188. SUCCESSIONI E FAMIGLIE DI NUMERI INTERI

Stefano Borgogni
e-mail: stfbrg@rocketmail.com

"La Matematica è la regina delle scienze e la Teoria dei Numeri è la regina della Matematica" (C.F. Gauss)

SUNTO

Questo studio, senza alcuna pretesa di essere esaustivo di un argomento tanto vasto, intende trattare alcuni insiemi di numeri interi che, per maggiore chiarezza, saranno suddivisi in due tipologie: successioni e famiglie.
Da un lato si prenderanno in considerazione le successioni di interi calcolabili con una formula ben precisa; un caso semplicissimo è quello dei numeri pari, che si possono definire tramite la relazione n=m×2 (con m intero).
Nella seconda parte, invece, saranno esaminate famiglie di numeri che hanno determinate proprietà, ma non sono costruibili tramite una formula. L'esempio più immediato potrebbe essere quello dei numeri primi, visto che non esiste alcun modo per prevedere la loro successione.[1]
Questa suddivisione, peraltro, va intesa solo come un'indicazione di massima - utile per dare un ordinamento alle informazioni e agevolarne la lettura - in quanto vi sono casi in cui il confine tra le due tipologie non è così netto.
Saranno esaminati gruppi di numeri di cui probabilmente hanno sentito parlare solo gli appassionati di matematica (ad esempio, i Numeri di Achille), insieme ad altri sui quali - al contrario - esiste un'ampia letteratura: vedi i Numeri di Fibonacci.
Inoltre, per ogni insieme di numeri saranno messe in evidenza le possibili varianti, nonché alcune proprietà curiose o sorprendenti.

1 - SUCCESSIONI DI NUMERI INTERI[2]

In primo luogo, vediamo una tabella che riporta sinteticamente le caratteristiche principali delle successioni numeriche che saranno esaminate nel prosieguo del testo. Per completezza, compaiono nella tabella suddetta anche le svariate tipologie di **Numeri Figurati** (Poligonali, Stella etc.), numeri di cui non si parlerà in questa sede, poiché ad essi è già stato dedicato un articolo specifico pubblicato qualche anno fa su questa stessa rivista.[3]

[1] Si tratta di uno dei problemi insoluti più importanti nella teoria dei numeri, a cui si sono dedicati, invano, i migliori matematici di diverse epoche. Tra le più recenti opere sull'argomento, si segnala *The music of the primes,* tradotta in italiano con l'assai meno significativo titolo *L'enigma dei numeri primi,* di Marcus De Sautoy, 2005.
[2] Per approfondire il tema, si può consultare il sito Internet https://oeis.org (OEIS sta per *On-line Encyclopedia of Integer Sequences*), che raccoglie le più svariate sequenze di numeri interi. Il sito viene aggiornato costantemente dagli stessi "internauti" e attualmente - Giugno 2013 - consta di oltre 226.000 successioni diverse (molte delle quali, per la verità, piuttosto cervellotiche).
[3] Stefano Borgogni, *Numeri figurati* in Matematicamente magazine n.16 (dic. 2011).

Nome	Descrizione	Primi numeri della serie	Formula
Poligonali	Punti di un poligono di s lati	dipende dal numero di lati	$[(s-2)n^2-(s-4)n] / 2$
Poligonali centrati	Punti di un poligono di s lati con centro	dipende dal numero di lati	$(sn^2-sn+2) / 2$
Stella	Punti di una stella regolare a 6 punte	1-13-37-73-121-181-253	$6n(n-1)+1$
Piramidali	Punti di una piramide con base di s lati	dipende dal numero di lati	$n(n+1)[(s-2)n+5-s] / 6$
Fattoriale	Prodotto dei primi n interi	1-2-6-24-120-720-5.040	$n!= n\times(n-1)\times(n-2)\dots$
Fattoriale doppio	Prodotto di n per il fattoriale doppio di (n-2)	1-2-3-8-15-48-105-384	$n!!=n\times(n-2)!!$
Fattoriale triplo	Prodotto di n per il fattoriale triplo di (n-3)	1-2-3-4-10-18-28-80-162	$n!!!=n\times(n-3)!!!$
Superfattoriale	Prodotto dei primi n fattoriali	1-2-12-288-34.560	$Sf(n)=n!\times(n-1)!\times(n-2)!\dots$
Derangement	Dismutazioni (permutazioni con nessun oggetto nell'ordine iniziale)	0-1-2-9-44-265-1.854	$!n=(n-1)\times[!(n-1)+!(n-2)]$
di Fibonacci	Somma 2 numeri precedenti (inizio 1-1)	1-1-2-3-5-8-13-21-34-55	$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$
di Lucas	Somma 2 numeri precedenti (inizio 1-3)	1-3-4-7-11-18-29-47-76-123	$L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$
Tribonacci	Somma 3 numeri precedenti (inizio 1-1-2)	1-1-2-4-7-13-24-44-81-149	$T_n=T_{n-1}+T_{n-2}+T_{n-3}$
di Catalan		1-2-5-14-42-132-429-1.430	$2\times6\times\dots(4n-10) / (n-1)!$
di Bell	Partizioni di un insieme di n elementi	1-2-5-15-52-203-877-4.140	(vedi Triangolo di Bell)

