale, le potenze dispari sono - rispetto a quelle pari - assai più “di bocca buona”, ossia ammettono molti più numeri come possibili terminazioni.

Ma possiamo essere certi che 4 sia un minimo assoluto? La risposta è “Sì” e per dimostrarlo non c’è nemmeno bisogno di scomodare il modulo 100, basta più semplicemente considerare l’ultima cifra.

Infatti, qualsiasi numero terminante per 0, 1, 5 o 6 - elevato a potenze di qualsiasi ordine - ha sempre la stessa cifra finale del numero originario (ossia, vale la formula $n \bmod 10 = n^k \bmod 10$). Dunque i valori diversi per $n^k \bmod 100$ devono essere almeno 4.

Quali terminazioni?

Una volta detto quante sono le possibili terminazioni per le diverse tipologie di potenze, vale la pena di spendere qualche parola anche su quali sono.

Con l’ausilio della figura 1 appena vista, si possono ricavare alcune regole. Ad esempio, per essere un quadrato perfetto un numero deve avere le seguenti caratteristiche:

- $n \bmod 10 = 0, 1, 4, 5, 6$ o 9
- se $n \bmod 10 = 1$, penultima cifra pari
- se $n \bmod 10 = 6$, penultima cifra dispari
- se $n \bmod 10 = 5$, allora $n \bmod 100 = 25$
- se $n \bmod 10 = 0$, allora $n \bmod 100 = 00$

Allo stesso modo, si stabiliscono le condizioni necessarie affinché un numero possa rappresentare un cubo, una quarta potenza e così via.

Approfondiamo ancora il discorso con una figura che mette insieme le diverse tipologie di potenze.

FIG. 2 - Potenze fino alla 20° - Ricorrenza dei valori di $n^k \bmod 100^5$

00	01	SÌ in tutti i casi	03	52	SÌ in 7 casi (potenze dispari tranne 5-15)	02	98	NO in tutti i casi
25	76		08	53		05	95	
21	16	11	59	06		94		
41	36	12	63	10		90		
61	56	13	67	14		86		
81	96	17	71	15		85		
24		19	72	18		82		
49		23	73	20		80		
04	09	27	77	22		78		
44	29	28	79	26		74		
64	69	31	83	30		70		
84	89	33	87	34		66		
51	07	37	88	35		65		
32	57	39	91	38		62		
43	68	47	92	40		60		
93	99	48	97	42	58			
75				45	55			
				46	54			
				50				

⁵ I numeri sono elencati in ordine diverso da quello crescente per far risaltare meglio le loro caratteristiche. Ad esempio, quelli della tabella in rosso sono in coppie la cui somma è sempre 100.

Come leggere questo schema? Convieni fare qualche esempio, che risulterà più chiaro di qualsiasi spiegazione di tipo descrittivo.

Sui 19 casi possibili (le potenze da 2 a 20) il numero 21 può comparire come terminazione in 15 di essi (quadrati, cubi, quarte potenze, seste potenze ...), ma non nelle potenze di ordine 5, 10, 15 e 20.

Invece, il numero 43 può costituire il valore di $n^k \text{ mod } 100$ per qualunque ordine k dispari (9 casi), mentre 88 “va bene” solo in 7 casi, quelli relativi alle potenze con esponente 3, 7, 9, 11, 13, 17 e 19.

“Fantastici 4” e “Pecore nere”

Ora esaminiamo più in dettaglio le caratteristiche dei 4 numeri sempre presenti come terminazioni delle potenze di qualsiasi ordine (evidenziati in verde) e dei 37 numeri che non possono mai costituire valori di $n^k \text{ mod } 100$ qualunque sia k (in rosso). Definiremo tali numeri rispettivamente “Fantastici 4” e “Pecore nere”.

L’aspetto più interessante è che entrambe le tipologie sono composte da numeri che vanno a braccetto due a due; in particolare:

tutte le “pecore nere” sono raggruppabili in coppie complementari a 100; il loro numero totale è dispari (37), poiché 50 fa coppia con se stesso.

i “magnifici 4”, invece, formano due coppie la cui somma è “01” modulo 100.

Concludiamo il tema proponendo un’altra figura, che consente di evidenziare alcune simmetrie nella disposizione di questi numeri.

FIG. 3 - Valori sempre presenti o sempre assenti di $n^k \text{ mod } 100$

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	00

Come si vede, le 37 “Pecore nere” sono tutte pari tranne 8, e queste ultime finiscono sempre per 5 (05, 15, 35, 45, 55, 65, 85 e 95).

Inoltre, la figura 3 ci permette di dire immediatamente che - per esempio - i numeri 7.866, 31.314 o 64.255 non sono sicuramente potenze perfette di alcun numero intero, mentre 8.376 e 12.401 potrebbero, in

teoria, essere quadrati, cubi, quarte, quinte ... n-esime potenze. In teoria poiché, ovviamente, il fatto di terminare con 01 o 76 è una condizione necessaria, ma tutt'altro che sufficiente affinché un numero sia una potenza perfetta!

4. Riepilogo finale

Nei precedenti capitoli si sono esaminate le terminazioni delle potenze da due punti di vista: la periodicità con cui esse si ripresentano e i valori accettabili o meno per i diversi ordini.

Per concludere, riteniamo utile proporre uno specchietto riepilogativo, valido per potenze di ordine k qualsiasi, che riassume in maniera sintetica entrambe le caratteristiche suddette.

Si è scelto un ordinamento che mette in luce come le due caratteristiche esaminate in questo testo siano in relazione tra di loro: minore è la periodicità e minore è anche il numero di valori accettabili per $n^k \pmod{100}$.

Esponente k	Caso standard	Periodo	Numero di valori possibili per $n^k \pmod{100}$
k dispari; $k \neq 5m$	$k=3$	100	63
k pari; $k=4m-2$ e $\neq 10q$	$k=2$	50	22
k dispari; $k=5m$	$k=5$	20	15
k pari; $k=4m$ e $\neq 10q$	$k=4$	20	12
k pari; $k=20m-10$	$k=10$	10	6
k pari; $k=20m$	$k=20$	10	4

Con m, q interi positivi

Risposte

Per finire, diamo una risposta ai quesiti posti nell'introduzione.

Prima serie (5.212; 1.897; 2.401; 6.168).

Nessun quadrato può terminare per 2, 3, 7 e 8, per cui resta soltanto un "candidato" possibile. Visto che si è detto che uno tra i numeri proposti era un quadrato, deve essere necessariamente 2.401 (che equivale a 49^2).

Seconda serie (6.415; 8.240; 7.519; 2.409; 7.434).

In questo caso i ragionamenti da fare sono leggermente più elaborati.

I primi due numeri della serie sono esclusi, poiché i quadrati dei numeri terminanti con 5 o 0 devono avere come cifre finali rispettivamente 25 e 00.

Il terzo numero non è accettabile perché se termina per 9 deve avere come penultima cifra un numero pari: 09, 29, 49, 69 e 89 sono le terminazioni possibili.

Il quarto numero rispetta la regola appena vista, ma non va bene perché è divisibile per 3 e non per 9 (la somma delle cifre è 6).

Infine, per l'ultimo numero si applica un criterio simile al precedente: ogni quadrato pari deve essere divisibile per 4, e 7.434 chiaramente non lo è.

Dunque, la risposta alla domanda posta è "No".⁶

⁶ Aggiungiamo che - 2.409 a parte - si potevano escludere subito gli altri valori proposti consultando le figure 2 e 3.

183. Storia dei metodi per il calcolo della radice

di Michele T. Mazzucato

A conoscere li numeri quadrati per pratica.

Molte volte accade nell'operare di havere a trovare il lato di un numero (la radice quadrata), che non havendo lato, l'operante non se ne ha a servire; e assai volte accade ne i numeri grandi, poi che si è affaticato assai invano, si trova tal numero non haver lato, per non essere quadrato, e bassi gettato il tempo e l'opera; però, per fuggire questo inconveniente, ho pensato di dar certe regole che assai facilitaranno la strada a conoscere quali siano li numeri quadrati.

Raffaele Bombelli (1526-1572), *L'Algebra...* (1572)

Viene definita radice ennesima di un numero **a** quel numero **x**, se esiste, la cui potenza ennesima è **a**.

$$x = \sqrt[n]{a}$$

Con $n \neq 0$ e $a \geq 0$ se n pari.

L'operazione con la quale viene determinato **x** si chiama *estrazione di radice*. Tale operazione è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza.

Nell'espressione matematica $\sqrt[n]{a}$ il numero **n** è detto *indice del radicale*, **a** è detto *radicando* e il simbolo $\sqrt{}$ è il segno dell'operazione estrazione di radice.

Le proprietà della radice sono:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Le suddette proprietà permettono di estendere le proprietà formali delle potenze alle potenze con esponenti razionali.