1.1 - Fattoriale

Cominciamo questo excursus con una delle sequenze numeriche più note in assoluto, il **Fattoriale**, che, com'è noto, si ottiene moltiplicando successivamente i numeri interi a partire da 1.
Il punto esclamativo, proposto dal matematico tedesco Kramp nel 1807, è dovuto, si dice, alla sorpresa manifestata dal suo inventore per la rapidità con cui questi numeri crescono: il Fattoriale determinato da un numero relativamente piccolo come 15, ad esempio, è già un gigante di 12 cifre, ossia dell'ordine delle centinaia di miliardi.
Il Fattoriale è legato in particolare al calcolo combinatorio e alla probabilità, campi nei quali riveste un'importanza fondamentale. Ricordiamo solo le due formule più note che la riguardano, rimandando a testi specifici per eventuali approfondimenti:
il numero di possibili permutazioni di n oggetti è pari a n!
le possibili scelte di k oggetti su un totale di n (con n, ovviamente, maggiore di k) sono espresse dal cosiddetto coefficiente binomiale, una formula in cui il Fattoriale la fa "da padrone":

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Va aggiunto, però, che il Fattoriale ha anche altre importanti applicazioni; ad esempio, si ritrova con frequenza nel calcolo infinitesimale. Il caso più evidente riguarda la derivazione delle funzioni polinomiali: la derivata n-esima di x^n vale per l'appunto n!
Il numero n! può essere approssimato con la **Formula di Stirling**, $n!=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, una formula estremamente interessante, che mette insieme tre operazioni fondamentali (prodotto, elevamento a potenza, estrazione di radice) e coinvolge i due più importanti numeri trascendenti, e e π.

Proprietà numeriche e curiosità

La definizione stessa del Fattoriale implica che ogni 5 termini si aggiunga al numero una cifra finale "0". Ciò consente, dato un numero n!, di risalire a n con un'ottima approssimazione; ad esempio, se il numero n! ha 6 zeri al fondo, si può dedurre immediatamente che n è compreso tra 30 e 34.
Il **Teorema di Wilson**, risalente al XVIII secolo, afferma che (n-1)!+1 è divisibile per n se e solo se n è un numero primo. Ad esempio, 6!+1 = 721, che equivale a 103×7.

A parte il caso banale di 1! e 2!, esistono due Fattoriali m! e n! il cui prodotto dia come risultato ancora un Fattoriale? La risposta è "Sì"; vale, infatti, l'identità 6!×7!=10! Non sono noti altri prodotti del genere, anche aumentando il numero di fattori moltiplicativi (m!×n!×p! …).
Un altro problema irrisolto è il seguente: sono infiniti i Fattoriali che, aumentati di 1, producono un quadrato perfetto?[4] E' facile verificare che 4!, 5! e 7! hanno questa proprietà (da essi si ottengono rispettivamente 25, 121 e 5.041, cioè 5^2, 11^2 e 71^2), ma finora non sono stati trovati altri numeri del genere, né è stato dimostrato che non ne esistono.
Riguardo a 7! (5.040) - che compare in entrambi i quesiti appena visti - va ricordata anche una curiosità di tipo filosofico: il numero di abitanti immaginato da Platone per la sua città ideale[5] è proprio questo. Si tratta di un numero che - senza essere troppo grande - ha ben 58 divisori propri e, dunque, si presta ottimamente per suddividere la popolazione in parti uguali con diversi possibili scopi: distribuzione di terre, tasse etc.