Simbolo della radice quadrata utilizzato da Leonardo da Pisa (meglio noto come Leonardo Fibonacci) (1180-1250) nell'opera *Practica geometrica* (1220). Il simbolo deriva dalla parola latina *radix* da cui il termine radice.

Il calcolo della radice di un numero reale si esegue di solito ricorrendo alle tavole dei logaritmi, poiché

$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$ con logaritmi di Henry Briggs (1561-1630) in base 10

$\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a$ con logaritmi di John Napier (1550-1617) in base e (=2.718281...)

Per l'estrazione di radice quadrata (con $n = 2$) si può ricorrere a vari metodi.

Uno dei metodi più antichi è quello babilonese chiamato anche metodo di Erone di Alessandria (I sec. a.C.) che ne diede una prima esplicita descrizione. Un valore iniziale x viene iterato con la media del valore stesso x e la divisione fra il radicando e il valore medesimo a/x , ossia:

$$x_0 \approx \sqrt{a}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

che converge quadraticamente fornendo il numero corretto delle cifre che, in genere, raddoppia ad ogni iterazione.

Il metodo di Isaac Newton (1642-1727) ricomprende come caso particolare quello babilonese. Newton descrisse il suo metodo nelle opere *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (1669) e *De methodis fluxionum et serierum infinitarum* (1671).



Isaac Newton (1642-1727). Il suo metodo, denominato anche metodo delle tangenti, perviene alla medesima formula del metodo generalizzato di Erone per l'estrazione di una radice ennesima. Erone partendo da basi geometriche e aritmetiche, Newton da quelle differenziali.

Un altro metodo, approssimato, per il calcolo della radice quadrata si trova nel Bakhshali, un antico manoscritto matematico indiano scoperto nel 1881 in una zona omonima dell'attuale Pakistan dal quale prende il nome. Scritto su corteccia di betulla viene datato fra il II sec. a.C. - III sec. d.C ed è, attualmente, conservato presso la Bodleian Library dell'università inglese di Oxford. In esso si trova la formula per calcolare le radici quadrate di numeri che non sono quadrati perfetti:

$$\sqrt{Q} = \sqrt{A^2 + b} \approx A + \frac{b}{2A} - \frac{\left(\frac{b}{2A}\right)^2}{2\left(A + \frac{b}{2A}\right)}$$

esempio

$$\sqrt{51} = \sqrt{7^2 + 2} \approx 7 + \frac{2}{14} - \frac{\left(\frac{2}{14}\right)^2}{2\left(7 + \frac{2}{14}\right)} = 7.141428571\dots$$

con 6 cifre decimali esatte. Una moderna calcolatrice scientifica tascabile fornisce 7.141428429...



Spezzone del manoscritto di Bakhshali conservato alla Bodleian Library.

Il matematico scozzese John Napier (1550-1617) nell'opera *Rhabdologiae seu Numerationis per virgulas libri duo* (1617) formulò artifici per eseguire, mediante piastre e asticcioline (oggi meglio noti come i *bastoncini di Nepero*), oltre la moltiplicazione e la divisione anche l'estrazione di radici quadrate e cubiche.

L'estrazione di radice quadrata di un numero quadrato perfetto si può effettuare con il metodo della scomposizione in fattori primi dalla cui divisione fra l'indice del radicale e gli esponenti dei radicandi otteniamo il risultato cercato. Per esempio:

$$\begin{array}{r} \sqrt{5664} = \\ 56644 \mid 2 \\ 28322 \mid 2 \\ 14161 \mid 7 \\ 2023 \mid 7 \\ 289 \mid 17 \\ 17 \mid 17 \\ 1 \mid \end{array}$$

$$\sqrt{2^2 \cdot 7^2 \cdot 17^2} = 2 \times 7 \times 17 = 238 \text{ è il risultato cercato}$$

Lo stesso dicasi per la radice cubica di un numero cubo perfetto. Per esempio:

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{3375} = \\ 3375 \mid 3 \\ 1125 \mid 3 \\ 375 \mid 3 \\ 125 \mid 5 \\ 25 \mid 5 \\ 5 \mid 5 \\ 1 \mid \end{array}$$

$$\sqrt[3]{3^3 \cdot 5^3} = 3 \times 5 = 15 \text{ è il risultato cercato}$$

Di un qualunque numero intero è possibile stimare da quante cifre è composta la parte intera della sua radice quadrata e quale sia la sua prima cifra, nel seguente modo:

si divide il numero in gruppi di due cifre partendo da destra, il numero dei gruppi fornisce il numero delle cifre della parte intera della sua radice quadrata mentre la radice quadrata approssimata per difetto a meno di una unità del primo gruppo a sinistra fornisce la prima cifra.

Per esempio, del numero intero 2573492 si formano i gruppi di due cifre 2 57 34 92 che risultano 4 pertanto 4 saranno le cifre che comporranno la parte intera della sua radice quadrata, mentre la radice quadrata approssimata per difetto a meno di una unità del primo gruppo a sinistra è 1 che sarà pertanto la prima cifra della sua radice quadrata.

Metodo 1

Metodo del bolognese Raffaele Bombelli (1526-1572) autore dell'opera *L'Algebra, opera di Rafael Bombelli da Bologna, divisa in tre libri con la quale ciascuno da sé potrà venire in perfetta cognitione della teoria dell'Aritmetica* (1572) in tre libri.

esempio per $\sqrt{2573492}$

- si divide il radicando 2573492 in gruppi di due cifre incominciando da destra (il gruppo a sinistra può essere costituito anche da una sola cifra) [2 57 34 92];

- si calcola la radice quadrata approssimata per difetto del primo gruppo di cifre (una o due) a sinistra [1], si calcola il quadrato [1²] e lo si sottrae dal gruppo in questione [2-1];

- si abbassa il successivo gruppo di due cifre [57] accanto al quoziente precedente [1] e si separa l'ultima cifra [15 7];

- si raddoppia il numero finora calcolato come radice quadrata [1+1], si aggiunge un numero (da 1 a 9) e si moltiplica il tutto per lo stesso numero tale da permettere che il prodotto risultante sia inferiore al resto che abbiamo a sinistra (se nessun numero soddisfa questa condizione si inserisce 0);

$\sqrt{2\ 57\ 34\ 92}$	
<u>1</u>	1604,2107...
157	1
<u>156</u>	6 1+1= 26 x 6 = 156
134	0 16+16= 32 > di 13 quindi 0
13492	4 160+160= 3204 x 4 = 12816
<u>12816</u>	
67600	2 1604+1604= 32082 x 2 = 64164
<u>64164</u>	
343600	1 16042+16042= 320841 x 1 = 320841
<u>320841</u>	
2275900	0 160421+160421= 320842 > di 227590 quindi 0
227590000	7 1604210+1604210= 32084207 x 7 = 224589449
<u>224589449</u>	
3000551 etc.	

La radice quadrata di 2573492 è 1604 + 676 di resto: $1604^2 = 2572816 + 676 = 2573492$.

Per calcolare anche i decimali della radice quadrata si prosegue il procedimento aggiungendo due zeri alla volta.

metodo 2

Metodo iterativo di Newton che ricerca la radice quadrata di a mediante la funzione

$f(x) = x^2 - a$	da cui	$x_0 = 1$ $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}$
$x_0 =$	esempio per $\sqrt{11}$	1
$x_1 =$	$\frac{1}{2} + \frac{11}{2 \cdot 1} =$	6
$x_2 =$	$\frac{6}{2} + \frac{11}{2 \cdot 6} =$	3.916666
$x_3 =$	$\frac{3.916666}{2} + \frac{11}{2 \cdot 3.916666} =$	3.442588
$x_4 =$	$\frac{3.442588}{2} + \frac{11}{2 \cdot 3.442588} =$	3.318929
$x_5 =$	$\frac{3.318929}{2} + \frac{11}{2 \cdot 3.318929} =$	3.316625
$x_6 =$	$\frac{3.316625}{2} + \frac{11}{2 \cdot 3.316625} =$	3.31662...



Christoff Rudolff (1500-1543). Fu il primo ad utilizzare il simbolo di radice $\sqrt{\quad}$ oggi a noi noto che lo introdusse nell'opera *Bebend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebra, so gemeincklich die Coß genennt werden* (1525), il primo libro di algebra in lingua tedesca.

metodo 3

Metodo iterativo di Newton che ricerca il reciproco della radice quadrata di a mediante la funzione

$g(x) = \frac{1}{x^2} - a$	da cui	$x_0 = 0.5$ $x_{n+1} = 0.5x_n(3 - ax_n^2)$
$x_0 =$	esempio per $\sqrt{11}$	0.5
$x_1 =$	$0.5 \cdot 0.5 [3 - 11 \cdot (0.5)^2] =$	0.0625... $1/x_1 = 16$
$x_2 =$	$0.5 \cdot 0.0625 [3 - 11 \cdot (0.0625)^2] =$	0.0924... $1/x_2 = 10.8216$
$x_3 =$	$0.5 \cdot 0.0924 [3 - 11 \cdot (0.0924)^2] =$	0.1342... $1/x_3 = 7.4481$
$x_4 =$	$0.5 \cdot 0.1342 [3 - 11 \cdot (0.1342)^2] =$	0.1880... $1/x_4 = 5.3189$
$x_5 =$	$0.5 \cdot 0.1880 [3 - 11 \cdot (0.1880)^2] =$	0.2454... $1/x_5 = 4.0740$
$x_6 =$	$0.5 \cdot 0.2454 [3 - 11 \cdot (0.2454)^2] =$	0.2868... $1/x_6 = 3.4865$
$x_7 =$	$0.5 \cdot 0.2868 [3 - 11 \cdot (0.2868)^2] =$	0.3004... $1/x_7 = 3.3283$
$x_8 =$	$0.5 \cdot 0.3004 [3 - 11 \cdot (0.3004)^2] =$	0.3015... $1/x_8 = 3.3166$
$x_9 =$	$0.5 \cdot 0.3015 [3 - 11 \cdot (0.3015)^2] =$	0.3015... $1/x_9 = \mathbf{3.3166}$



Michael Stifel (1487-1567). Autore di *Die Coss Christoffs Rudolffs* (1553) una revisione dell'opera di Rudolff.

Il simbolo di radice oggi a noi noto venne introdotto per la prima volta dal matematico tedesco Christoff Rudolff (1500-1543) nel 1525. Nel simbolo $\sqrt{\quad}$, tuttavia, non appariva il *vinculum*, la linea sopra il radicando. Fu René Descartes (Cartesio) (1596-1650) che usò il simbolo $\sqrt{\quad}$ (completo del *vinculum*) nell'opera *La Geometrie* (1637). Il posizionamento dell'indice del radicale $\sqrt[n]{\quad}$ venne, invece, proposto dal matematico francese Albert Girard (1595-1632) nell'opera *Invention nouvelle* del 1629, notazione suggerita inizialmente per la radice cubica. Mentre, il francese Michel Rolle (1652-1719) fu la prima persona ad accogliere il suggerimento di Girard nell'opera *Traité d'algèbre, ou principes généraux pour résoudre les questions de mathématique* del 1690, non escludendo a priori che ciò avvenne prima con lo stesso Girard (1633) e Leibniz (1676). Il dividere le cifre a gruppi di due (per la radice quadrata) e di tre (per la radice cubica) necessarie per il calcolo dell'estrazione di radice sono indicazioni già fornite e usate dal matematico indiano Aryabhata (476-550) nel V secolo. La regola pratica di estrazione della radice ennesima, con indice intero e maggiore di tre, si trova nell'opera *General trattato di numeri et misure* (1556) del bresciano Niccolò Fontana (Tartaglia) (1499-1557) e anche nell'opera *De numerosa potestatum ad exegesim resolutione* (1600) di François Viète (1540-1603). Il matematico bolognese Pietro Antonio Cataldi (1552-1626) nell'opera *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadrata delli numeri* (1613) utilizzò per primo le frazioni continue e le serie. Anche se le proprietà dei radicali erano in parte già note a vari matematici quali Diofanto di Alessandria (III sec.), Fibonacci (XIII sec.), all'aretino di Sansepolcro

Luca Bartolomeo de Pacioli (XV sec.), Tartaglia, al pavese Girolamo Cardano (1501-1576) e Bombelli (XVI sec.) la loro trattazione rigorosa e sistematica si ebbe da Descartes (Cartesio) nel XVII secolo in avanti.

similmente si ha per la ricerca della radice cubica di **a** mediante la funzione

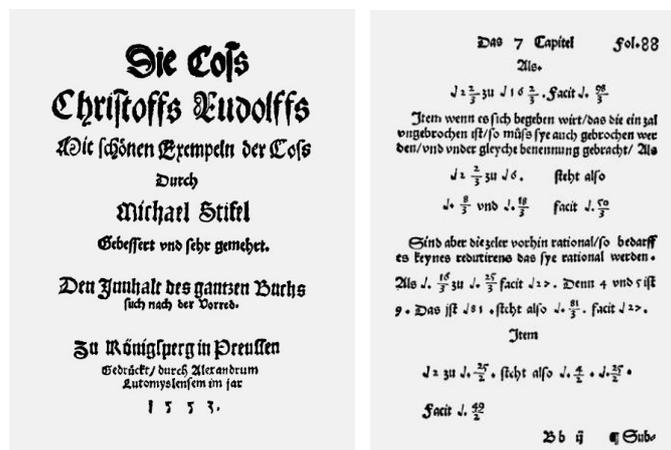
$f(x) = x^3 - a$	da cui	$x_0 = 1$ $x_{n+1} = \frac{1}{3} (2 \cdot x_n + \frac{a}{x_n^2})$
$x_0 =$	esempio per $\sqrt[3]{11}$	1
$x_1 =$	$\frac{1}{3} (2 \cdot 1 + \frac{11}{1^2}) =$	4.3333
$x_2 =$	$\frac{1}{3} (2 \cdot 4.3333 + \frac{11}{4.3333^2}) =$	3.0841
$x_3 =$	$\frac{1}{3} (2 \cdot 3.0841 + \frac{11}{3.0841^2}) =$	2.4415
$x_4 =$	$\frac{1}{3} (2 \cdot 2.4415 + \frac{11}{2.4415^2}) =$	2.2427
$x_5 =$	$\frac{1}{3} (2 \cdot 2.2427 + \frac{11}{2.2427^2}) =$	2.2241
$x_6 =$	$\frac{1}{3} (2 \cdot 2.2241 + \frac{11}{2.2241^2}) =$	2.2239
$x_7 =$	$\frac{1}{3} (2 \cdot 2.2239 + \frac{11}{2.2239^2}) =$	2.2239...

In generale, la radice ennesima di un numero $\sqrt[n]{a}$ la possiamo calcolare applicando il metodo di Newton all'equazione $x^n - a = 0$ partendo da una prima approssimazione x_0 (ad esempio lo stesso valore di a) e ottenendo iterativamente i valori successivi di x_k con la formula seguente:

$$x_0 = a$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n - a}{n \cdot x_k^{n-1}}$$

sino alla precisione desiderata. Migliore sarà la stima iniziale di x_0 , che meglio approssima il valore della radice, minori saranno le iterazioni da effettuare per ottenere il risultato.



Copertina e una pagina dell'opera *Die Coss* Christoffis Rudolffs (1553) di Stifel.

Bibliografia

Bottazzini U. - Freguglia P. - Toti Rigatelli L., *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze 1992

Cajori F., *A History of mathematics*, Macmillan, New York 2nd ed. 1919

Channabasappa M.N., “On the square root formula in the Bakshali manuscript”, *Indian J. History Sci.* vol. 11 (2) pp. 112-124

Ifrah G., *Enciclopedia universale dei numeri*, Mondadori, Milano 2008

Piccato A., *Dizionario dei termini matematici*, Rizzoli, Milano 1987

Rittaud B., *La favolosa storia della radice quadrata di due*, Bollati Boringhieri, Torino 2010

184. Il problema ristretto dei tre corpi

Marco Giancola
giancolamarco@libero.it

Descrizione del problema

Il problema ristretto dei tre corpi consiste nella descrizione del moto di un corpo di massa m_3 , sottoposto all'azione gravitazionale di due corpi, detti primari, di masse m_1 ed m_2 , i quali ruotano con velocità angolare costante ω intorno al loro centro di massa su orbite piane circolari poste sul piano nel quale si svolge il moto di m_3 . Si suppone che le masse dei due primari abbiano distribuzione tale da poterli considerare puntiformi; si introduce inoltre l'ipotesi fondamentale per la quale la massa del terzo corpo, essendo molto inferiore a quella dei primari, non influenzi il moto di questi ultimi, il quale pertanto è descritto dal problema dei due corpi di cui è nota la soluzione.

La descrizione e lo studio del problema vengono effettuati in due distinti sistemi di riferimento. Il primo è un sistema di riferimento cartesiano inerziale di assi X e Y individuante il piano nel quale si svolge il moto dei tre corpi, la cui origine coincide col baricentro dei primari. Tale sistema di riferimento prende il nome di sistema di riferimento siderale. Il secondo è un sistema di riferimento cartesiano di assi x e y che individua lo stesso piano del sistema di riferimento siderale, ha la stessa origine, ma ruota con velocità angolare ω rispetto ad esso. Pertanto in tale sistema di riferimento, che viene chiamato sistema di riferimento sinodico, i due primari sono fissi e, per ipotesi, sono posti sull'asse delle ascisse orientato da m_1 a m_2 .