Varianti del Fattoriale

Tra le possibili varianti, ricordiamo il **Fattoriale doppio** che, sulla falsariga del caso normale, si indica con il doppio punto esclamativo e si costruisce tramite la formula ricorsiva n!! = n×(n-2)!!
Il Fattoriale doppio di un numero n equivale al prodotto dei primi numeri pari o dispari fino allo stesso n: ad esempio, 6!! è dato da 6×4×2 (48), mentre 5!! si ottiene dal prodotto 5×3×1 (15). Da quanto detto si deduce che in questa successione vi è un'alternanza continua di numeri pari e numeri dispari.
I primi termini della sequenza sono: 1, 2, 3, 8, 15, 48, 105, 384, 945 …
Esiste una semplice formula - agevolmente ricavabile a partire dalle definizioni stesse delle due successioni - che lega tra loro Fattoriale e Fattoriale doppio: n! = n!!×(n-1)!!
Analogamente a quanto visto fin qui, il numero n!!! = n×(n-3)!!! è definito **Fattoriale triplo**; i suoi primi termini sono 1, 2, 3, 4, 10, 18, 28, 80, 162 … A parte 3, questa sequenza è composta esclusivamente da numeri pari poiché in ogni prodotto c'è sempre almeno un fattore pari.
Nel già citato sito OEIS vengono riportati anche il Fattoriale quadruplo e quello quintuplo, che si costruiscono alla stesso modo dei precedenti.
Un'altra variante sul tema è il cosiddetto **Superfattoriale**, definito come il prodotto dei primi n fattoriali; in sostanza Sf(n) = n!×(n-1)!×(n-2)!… Ad esempio, Sf(4) vale 1×2×6×24, cioè 288.
Com'è facile immaginare, questa successione produce rapidamente numeri enormi; basta osservare come cresce, anche solo limitandosi ai primi termini: 1, 2, 12, 288, 34.560, *24.883.200*…

1.2 - Numeri Derangement

Capovolgiamo adesso la notazione, passando da n! a !n: quest'ultima, infatti, è la simbologia normalmente usata per indicare i **Numeri Derangement**.
Un *derangement* (o dismutazione) è una permutazione di n oggetti in cui nessuno rimane nell'ordine naturale. Ad esempio, immaginiamo il caso di n persone che entrano in teatro lasciando nel guardaroba i propri n cappelli, i quali, però, vengono sistemati alla rinfusa. Si ha un derangement se all'uscita nessuno riprende il proprio copricapo.[6]
Ovviamente, per n=1, !n vale 0 (si tratta di uno dei rari casi di successione di interi che non comincia per 1); i termini successivi sono 1, 2, 9, 44, 265, 1.854, 14.833 …
Nella sequenza si alternano costantemente numeri pari e numeri dispari.
Vi sono due formule piuttosto semplici per costruire i Numeri Derangement.
La prima, di tipo ricorsivo, è !n = (n-1)×(!(n-1)+!(n-2)); l'altra, ancora più immediata, è [n!/e]. In altre parole, l'n-esimo numero della successione può essere ricavato semplicemente prendendo l'intero più vicino al rapporto tra n! e il numero e.

---

4 Si tratta del cosiddetto "Problema di Brocard", dal nome del matematico francese che pose per primo la questione.
5 Platone ne parla nell'opera "*La Repubblica*" (in greco Πολιτεία, *Politéia*).
6 A volte viene citato come esempio quello della "segretaria pasticciona", che infila N lettere in N buste in maniera tale che nessuna lettera viene spedita all'indirizzo corretto.

La successione fu studiata per la prima volta nel 1708 da Pierre de Montmort; successivamente, se ne occuparono anche Nicholas Bernoulli, appartenente alla ben nota famiglia di matematici, e Leonhard Euler (Eulero), che - oltre a portare contributi fondamentali in tutte le branche della matematica "seria" - ha legato il suo nome anche a moltissime questioni di matematica ricreativa.
In particolare, il grande matematico di Basilea studiò un'applicazione di questi numeri al campo della probabilità con il cosiddetto "*Jeu du rencontre*": due giocatori A e B voltano contemporaneamente una a una le carte di due mazzi uguali; se almeno una volta girano la stessa carta, A vince; se ciò non avviene (cioè si verifica il derangement) vince B. Quali sono le probabilità di vittoria dei due giocatori?
Evidentemente, nel caso di due carte la probabilità è del 50% per ciascun giocatore, mentre con tre carte A vince in un numero di casi pari a 2/3. Questa è la situazione più favorevole al primo giocatore, che comunque mantiene sempre una maggiore probabilità di vittoria secondo la formula

$$P(A)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots\pm\frac{1}{n!}$$

Al crescere di n, tale probabilità tende a 1-1/e, cioè vale all'incirca 0,63; in sostanza, in un gioco come quello analizzato da Eulero, il giocatore A può aspettarsi di vincere circa 63 volte su 100. Vale la pena di sottolineare che se anche le carte da girare fossero 1.000 o 100.000 (anziché 52), tale probabilità resterebbe sostanzialmente invariata.