Equazioni del moto

La legge di gravitazione universale stabilisce che due corpi puntiformi dotati di masse M_1 ed M_2 , ad una distanza d l'uno dall'altro, si attraggono con una forza che è diretta secondo la loro congiungente e vale in modulo:

$$F = G \frac{M_1 M_2}{d^2}$$

essendo G la costante di gravitazione universale, pari a $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$.

Dalla legge di gravitazione universale e dalla seconda legge della dinamica, seguono le equazioni scalari del moto di m_3 nel sistema di riferimento siderale:

$$\begin{cases} \ddot{X} = G \frac{m_1}{\rho_1^3} (X_1 - X) + G \frac{m_2}{\rho_2^3} (X_2 - X) \\ \ddot{Y} = G \frac{m_1}{\rho_1^3} (Y_1 - Y) + G \frac{m_2}{\rho_2^3} (Y_2 - Y) \end{cases}$$

dove X e Y sono le coordinate di m_3 , mentre X_i e Y_i sono le coordinate di m_i , con $i = 1, 2$. ρ_1 e ρ_2 sono le distanze di m_3 rispettivamente da m_1 e m_2 , ovvero:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2} \\ \rho_2 &= \sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2} \end{aligned}$$

La relazione tra il sistema sinodico e quello siderale è data da:

$$\begin{cases} X = x \cos \omega t - y \sin \omega t \\ Y = x \sin \omega t + y \cos \omega t \end{cases}$$

Grazie a queste ultime formule, le equazioni del moto di m_3 diventano:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x = G \frac{m_1}{\rho_1^3} (x_1 - x) + G \frac{m_2}{\rho_2^3} (x_2 - x) \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = G \frac{m_1}{\rho_1^3} (y_1 - y) + G \frac{m_2}{\rho_2^3} (y_2 - y) \end{cases} \quad (1)$$

dove x ($x_{1,2}$) e y ($y_{1,2}$) sono le coordinate di m_3 ($m_{1,2}$) nel sistema sinodico. Essendo, ovviamente, $y_1 = y_2 = 0$, le (1) diventano:

$$(2) \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x = G \frac{m_1}{\rho_1^3} (x_1 - x) + G \frac{m_2}{\rho_2^3} (x_2 - x) \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y = -G \frac{m_1}{\rho_1^3} y - G \frac{m_2}{\rho_2^3} y \end{cases}$$

Le (2) rappresentano le equazioni del moto di un corpo soggetto ad un campo di forze conservative, quindi è utile esprimere il potenziale relativo all'oggetto considerato in modo che esse possano essere scritte nella forma:

$$(3) \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} = V_x(x, y) \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} = V_y(x, y) \end{cases}$$

dove la funzione $V(x,y)$, determinata uguagliando i secondi membri delle (2) a quelli delle (3) e integrando poi rispetto alle variabili x e y , viene espressa dalla:

$$V = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + G \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right)$$

Quindi V non è altro che il potenziale della forza gravitazionale e della forza centrifuga agenti su m_3 . Consideriamo ora le equazioni del moto di m_3 in un sistema di riferimento sinodico adimensionale nel quale esse assumono forma semplificata; poniamo:

$$r = x_2 - x_1 = \text{distanza tra } m_1 \text{ e } m_2, \quad \bar{x} = \frac{x}{r}, \quad \bar{y} = \frac{y}{r}, \quad \bar{t} = \omega t, \quad \mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

$$\mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \bar{\rho}_1 = \frac{\rho_1}{r}, \quad \bar{\rho}_2 = \frac{\rho_2}{r}.$$

Osserviamo innanzitutto che, siccome il baricentro dei primari coincide con l'origine del sistema sinodico, per definizione di baricentro, si ha:

$$-m_1 x_1 = m_2 x_2$$

Sommando $m_1 x_2$ al primo e al secondo membro dell'equazione precedente, otteniamo:

$$m_1 x_2 - m_1 x_1 = m_1 x_2 + m_2 x_2 \Rightarrow m_1 (x_2 - x_1) = (m_1 + m_2) x_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{x_2}{x_2 - x_1} \Rightarrow \mu_1 = \frac{x_2}{r} = \bar{x}_2$$

Analogamente si dimostra che $\mu_2 = -\bar{x}_1$.

Il membro sinistro della prima delle (3), espresso in coordinate adimensionali, diventa:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega \frac{dy}{dt} = \frac{d^2(r\bar{x})}{d(\bar{t}/\omega)^2} - 2\omega \frac{d(r\bar{y})}{d(\bar{t}/\omega)} = r\omega^2 \left(\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} - 2\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \right)$$

il membro destro diverrà invece:

$$(4) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial(r\bar{x})} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \bar{x}}$$

Esprimiamo ora V in funzione delle coordinate adimensionali utilizzando la terza legge di Keplero ($G(m_1 + m_2) = \omega^2 r^3$):

$$\begin{aligned} V &= \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + G\left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}\right) = \frac{\omega^2}{2}(r^2\bar{x}^2 + r^2\bar{y}^2) + G\left[\frac{\mu_1(m_1 + m_2)}{r\bar{\rho}_1} + \frac{\mu_2(m_1 + m_2)}{r\bar{\rho}_2}\right] = \\ &= \frac{\omega^2 r^2}{2}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + \frac{G(m_1 + m_2)}{r}\left(\frac{\mu_1}{\bar{\rho}_1} + \frac{\mu_2}{\bar{\rho}_2}\right) = \omega^2 r^2 \left(\frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{2} + \frac{\mu_1}{\bar{\rho}_1} + \frac{\mu_2}{\bar{\rho}_2} \right) \end{aligned}$$

Ponendo:

$$U(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{2} + \frac{\mu_1}{\bar{\rho}_1} + \frac{\mu_2}{\bar{\rho}_2}$$

abbiamo che:

$$V(x, y) = \omega^2 r^2 U(\bar{x}, \bar{y})$$

Quest'ultima formula, sostituita nella (4), ci dà:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \bar{x}} = \omega^2 r \frac{\partial U}{\partial \bar{x}}$$

che possiamo scrivere anche nella forma:

$$\frac{1}{\omega^2 r} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \bar{x}}$$

e, dal momento che:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \ddot{x} - 2\omega\dot{y} = r\omega^2 \left(\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} - 2\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \right)$$

possiamo concludere scrivendo:

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} - 2\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \frac{\partial U}{\partial \bar{x}}$$

Utilizzando la seconda delle (3) e procedendo in maniera analoga si ricava l'equazione:

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{t}^2} + 2\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\partial U}{\partial \bar{y}}$$

Concludendo, le equazioni del moto di m_3 nel sistema di riferimento sinodico in coordinate adimensionali sono:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} - 2 \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \frac{\partial U}{\partial \bar{x}} \\ \frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{t}^2} + 2 \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\partial U}{\partial \bar{y}} \end{cases}$$

L'integrale di Jacobi

Dimostriamo ora che le equazioni (5) ammettono un integrale primo detto *integrale di Jacobi*. Infatti, moltiplicando la prima equazione per $d\bar{x}/d\bar{t}$, la seconda per $d\bar{y}/d\bar{t}$ e sommando, otteniamo:

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} + \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{t}^2} = \frac{dU}{d\bar{t}}$$

che è equivalente a:

$$\frac{d}{d\bar{t}} \left[2U - \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \right)^2 - \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \right)^2 \right] = 0$$

ovvero:

$$2U - \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \right)^2 - \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \right)^2 = C \quad (6)$$

Il primo membro della (6) prende il nome di *integrale di Jacobi*, mentre la costante C è detta *costante di Jacobi*. L'integrale di Jacobi è quindi una relazione che lega, nel sistema sinodico adimensionale, le coordinate della posizione di m_3 (ricordiamo che $U = \left[(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)/2 \right] + (\mu_1/\bar{\rho}_1) + (\mu_2/\bar{\rho}_2)$) al quadrato della sua velocità.

Si può dimostrare facilmente, riutilizzando le precedenti variabili ($x, y, t, m_1, m_2, \rho_1, \rho_2$), che nel sistema sinodico non adimensionale la (6) assume la forma:

$$2V - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \tilde{C}$$

con $\tilde{C} = C\omega^2 r^2$.

Una opportuna modificazione della funzione $U(\bar{x}, \bar{y})$, tramite l'aggiunta di una costante, non influenza le equazioni del moto ed offre una forma più utile di queste. Poniamo:

$$\bar{U}(\bar{x}, \bar{y}) = U(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\mu_1 \mu_2}{2}$$

sviluppando questa espressione, avremo:

$$\bar{U}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{2} + \frac{\mu_1}{\bar{\rho}_1} + \frac{\mu_2}{\bar{\rho}_2} + \frac{\mu_1 \mu_2}{2} = \frac{1}{2} (\mu_1 \bar{\rho}_1^2 + \mu_2 \bar{\rho}_2^2) + \frac{\mu_1}{\bar{\rho}_1} + \frac{\mu_2}{\bar{\rho}_2}$$

Le equazioni del moto di m_3 diventano:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} - 2 \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \\ \frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{t}^2} + 2 \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \end{cases}$$

e l'integrale di Jacobi assume la forma:

$$2\bar{U} - \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}\right)^2 - \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}\right)^2 = \bar{C}$$

con $\bar{C} = C + \mu_1 \mu_2$.

Dato che $\mu_1 + \mu_2 = 1$, ponendo $\mu_2 = \mu$ ($0 < \mu < 1$), possiamo scrivere $\mu_1 = 1 - \mu$, ottenendo così per \bar{U} l'espressione:

$$\bar{U}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{2} + \frac{1 - \mu}{\bar{\rho}_1} + \frac{\mu}{\bar{\rho}_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2}$$

Soluzioni d'equilibrio

L'integrazione delle equazioni differenziali rappresentanti il problema ristretto dei tre corpi, espresse nel sistema di riferimento sinodico in coordinate adimensionali dalle (7), costituisce uno dei problemi più studiati, e non risolti, della fisica matematica.

Tuttavia sono state trovate le soluzioni particolari relative al caso in cui m_3 sia in quiete nel sistema sinodico; tali soluzioni sono pertanto chiamate *soluzioni d'equilibrio*. Va però osservato che l'equilibrio è relativo al sistema sinodico, mentre nel sistema siderale m_3 compie moti circolari, intorno al baricentro dei primari, con velocità angolare costante.

Essendo quindi, in tal caso, \bar{x} e \bar{y} costanti, avremo:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} = \frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{t}^2} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = 0$$

pertanto le equazioni del moto si riducono a:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} = 0$$

mentre l'integrale di Jacobi diventa:

$$\bar{U}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{C}/2$$

Per risolvere le nuove equazioni del moto, operiamo un cambiamento di variabili esprimendo \bar{U} in funzione di $\bar{\rho}_1$ e $\bar{\rho}_2$ anziché di x e y . Essendo:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1 &= \sqrt{(\bar{x} - \bar{x}_1)^2 + \bar{y}^2} = \sqrt{(\bar{x} + \mu_2)^2 + \bar{y}^2} = \sqrt{(\bar{x} + \mu)^2 + \bar{y}^2} \\ \bar{\rho}_2 &= \sqrt{(\bar{x} - \bar{x}_2)^2 + \bar{y}^2} = \sqrt{(\bar{x} - \mu_1)^2 + \bar{y}^2} = \sqrt{(\bar{x} - 1 + \mu)^2 + \bar{y}^2} \end{aligned}$$

possiamo scrivere:

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = (1 - \mu)\bar{\rho}_1^2 + \mu\bar{\rho}_2^2 - \mu(1 - \mu)$$

da cui consegue che:

$$\bar{U} = \frac{1}{2}[(1-\mu)\bar{\rho}_1^2 + \mu\bar{\rho}_2^2 - \mu(1-\mu)] + \frac{1-\mu}{\bar{\rho}_1} + \frac{\mu}{\bar{\rho}_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu) = (1-\mu)\left(\frac{1}{2}\bar{\rho}_1^2 + \frac{1}{\bar{\rho}_1}\right) + \mu\left(\frac{1}{2}\bar{\rho}_2^2 + \frac{1}{\bar{\rho}_2}\right)$$

Inserendo quest'ultima espressione nelle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{\rho}_1} \frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{\rho}_2} \frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{\rho}_1} \frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{\rho}_2} \frac{\partial \bar{\rho}_2}{\partial \bar{y}} \end{cases}$$

otteniamo infine:

$$(8) \quad \begin{cases} (1-\mu)\left(\bar{\rho}_1 - \frac{1}{\bar{\rho}_1^2}\right)\frac{\bar{x} + \mu}{\bar{\rho}_1} + \mu\left(\bar{\rho}_2 - \frac{1}{\bar{\rho}_2^2}\right)\frac{\bar{x} + \mu - 1}{\bar{\rho}_2} = 0 \\ (1-\mu)\left(\bar{\rho}_1 - \frac{1}{\bar{\rho}_1^2}\right)\frac{\bar{y}}{\bar{\rho}_1} + \mu\left(\bar{\rho}_2 - \frac{1}{\bar{\rho}_2^2}\right)\frac{\bar{y}}{\bar{\rho}_2} = 0 \end{cases}$$

Consideriamo ora due casi distinti:

1) $\bar{y} \neq 0$

Dalla seconda delle (8), otteniamo:

$$(1-\mu)\left(\bar{\rho}_1 - \frac{1}{\bar{\rho}_1^2}\right)\frac{1}{\bar{\rho}_1} + \mu\left(\bar{\rho}_2 - \frac{1}{\bar{\rho}_2^2}\right)\frac{1}{\bar{\rho}_2} = 0 \Rightarrow (1-\mu)\left(\bar{\rho}_1 - \frac{1}{\bar{\rho}_1^2}\right)\frac{1}{\bar{\rho}_1} = -\mu\left(\bar{\rho}_2 - \frac{1}{\bar{\rho}_2^2}\right)\frac{1}{\bar{\rho}_2} \quad (9)$$

La prima delle (8), grazie alla (9), diventa:

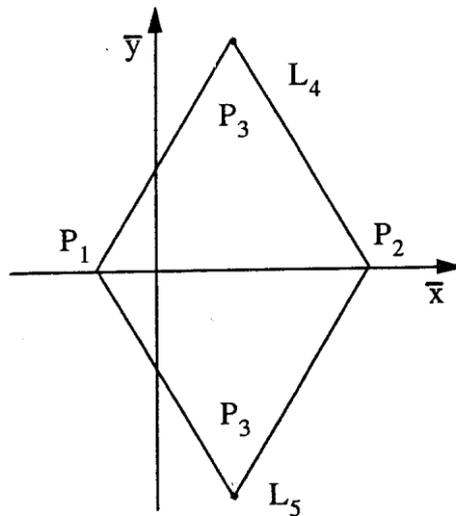
$$-\mu\left(\bar{\rho}_2 - \frac{1}{\bar{\rho}_2^2}\right)\frac{1}{\bar{\rho}_2}(\bar{x} - \mu) + \mu\left(\bar{\rho}_2 - \frac{1}{\bar{\rho}_2^2}\right)\frac{1}{\bar{\rho}_2}(\bar{x} + 1 - \mu) = 0 \Rightarrow \mu\left(\bar{\rho}_2 - \frac{1}{\bar{\rho}_2^2}\right)\frac{1}{\bar{\rho}_2}[\bar{x} + 1 - \mu - (\bar{x} - \mu)] = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\rho}_2 - \frac{1}{\bar{\rho}_2^2} = 0 \Rightarrow \bar{\rho}_2^3 = 1 \Rightarrow \bar{\rho}_2 = 1$$

Sostituendo $\bar{\rho}_2 = 1$ nella (9), otteniamo $\bar{\rho}_1 = 1$.

Quindi, nel caso $\bar{y} \neq 0$, esistono solo due possibili soluzioni per la posizione di m_3 , che corrispondono ai due vertici dei triangoli equilateri aventi come base il segmento che congiunge le posizioni dei due primari. Queste soluzioni, scoperte da Lagrange, vengono chiamate soluzioni d'equilibrio *triangolari* o *equilateri*, ed indicate con L_4 ed L_5 . Calcolando le coordinate di tali punti si ottiene:

$$L_4 = \left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad L_5 = \left(\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



Soluzioni d'equilibrio equilatero

2) $\bar{y} = 0$

In tal caso, le eventuali soluzioni del problema corrispondono a punti appartenenti all'asse delle ascisse (pertanto sono chiamate *collineari*) ed esistono tre casi possibili:

- $\bar{x} < -\mu$ (m_3 a sinistra di m_1),
- $-\mu < \bar{x} < 1-\mu$ (m_3 compreso tra m_1 ed m_2),
- $\bar{x} > 1-\mu$ (m_3 a destra di m_2).