1.3 - Numeri di Fibonacci

I **Numeri di Fibonacci** prendono il nome dal più importante matematico europeo del '200, Leonardo da Pisa, detto per l'appunto Fibonacci, cioè "figlio di Bonaccio".
Commerciando con il padre, era entrato in contatto con la cultura matematica araba e fu il primo a promuovere il sistema posizionale arabo-indiano,[7] comprendendo i suoi enormi vantaggi rispetto alla numerazione romana ancora in uso in Europa.
L'opera principale di Leonardo da Pisa, il *Liber abaci*, è ricca di contributi matematici, ma il suo nome resta legato a una successione di numeri che compaiono in un indovinello relativo all'accrescimento di una popolazione di conigli,[8] la cui soluzione è data, per l'appunto, da quelli che oggi chiamiamo Numeri di Fibonacci, ossia la successione in cui - partendo dalla coppia 1-1 - ogni termine è dato dalla somma dei due precedenti: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 etc.
Curiosamente, il matematico pisano ma non si soffermò affatto sulle proprietà della "sua" serie, che venne studiata approfonditamente solo nella seconda metà dell'800 dal matematico francese Edouard Lucas:[9] fu proprio lui a darle il nome con cui oggi è universalmente nota.
Per capire quale importanza abbia questa successione nel mondo matematico, basta citare un dato: negli USA si pubblica da ben 50 anni (il primo numero è proprio del 1963) una rivista trimestrale denominata *The Fibonacci Quarterly*, edita dalla Fibonacci Association.
Negli ultimi anni i Numeri di Fibonacci hanno acquistato notorietà anche presso una vastissima platea di non addetti ai lavori, dopo la pubblicazione del best-seller di Dan Brown, *Il codice da Vinci*. Peraltro, molti altri scrittori (e artisti in genere) sono rimasti affascinati da questa successione numerica; ad esempio, il pittore e scultore Mario Merz inserisce spesso i Numeri di Fibonacci nelle sue opere, come emblema della crescita organica e dell'energia insita nella materia.[10]
Ma qual è il motivo del successo di questa sequenza? Probabilmente, esso si deve al contrasto tra la sua estrema semplicità e l'incredibile quantità di applicazioni che ha, in ambiti talora insospettabili.

---

[7] Aggiungiamo che all'epoca la proposta di Fibonacci non ebbe molto successo. Tra le altre cose, si racconta che a Firenze il sistema posizionale fosse stato rifiutato in quanto … sostenuto da un pisano!
[8] Data una coppia di conigli, si suppone che diventi fertile dopo un mese e dia alla luce una nuova coppia dopo un altro mese. Considerando che tutte le nuove coppie si comportino allo stesso modo, quante coppie di conigli ci saranno alla fine di ogni mese? Per maggiori dettagli, si rimanda all'ampia letteratura esistente sui Numeri di Fibonacci.
[9] Tra le altre cose, Lucas si occupò di matematica ricreativa e fu l'inventore del rompicapo noto come "Torre di Hanoi", che diffuse sotto lo pseudonimo di *N. Claus de Siam*, anagramma di *Lucas d'Amiens*.
[10] I primi numeri della successione compaiono, tra l'altro, sull'installazione luminosa "*Il volo dei numeri*", collocata sulla Mole Antonelliana di Torino.

In particolare, i Numeri di Fibonacci compaiono in natura con una frequenza impressionante. Lasciando da parte il già citato indovinello dei conigli, li ritroviamo ovunque nel mondo vegetale: dai fiori (quasi tutti hanno 3 o 5 o 8 o 13 o 21 o … petali) alle file di squame degli ananas, agli elementi conici ripetuti in un cavolfiore.
Per maggiori dettagli, si rimanda all'ampia letteratura esistente sul tema; ci limitiamo in questa sede a citare uno dei casi più stupefacenti, quello dei girasoli.
Le infiorescenze al centro di questo fiore sono disposte lungo due insiemi di spirali che girano in senso orario e antiorario. Di norma vi sono 34 spirali in senso orario e 55 in senso antiorario (oppure 55 e 89); alcune specie giganti hanno rispettivamente 89 e 144 spirali: ebbene, tutti i numeri indicati appartengono alla successione di Fibonacci.
Tornando a un ambito più prettamente matematico, i "Fibonacci" compaiono in problemi come la generazione di numeri casuali o i metodi di approssimazione di massimi e minimi in alcune funzioni particolari, argomenti che non trattiamo in questa sede.