Essendo $\bar{y} = 0$, le (8) si riducono ad una sola equazione:

$$(1-\mu)\left(\bar{\rho}_1 - \frac{1}{\bar{\rho}_1^2}\right)\frac{\bar{x} + \mu}{\bar{\rho}_1} + \mu\left(\bar{\rho}_2 - \frac{1}{\bar{\rho}_2^2}\right)\frac{\bar{x} + \mu - 1}{\bar{\rho}_2} = 0$$

nella quale ora si ha:

$$\bar{\rho}_1 = |\bar{x} - \bar{x}_1| = |\bar{x} + \mu| \qquad \bar{\rho}_2 = |\bar{x} - \bar{x}_2| = |\bar{x} + \mu - 1|$$

ovvero, distinguendo i tre casi, avremo:

a) $\bar{\rho}_1 = -\bar{x} - \mu, \bar{\rho}_2 = 1 - \bar{x} - \mu = 1 + \bar{\rho}_1,$

b) $\bar{\rho}_1 = \bar{x} + \mu, \bar{\rho}_2 = 1 - \bar{x} - \mu = 1 - \bar{\rho}_1,$

c) $\bar{\rho}_1 = \bar{x} + \mu, \bar{\rho}_2 = \bar{x} + \mu - 1 = \bar{\rho}_1 - 1.$

Utilizzando queste espressioni e ponendo $\bar{\rho}_1 = \rho$ nei casi a) e b); $\bar{\rho}_2 = \rho$ nel caso c), possiamo riscrivere l'equazione precedente, in corrispondenza con i tre casi, nei seguenti modi:

$$(1-\mu)\left(\rho - \frac{1}{\rho^2}\right) + \mu\left[\rho + 1 - \frac{1}{(\rho+1)^2}\right] = 0$$

$$(1-\mu)\left(\rho - \frac{1}{\rho^2}\right) - \mu\left[1 - \rho - \frac{1}{(1-\rho)^2}\right] = 0$$

$$(1-\mu)\left[1 + \rho - \frac{1}{(1+\rho)^2}\right] + \mu\left(\rho - \frac{1}{\rho^2}\right) = 0$$

Caso a)

Ponendo:

$$F(\rho) = \frac{\rho - \frac{1}{\rho^2}}{1 + \rho - \frac{1}{(1+\rho)^2}}$$

l'equazione diventa:

$$F(\rho) = \frac{\mu}{\mu - 1}$$

F è una funzione definita e continua in $(0, +\infty)$; si può verificare che gode delle seguenti proprietà:

$$F'(\rho) > 0 \Rightarrow F(\rho) \text{ è crescente} \qquad F(1) = 0 \qquad \lim_{\rho \rightarrow 0^+} F(\rho) = -\infty$$

Quindi F assume il valore $\mu/(\mu-1) < 0$ una sola volta, per un valore di ρ compreso tra 0 e 1. Pertanto il punto corrispondente alla soluzione d'equilibrio, che indichiamo con L_1 , ha ordinata uguale a 0 e ascissa compresa tra $-1-\mu$ e $-\mu$ (nel sistema sinodico).

Caso b)

Ponendo:

$$G(\rho) = \frac{1 - \rho - \frac{1}{(1-\rho)^2}}{\rho - \frac{1}{\rho^2}}$$

l'equazione diventa:

$$G(\rho) = \frac{1-\mu}{\mu}$$

Supponiamo che sia m_1 il primario di massa maggiore; si avrà:

$$m_1 \geq m_2 > 0 \Rightarrow 0 < \mu \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1-\mu}{\mu} \geq 1$$

La funzione $G(\rho)$, definita e continua in $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, è crescente nell'intervallo $[1/2, 1)$, inoltre $G(1/2) = 1$ e $\lim_{\rho \rightarrow 1^-} G(\rho) = +\infty$. Quindi G assume il valore $(1-\mu)/\mu$ una volta sola nell'intervallo $[1/2, 1)$.

Indicheremo con $L_3 = (\bar{x}_{L_3}, \bar{y}_{L_3})$ la posizione corrispondente, dove $\bar{y}_{L_3} = 0$ e $0 \leq \frac{1}{2} - \mu \leq \bar{x}_{L_3} < 1 - \mu < 1$. Osserviamo che L_3 è più vicino ad m_2 che ad m_1 , ovvero è più vicino al primario di massa inferiore.

Caso c)

Tale caso è molto simile a quello a), infatti è rappresentato dall'equazione:

$$F(\rho) = \frac{\mu - 1}{\mu}$$

quindi valgono le stesse considerazioni fatte nel caso a). Pertanto possiamo concludere che esiste una terza soluzione d'equilibrio collineare che corrisponde ad un punto, che chiamiamo L_2 , giacente sull'asse \bar{x} , la cui ascissa è compresa tra $1-\mu$ e $2-\mu$.

Concludendo, abbiamo visto che il sistema (7) ammette 5 soluzioni d'equilibrio costituite dai punti L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 raggruppati nella soluzione collineare e nella soluzione equilatera. Se m_3 è posizionato in uno di questi 5 punti con velocità ed accelerazione nulle, esso rimarrà indefinitamente in tale posizione. Tali punti sono chiamati *punti lagrangiani* o *punti di librazione*.

Si può dimostrare che L_4 ed L_5 sono punti di equilibrio stabile se $\mu_1\mu_2 \leq 1/27$; tale condizione è soddisfatta dal sistema Terra-Luna, essendo il prodotto della massa adimensionalizzata della Terra per quella della Luna pari a circa 1/83. Gli altri tre punti lagrangiani, invece, non sono mai punti di equilibrio stabile.

Le curve di Hill

Consideriamo di nuovo l'integrale di Jacobi:

$$2\bar{U} - \left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)^2 = \bar{C}$$

poniamo:

$$v = \sqrt{\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)^2} = \text{modulo della velocità di } m_3 \text{ nel sistema sinodico adimensionale}$$

L'integrale di Jacobi diviene:

$$2\bar{U} - v^2 = \bar{C}$$

Per $v = 0$, abbiamo:

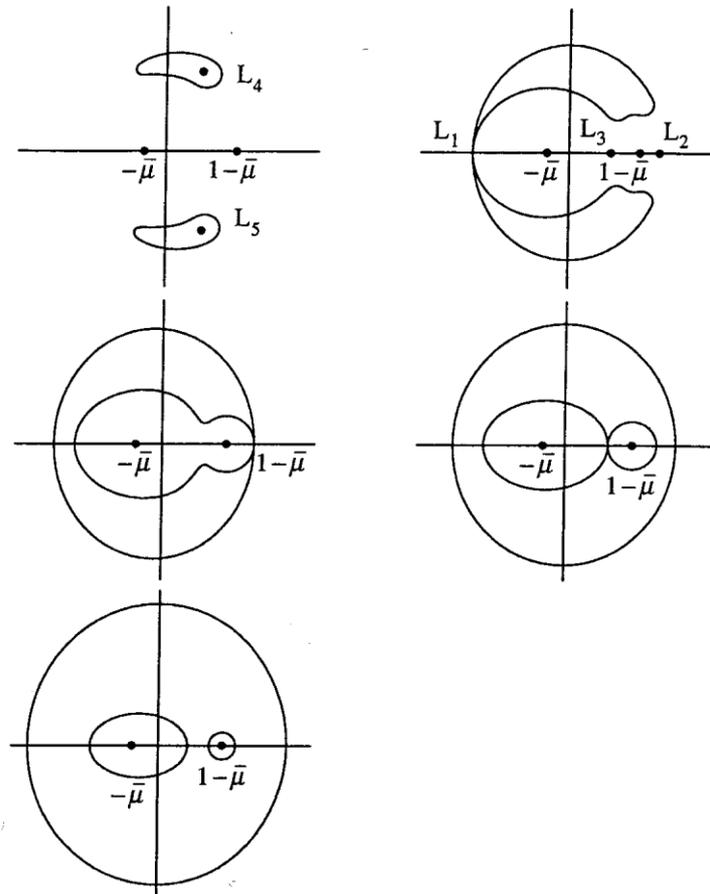
$$(10) \quad \bar{U}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{C}/2$$

Ad ogni valore di \bar{C} corrisponde una curva nel piano $\bar{x}\bar{y}$ che ha per equazione la (10); tali curve sono chiamate *curve a velocità zero* o *curve di Hill*. Dato che $\bar{U}(\bar{x}, \bar{y})$ è una funzione potenziale, le curve di Hill sono linee equipotenziali. Vediamo ora quali indicazioni sui moti si possono dedurre dallo studio di queste curve. Incominciamo con l'enunciare alcune proprietà significative della funzione $\bar{U}(\bar{x}, \bar{y})$ omettendone le relative dimostrazioni.