Due esempi della presenza dei Numeri di Fibonacci in natura

Proprietà numeriche e curiosità

Il valore dell'n-esimo numero di Fibonacci si può calcolare direttamente, senza bisogno di conoscere i due precedenti; la formula è: $F_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$,[11] ossia il rapporto, arrotondato all'intero più vicino, tra il numero aureo φ elevato a n e la radice di 5.
Una notevole proprietà della successione riguarda il rapporto tra due termini consecutivi, che tende a $(1+\sqrt{5})/2$, ossia al valore dello stesso φ. In particolare, il rapporto F_n/F_{n-1} dà un numero che è alternativamente maggiore e minore rispetto al numero aureo, ma si avvicina sempre più al limite, al crescere di n.
I Numeri di Fibonacci possono essere pari o dispari, ma osservano sempre una stessa regola: si alternano due dispari e un pari, poi altri due dispari e un pari e così via.
Non si sa se all'interno della successione i primi siano o meno infiniti, ma se un numero di Fibonacci F_k è primo, anche il suo indice k lo è. Non è vero il contrario: ad esempio, F_{19} = 4.181, che non è primo (equivale a 113x37).
A parte 1, l'unico quadrato perfetto è 144, che tra l'altro corrisponde a F_{12}, ossia al dodicesimo numero della serie; si tratta di una coincidenza notevole: il numero, infatti, equivale esattamente al quadrato del proprio indice. L'unico cubo perfetto della successione (1 escluso) è 8.
Infine, ecco alcune proprietà numeriche che legano tra loro due o più Numeri di Fibonacci:
Per qualsiasi n, vale la relazione $F_n^2 = (F_{n-1} \times F_{n+1}) \pm 1$: ad esempio, $8^2=(5\times13)-1$.
Legata alla precedente è anche questa proprietà: dati quattro termini consecutivi A, B, C e D, si verifica che $C^2-B^2=A\times D$. Ad esempio, $13^2-8^2=105$, che equivale a 5×21.

[11] Si tratta di un valore approssimato che deriva dalla cosiddetta "Formula di Binet" (matematico e astronomo francese del primo '800): $\mathbf{F_n = \varphi^n-(-\varphi)^{-n} / \sqrt{5}}$

$F_n^2+F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ (ad esempio, $F_5^2+F_6^2 = F_{11}$, cioè $5^2+8^2 = 89$).
La sommatoria dei primi n termini vale F_{n+2} meno F_2 (cioè 1). Ad esempio, con 7 termini si ha: 1+1+2+3+5+8+13 = 33, pari a F_9-1). Tale regola rimane valida anche se si prendono n numeri consecutivi a partire da un qualsiasi termine della successione.[12]
E tutto questo è solo "un campione" delle innumerevoli proprietà numeriche che possiede la successione di Fibonacci.

1.4 - Numeri di Lucas

Non è difficile immaginare le possibili varianti ai Numeri di Fibonacci: basta partire da una coppia di interi diversa da 1-1 e applicare successivamente la regola additiva per cui ogni termine è pari alla somma dei due che lo precedono.
La scelta più naturale è quella della coppia 1-3 (ovviamente, non va bene la coppia 1-2, poiché in tal caso si ripresenterebbe la successione di Fibonacci "normale"). Operando in tal modo si ottengono i cosiddetti **Numeri di Lucas**, che prendono il nome dal già citato matematico che più di ogni altro si è dedicato a questo tipo di sequenze numeriche.
I primi termini della successione sono 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123 …

Proprietà numeriche e curiosità

Come per i "Fibonacci", si alternano costantemente due numeri dispari e uno pari, e si ignora se i numeri primi siano o meno infiniti.
Il valore dell'n-esimo numero di Lucas si può calcolare direttamente per mezzo di una formula estremamente semplice: $L_n = [\varphi^n]$.
Il limite del rapporto tra numeri consecutivi della sequenza è lo stesso già visto per i "Fibonacci", cioè il numero aureo φ, con valori che sono alternativamente maggiori o minori del limite.[13]
Escluso 1, l'unico numero di Lucas che sia anche un quadrato perfetto è 4, mentre non ci sono cubi perfetti all'interno della successione.
Analogamente a quanto visto per i Numeri di Fibonacci, anche per quelli di Lucas esiste una semplice relazione che collega tre termini consecutivi; la formula è $L_n^2=(L_{n-1}\times L_{n+1})\pm 4$: in sostanza, basta sostituire F_n con L_n e 1 con 4.[14]
Infine, un accenno ad alcune delle molteplici relazioni esistenti tra Numeri di Fibonacci e di Lucas.
Esistono due semplici formule che legano tra di loro i numeri appartenenti alle due sequenze: la prima è $L_n = F_{n-1}+F_{n+1}$; la seconda $F_n\times L_n = F_{2n}$. Vediamo un esempio per ciascuna formula: $L_6=F_5+F_7$ (18=5+13); $F_4\times L_4=F_8$ (3x7=21).
Le due successioni non hanno alcun numero in comune, ad eccezione dei due casi banali 1 e 3.
Il rapporto tra n-esimo "Lucas" e n-esimo "Fibonacci" (L_n/F_n) tende a √5; anche in questo caso i valori sono alternativamente maggiori o minori del limite.

1.5 - Numeri Tribonacci e altre successioni additive

Tra le possibili varianti sul tema delle successioni additive, vale la pena di citare quelli che, per assonanza con la sequenza standard, sono stati denominati **Numeri Tribonacci**[15], ossia i numeri che si costruiscono sommando ogni volta tre termini anziché due.

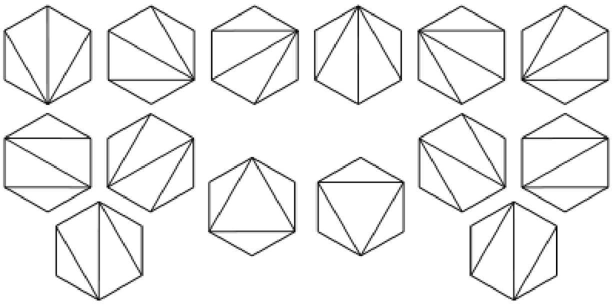
---

12 Questa notevole proprietà è alla base di alcuni "trucchi" matematici, come il seguente: fate scegliere a qualcuno due numeri interi e fategli costruire una sequenza applicando la regola dei Numeri di Fibonacci. Tirate una riga in modo da lasciare due numeri sotto la riga stessa. Ora stupite tutti calcolando "al volo" la somma di tutti i numeri al di sopra della riga: essa è pari all'ultimo numero scritto meno il secondo. Provare per credere!
13 Ciò vale per tutte le "successioni di Fibonacci generalizzate", ossia le sequenza additive che, a partire da una coppia di interi positivi qualunque, si sviluppano secondo le regole viste.
14 Una regola simile, cambiando opportunamente la costante da sommare o da sottrarre, vale per qualsiasi serie additiva.
15 Questo nome si deve a Mark Feinberg, precoce matematico che a soli 14 anni, nel 1963, pubblicò un articolo in proposito sul *Fibonacci Quarterly*. Feinberg morì pochi anni dopo in un incidente stradale.

La successione inizia con i numeri 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 125 … Nella sequenza si alternano costantemente due numeri pari e due dispari.
Un dato interessante è che, al crescere di n, il rapporto TR_{n+1}/TR_n tende alla radice reale compresa tra 1 e 2 del polinomio x^3-x^2-x-1 (1,83929…). Non è un caso; al contrario, una regola simile vale per tutte le successioni additive costruite a partire dalla coppia 1-1, compresa quella di Fibonacci: il numero φ, infatti, non è altro che la radice positiva del polinomio x^2-x-1.
Analogamente, sono stati definiti **Numeri Tetranacci** i numeri pari alla somma dei precedenti quattro interi. Senza approfondire più di tanto, segnaliamo che - com'è facilmente immaginabile da quanto visto in precedenza - il rapporto TE_{n+1}/TE_n tende a un valore (1,92756…) che corrisponde a una radice del polinomio $x^4-x^3-x^2-x-1$.
L'elenco potrebbe continuare con i "Pentanacci", gli "Esanacci" etc., sui quali non ci soffermiamo, rimandando per maggiori dettagli al già citato sito OEIS. Ci limitiamo a far rilevare che - al crescere di n - il rapporto tra due Numeri "N-nacci" consecutivi si avvicina sempre più al valore-limite 2.

1.6 - Numeri di Catalan

Chi non abbia mai sentito parlare di questi numeri, leggendo "Catalan Numbers" nella dizione inglese potrebbe ragionevolmente pensare che essi siano legati in qualche modo alla Catalogna. Niente di tutto ciò: questi numeri non hanno nulla a che fare con Barcellona e dintorni, ma prendono il nome dal matematico belga Eugène Charles Catalan, che li studiò nel XIX secolo.
In realtà, come per i Numeri di Fibonacci, non vi è corrispondenza tra il nome dello scopritore e quello della successione: in questo caso, il primo in Europa[16] a occuparsene fu il "solito" Eulero.
Partendo dalla domanda "In quanti modi diversi si può dividere un poligono convesso in triangoli, tracciando diagonali che non si intersecano?", Eulero scoprì - per l'appunto - la sequenza che stiamo esaminando: la risposta al quesito, infatti, è data dall'n-esimo numero di Catalan, con n equivalente al numero di lati del poligono meno due.
Ad esempio, il numero di modi diversi in cui si può dividere un esagono con le regole sopra descritte è 14, cioè C_4, il quarto numero della successione.