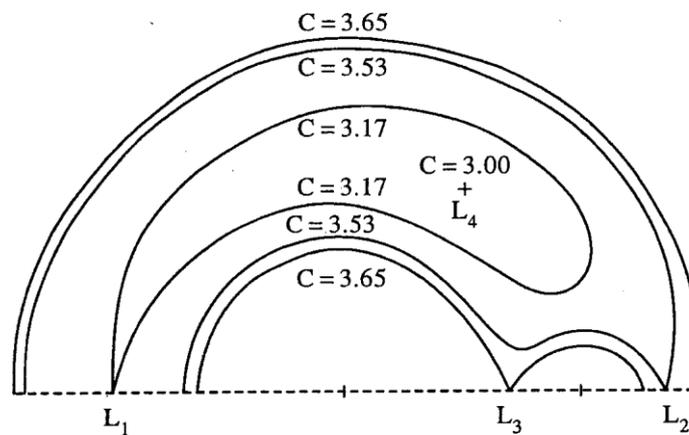
- 1) $\bar{U}(\bar{x}, \bar{y})$ ha un minimo assoluto uguale a $3/2$ che raggiunge nei punti L_4 ed L_5 ;
- 2) $\bar{U}(\bar{x}, \bar{y})$ diverge positivamente all'infinito;
- 3) $\bar{U}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{U}(\bar{x}, -\bar{y})$, quindi le curve di Hill sono simmetriche rispetto all'asse \bar{x} ;
- 4) L_1, L_2 ed L_3 sono punti di sella per $\bar{U}(\bar{x}, \bar{y})$.

Studiamo ora l'andamento delle curve al variare della costante di Jacobi. Cominciamo da $\bar{U} = 3/2$ ($\bar{C} = 3$). In questo caso la curva consiste soltanto dei punti L_4 ed L_5 . Aumentando di poco \bar{C} , si hanno due curve chiuse che contengono all'interno i punti L_4 ed L_5 . La parte di piano all'interno di queste curve corrisponde a $v^2 = 2\bar{U} - \bar{C} < 0$, la parte esterna alle curve invece corrisponde a $v^2 > 0$. Quindi queste curve separano le zone in cui sono possibili i moti (v reali) da quelle in cui non sono possibili (v immaginarie). Aumentando ulteriormente \bar{C} , le due curve andranno a congiungersi in L_1 . Dopo un ulteriore aumento che causerà la formazione di un'unica curva chiusa contenente L_4, L_5 ed L_1 , vi sarà un congiungimento anche in L_2 ed infine in L_3 . In questo modo

abbiamo ottenuto una curva costituita da tre ovali; due interni, congiunti in L_3 , che circondano i primari (se i primari sono le stelle che costituiscono un sistema binario, tali ovali prendono il nome di *lobi di Roche*), e uno esterno che racchiude gli altri due. Aumentando ancora \bar{C} , sparirà il congiungimento in L_3 , restando circondati i primari.



Le curve di Hill



Le curve di Hill

Bibliografia

Boccaletti D., Pucacco G.: *Theory of Orbits*, Vol. 1; Berlino, Springer-Verlag, 1996.

Giannone P., *Elementi di Astronomia*; Bologna, Pitagora Editrice s.r.l., 1996.

Szebehely V., *Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies*; New York, Academic Press, 1967.

185. Lo scaffale dei libri

“Mathematics of Life” di Ian Stewart

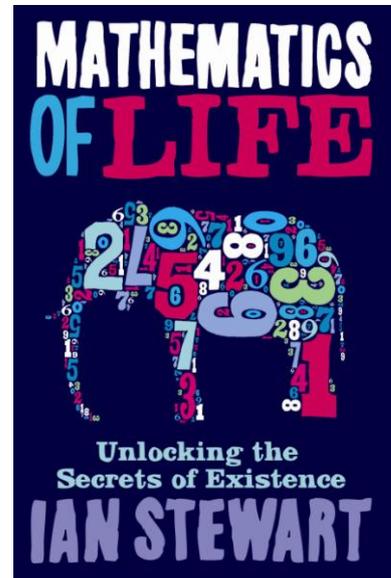
There is a famous old joke about the farmer who hired mathematicians to help him increase his milk yield. He got their report back, and read its initial sentence: “Consider a spherical cow...” Ian Stewart quotes the joke in *Mathematics of Life* because it illustrates the disconnect between mathematics, the language of clear abstractions, and the life sciences, the domain of messy organic forms. For much of the history of science, biology and mathematics have barely been on speaking terms. Ian Stewart says this is changing. He claims that for the next century the driving force behind mathematics will be biology, and that this marks a fundamental, and exciting, shift in how the sciences interrelate. “Mathematicians like nothing better than a rich source of new questions, – he writes – biologists, rightly, will be impressed only by the answers”.

The versatility of the mathematical approach has proven ideal, as a vital tool, to find an intuitive solution just about every problem. Mathematics quantitatively describes everything from the shape of viruses to the structure and function of DNA, and helps to explain the evolutionary games that led to the diversity of life on Earth. Mathematics is one of the fastest propellers for advancing science, and is considered “one of the greatest creations of mankind”.

Ian Stewart, Britain's most prolific popularizer of mathematics, introduces us to a revolutionary approach to an array of bioscience subjects that may have been traditionally considered descriptive, qualitative and dull. Through a fascinating account on the historical exploration of biology, he portrays mathematics as the ‘essential tension’, promising a new revolutionary perspective that will advance our understanding of the mysteries of life. Such a mathematical approach determines all, from the shape of a flower to symmetrical viruses. Stewart leads us to believe that nature is much more interesting than most people ever imagined, telling us how biology is fun, through examples that include the story of how Japanese researchers claimed a Nobel Prize for demonstrating that slime molds can solve puzzles!

Stewart, like professor Thomas Kuhn, perceives the advances of life science as leaps caused by revolutions in approach, and proposes its five tension points were the invention of the microscope, the systematic classification of the living creatures, evolution, detection of genes, and discovery of the DNA structure. But he strongly believes that truly fundamental changes to the way we thought about biology will be advanced by looking through the lens of Mathematics. Disappointingly, the recent celebration of the human genome project's tenth anniversary ended. Scientists and the press are both blamed for creating false hopes for genomic research in human health. As the DNA era is running out of heat, biology is in desperate need of a fresh mathematical approach. Moreover, while the work of biological scientists is basic to the future leap forward of biological and medical sciences, any breakthrough that has been expected could not possibly deliver the awaited personalized drugs, and mass cure miracles, without the help of mathematical tools.

Stewart is a stalwart of the popular maths genre, having previously written accounts of mathematical subjects as diverse as chaos theory, symmetry and



probability, and his engaging, accessible style is also present here. In fact, this book does not contain much mathematics in the shape of formulae and calculations; but this is precisely Stewart's point about mathematical biology: the puzzles should come from the biologists, rather than biology just being another area of application for existing mathematical results. It is a story of how scientists with contrasting backgrounds are coming together to solve real-life problems – important work that, in my opinion, cannot be emphasized enough.

As well an author, Stewart is also a researcher, and his work on how animals walk inevitably gets a mention, sandwiched between sections on the brain and leech heartbeats. The book's breadth, ambitiously aiming to give the reader the gist of many different corners within such a big research field, makes it an interesting read but inevitably creates a weakness too – in fact many topics are omitted or mentioned only too briefly. However, by including a solid biological backdrop for the problems he does cover, Stewart gives the book a nicely rounded feel, even if some chapters leave the reader wanting more. As an overview, it provides an entertaining and up-to-date insight into this exciting field.

Despite its title, this is a book for fans of biology as much as for those interested in mathematics. In many ways it reflects the increasingly blurred boundaries between the two subjects, and it gives an absorbing introduction to one of the fastest growing areas of modern science. According to Aristotle, “in all things of nature there is something of the marvellous”. Now mathematics can help us find it.

An enormous strength of the book is Stewart's dedication to challenging all-too-common misconceptions about evolution, often as a result of a very insular view about what constitutes habitable conditions. It's a fascinating tale, not least because of the ructions it caused for proving the bible wrong, but Stewart's main strength here is encapsulating the elegance and simplicity of Darwin's theory of natural selection. He also dismisses the reports of the appearance of allegedly oft-cited grey aliens as preposterous for being too obviously human-like (wannabee writers of science-fiction, please take note). Stewart considers what conditions might have to exist on other planets in order for life to be supported, and gives a potted history of the evolution of life on earth, from before oxygen was found in any great quantities in the atmosphere to the extraordinary biodiversity we see today. It's an exhilarating chapter to end on.

After reading *The Mathematics of Life*, you can look at the world through a mathematical lens and see the beauty and meaning that is revealed. Julie Rehmeyer, a math columnist for *Science News*, summarizes Stewart findings, “A surprising number of plants have spiral patterns in which each leaf, seed, or other structure follows the next at a particular angle called the golden angle. The golden angle is closely related to the celebrated golden ratio, which the ancient Greeks and others believed to have divine and mystical properties. Leonardo da Vinci believed that the human form displays the golden ratio. Scientists were puzzled over this pattern of plant growth for hundreds of years. Even though these numbers were introduced in 1202, Fibonacci numbers and the Fibonacci sequence are prime examples of how mathematics is connected to seemingly unrelated things”.