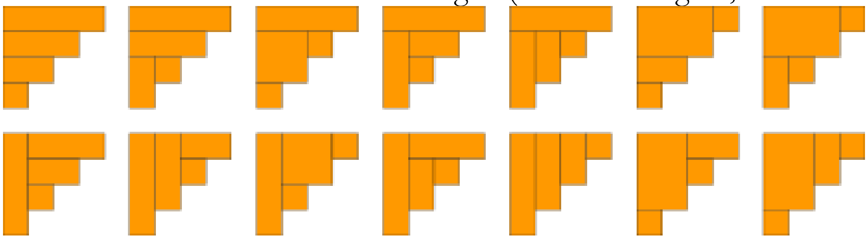


I primi **Numeri di Catalan** sono: 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1.430 …
Eulero elaborò anche una (tutt'altro che semplice) formula generale per calcolare i termini di questa successione: $2\times6\times\ldots(4n-10)/(n-1)!$, con n intero positivo e maggiore di due.
I Numeri di Catalan hanno - come quelli di Fibonacci - la tendenza a comparire inaspettatamente in svariate situazioni, come nell'esempio sopra citato; il loro campo d'applicazione è, però, assai più ristretto, limitandosi sostanzialmente al calcolo combinatorio.
Una interessante proprietà di questi numeri è che sono tutti pari, tranne quelli di posizione 2^n-1 (ossia quelli di posto 1, 3, 7, 15 etc.). In altre parole, si può dire che in questa successione vi sono sequenze sempre più lunghe di numeri pari intervallate da un solo numero dispari.
Tra i molti problemi la cui soluzione è data dai Numeri di Catalan, ne citiamo ancora due; C_n è il numero di modi diversi in cui è possibile:
inserire n coppie di parentesi in un prodotto di n+1 fattori (ecco l'esempio per n=3):

[16] Va specificato "in Europa" poiché questa successione era già stata scoperta e utilizzata alcuni anni prima in Cina (nel 1730) dal matematico e astronomo mongolo Minggatu.

$$\big(((ab)c)d\big) \quad \big((a(bc))d\big) \quad \big((ab)(cd)\big) \quad \big(a((bc)d)\big) \quad \big(a(b(cd))\big)$$

tagliare una forma a scalinata di altezza n con n rettangoli (come nella figura, in cui n vale 4):



Infine, si segnala un collegamento tra i Numeri di Catalan e la teoria dei grafi: C_n è il numero di alberi planari trivalenti (cioè tali che in ogni biforcazione confluiscono esattamente tre linee) e che hanno uno e un solo "tronco" uscente dalla "radice".

1.7 - Numeri di Bell[17]

Molto simili ai Numeri di Catalan, ma da non confondere con essi, sono i **Numeri di Bell**, definiti come le possibili partizioni di un insieme di n elementi, cioè il numero di modi in cui questo insieme può essere ottenuto come unione disgiunta di suoi sottoinsiemi non vuoti.
Un esempio può chiarire meglio il concetto: $B_3 = 5$ in quanto per un insieme di tre elementi {a,b,c} esistono cinque differenti modi di dividerlo in sottoinsiemi non vuoti:

{a},{b},{c} / {a,b},{c} / {a,c},{b} / {a},{b,c} / {a,b,c}.

La successione comincia con i seguenti numeri: 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4.140 …
Esiste sia una formula di tipo ricorsivo, sia una che permette di calcolare direttamente l'n-esimo numero di Bell, ma sono entrambe alquanto complicate. C'è, invece, un modo molto semplice per costruire questa sequenza, utilizzando il cosiddetto "Triangolo di Bell" (o "Matrice di Aitken").
Tale triangolo si può ricavare con un procedimento più complicato da spiegare che da mettere in pratica. Si scrive 1 nella prima riga. La seconda riga inizia con l'ultimo numero della riga precedente, poi si aggiunge come secondo numero la somma tra il numero precedente e quello posizionato al di sopra:

1
1 2 (1+1)

La terza riga inizia con l'ultimo numero della seconda; poi si scrive il numero ottenuto sommando il numero precedente con il numero che gli sta sopra e si ripete 2 volte lo stessa operazione:

1
1 2
2 3 (2+1) 5 (3+2)

Continuando allo stesso modo si ottiene il triangolo che segue: gli ultimi numeri di ogni riga costituiscono, per l'appunto, la successione di Bell.