Scientists have not entirely solved the mystery, but a basic understanding of the process seems to be emerging. And the answers are sending botanists back to

their electron microscopes to re-examine plants they thought they had already understood.

Mathematics of Life is a thoroughly readable book, full of interesting facts that should delight readers with a strong interest in science: in fact, the mathematics shouldn't put off lay readers; it's not easy, but it's challenging and enlightening. Ian Stewart has written a provocative narrative of passionately argued science: if you're interested in evolution, then this book will offer a fresh perspective, as well as providing a solid grounding in the history and important details of this hugely worthwhile subject.

I will conclude this review with the same words Stewart used to conclude the book:

«Instead of isolated clusters of scientists, obsessed with their own narrow speciality, today's scientific frontiers increasingly require teams of people with diverse, complementary interests. Science is changing from a collection of villages to a worldwide community. And if the story of mathematical biology shows anything, it is that interconnected communities can achieve things that are impossible for their individual members».

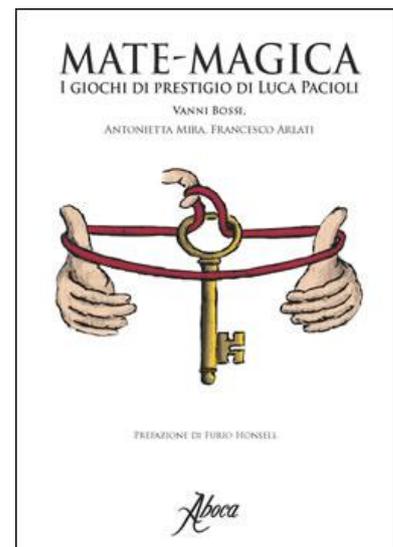
Nicola De Nitti

“Matematica Magica” di Vanni Bossi

Questo non è un libro di matematica nel senso classico del termine e, per spiegarne il motivo, basta ricordare quanto viene detto nell'introduzione: “Attraverso questo lavoro si desidera offrire a prestigiatori, matematici, appassionati, dilettanti o anche solo curiosi di magia, un breve compendio e un'istantanea della prestigiazione nell'Italia del XV secolo.”

Luca Pacioli è il protagonista di questo simpatico libretto: non è solo un matematico, visto che è una delle figure più significative della cultura rinascimentale, un personaggio eclettico, dai mille interessi che vede nella matematica il fondamento di tutte le altre scienze. Pacioli ha il merito di aver saputo cogliere gli aspetti ludici della matematica e di averli evidenziati attraverso i giochi di prestigio nel suo *De viribus quantitatis* e gli autori del presente libro sono stati alla sua altezza e la lettura si rivela “un'autentica avventura intellettuale”, come dice Furio Honsell nella sua prefazione. Ideatore di questo libro è Vanni Bossi, noto illusionista e storico di prestigiazione – mancato nel 2008 – che Furio Honsell, nella sua prefazione, definisce il “Luca Pacioli del XX secolo”. Antonietta Mira, docente universitaria di statistica, con grande passione per la prestigiazione e Francesco Arlati, ingegnere che lavora all'Enel come Project Manager e amico di Bossi, completano il progetto avviato con il prestigiatore e riescono abilmente nell'impresa. Il testo è il terzo volume di una collana dal titolo *Classici della prestigiazione italiana*, voluta e sostenuta dallo stesso Vanni Bossi.

Il libro è una rilettura di alcuni “prestigiosi effetti”, selezionati dalle prime due parti del *De viribus quantitatis*, la prima raccolta di giochi matematici e di prestigio giunta fino a noi. È diviso in sei capitoli: il primo e più corposo – circa metà del libro – è dedicato ai giochi matematici, che, spiegati con le equazioni e con la matematica moderna, sono di facile comprensione; il secondo è dedicato a rompicapo e giochi topologici e gli autori hanno dovuto cercare delle immagini per facilitarne la comprensione, considerato che nel



testo originale spesso non compaiono disegni; nel terzo capitolo ci sono i giochi di prestigio basati su principi fisici e, per quanto gli effetti presentati riguardino l'applicazione del baricentro e delle reazioni vincolari, sono sufficienti per dimostrarci la conoscenza di Pacioli; il quarto capitolo è dedicato alle illusioni sensoriali, il quinto alle scommesse e il sesto al confronto tra il foglio 958r del Codice Atlantico di Leonardo e il De viribus quantitatis.

Daniela Molinari

“Fisica delitti e digressioni” di Domenico Signorelli

Da bravo insegnante, Domenico Signorelli ha trovato un modo alternativo di spiegare la fisica: la caduta dei gravi, la portata di un fluido, la legge fondamentale della termologia, l'ottica, l'acustica e l'elettromagnetismo non hanno segreti per il protagonista, il professor Salviati che, coinvolto nelle indagini dal suo amico, il commissario Borsari, utilizza la fisica per risolvere i casi più intricati.

Ogni racconto sviluppa un argomento di fisica tipico della scuola superiore, allo scopo di “veicolare concetti che, nella maggior parte dei casi risultano indigesti, attraverso canali, linguaggi, espedienti e opportunità fruttive di diversa natura”.

Il titolo dei capitoli ci dà indicazioni chiare riguardo il loro contenuto:

- “Una grave leggerezza” parla, per l'appunto, di un omicidio mascherato da incidente, avvenuto con una caduta dal 15° piano di un palazzo. Proprio il moto dei gravi permetterà al professor Salviati di indicare la soluzione del caso al commissario.

- “Un dettaglio di grande portata” ha per protagonisti i fluidi: con l'aiuto della pioggia e di un contenitore bucato da un proiettile, il professor Salviati riesce a determinare senza ombra di dubbio il tempo intercorso tra l'aggressione e l'arrivo della polizia e, in questo modo, accerta ciò che è avvenuto realmente.

- “Un ardente desiderio di esattezza” ci rimanda alla termologia. Il professor Salviati, perlustrando la stanza dopo una rapina, nota delle deformazioni tipiche del metallo quando fonde e riesce a risalire al quantitativo di alcol utilizzato per incendiare le prove. Da questo all'identità dell'aggressore, il passo è breve.

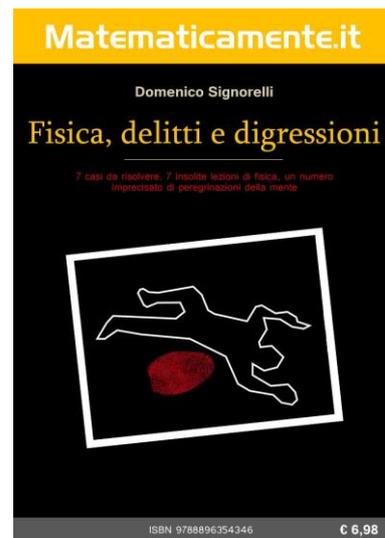
- “Un'acuta riflessione”: l'aiuto per scoprire chi ha ucciso Ugo Sarti, con un colpo di fucile esploso dall'esterno dell'ufficio dove si trovava attraverso la finestra, viene dalle leggi di riflessione dell'ottica.

- “Un silenzio assordante”: le leggi dell'acustica permettono al professor Salviati di dimostrare che un caso di suicidio di parecchi anni prima era in realtà un omicidio.

- “Un'altezza che dura un istante” ritorna sulla caduta dei gravi, grazie alla quale il professore smaschera il tentativo di fuga di un uomo colpevole di un grave atto di sabotaggio e sorpreso durante il reato proprio dai due protagonisti.

- “Un'idea illuminata” mostra che le conoscenze del professor Salviati non sono solo teoriche. Grazie all'elettromagnetismo, riesce a costruire una torcia con la quale trovare l'unica traccia lasciata da un ladro che li ha sequestrati.

Le digressioni introducono l'argomento del singolo capitolo o lo concludono con una riflessione, durante la quale, l'autore ci parla con la voce di Salviati: Si comincia con la storia di Galilei che studia la caduta dei gravi e si procede



riflettendo sul fatto che eventi che sono sotto gli occhi di tutti possono essere interpretati e letti scientificamente solo da chi sa guardare oltre le apparenze.

Non manca il confronto tra le due culture, quella scientifica e quella umanistica, da sempre considerate, dai più, in contrapposizione e la religione viene vista come una limitazione del nostro orizzonte di conoscenza, che può essere ampliato solo grazie alla logica, unico strumento in grado di difenderci dall'errore. L'ultima digressione riguarda il dubbio, grazie al quale si sono messe in discussione credenze ritenute incontestabili, dimostrandone la falsità.

Daniela Molinari

MAGAZINE
MATEMATICAMENTE.IT *Rivista trimestrale di matematica,
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito*

Anno 7 Numero 19 APRILE 2013

Registrazione n. 953 del 19.12.2006 – Tribunale di Lecce

ISIN ISSN 2035-0449

Direttore responsabile Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it