1
1 **2**
2 3 **5**
5 7 10 **15**
15 20 27 37 **52**
52 67 87 114 151 **203**

Una notevole applicazione dei Numeri di Bell è la seguente: data una poesia di n versi, essi indicano il numero dei possibili schemi differenti di rima. Ad esempio, una quartina offre 15 possibilità: aaaa, aaab, aaba, abaa, baaa, aabb, abab, abba, aabc, abac, abca, abbc, abcb, abcc, abcd.

---

[17] Il nome deriva da quello del matematico e scrittore scozzese del primo '900 Eric Temple Bell.

"Salendo" nel numero di versi, le possibili rime differenti aumentano in maniera vertiginosa: ad esempio, nel caso di un poema di 14 versi (la misura del sonetto, la forma poetica più classica della nostra tradizione letteraria) esistono B_{14} schemi diversi di rima, un numero pari a 190.899.322!

2 - FAMIGLIE DI NUMERI INTERI

In questa seconda parte passiamo ad esaminare alcune "famiglie" per le quali - a differenza delle successioni viste finora - non esiste una formula specifica che permette di calcolare i numeri che ne fanno parte.
Va precisato che questo elenco è lungi dall'essere completo, poiché esistono innumerevoli altre famiglie, che - come quelle della tabella - prendono il nome dal loro scopritore oppure sono state ribattezzate con aggettivi più o meno fantasiosi.[18] In rete si possono trovare facilmente maggiori dettagli in proposito.
Per ovvie ragioni, nel presente testo saranno esaminate solo alcune delle famiglie indicate nella tabella.

Nome	Descrizione	Esempio	Primi numeri del gruppo
Semiprimi	Prodotto di due primi (anche coincidenti)	26 (2x13)	4-6-9-10-14-15-21-22-25
Primi "Oddest"	Primi con tutte le cifre dispari	37	3-5-7-11-13-17-19-31-37
Primi "Imirp"	Invertendo le cifre danno un altro primo	149	13-17-31-37-71-73-79
Difettivi	Maggiori della somma dei loro divisori	22 (> 1+11)	2-3-5-6-7-8-9-10-11-13
Lievemente difettivi	La Σ dei propri divisori vale n-1	tutte le potenze di 2	2-4-8-16-32-64-128-256
Abbondanti	Minori della somma dei loro divisori	12 (< 1+2+3+4+6)	12-18-20-24-30-36-40
Altamente composti	Hanno più fattori di ogni intero minore	24	2-4-6-12-24-36-48-60
Perfetti	Uguali alla Σ dei propri divisori	28	6-28-496-8.128
Quasi perfetti	Uguali alla Σ dei propri divisori, 1 escluso		??? (non ancora trovati)
Potenti (Powerful)	Divisibili per un primo p e per p^2	27	1-4-8-9-16-25-27-32-36
di Achille	Potenti che non sono potenze perfette	72 (3^2x2^3)	72-108-200-288-392-432
Ciclici	Moltiplicati per 1,2… danno le stesse cifre in ordine ciclico	142.857	142.857
Automorfi	Le potenze terminano tutte con n	76^2=5.776	0-1-5-6-25-76-376-625-9.376
di Armstrong	Pari alla Σ delle k cifre elevate a k	153 ($1^3+5^3+3^3$)	1-2-3…9-153-370-371
Conservativi	Dividono esattamente il proprio inverso	8.712 / 2.178=4	8.712-9.801-87.912-98.901
Dattaraya	Il quadrato si può separare in quadrati	13^2=169 (16,9)	7,10,13,20,30,1.602
di Kaprekar	Il quadrato si separa in numeri la cui Σ è n	45^2=2.025; 20+25=45	1-9-45-55-99-297-703

[18] Citiamo, a titolo di esempio, le seguenti famiglie: Numeri di Genocchi, Numeri di Leonardo, Numeri di Keith, Numeri Fortunati, Numeri Felici, Numeri Intoccabili. Come si vede, ce n'è per tutti i gusti!

2.1 - Numeri Perfetti[19]

I **Numeri Perfetti** sono numeri equivalenti alla somma dei propri divisori (compreso 1, ma non - ovviamente - il numero stesso).
Questi numeri furono studiati sin dall'antichità: un teorema enunciato da Pitagora e dimostrato poi da Euclide afferma che se 2^n-1 è un numero primo, allora $m=2^{n-1}\times(2^n-1)$ è un numero perfetto. Successivamente, Eulero dimostrò che tutti i Numeri Perfetti pari devono avere tale forma.
Ma i numeri esprimibili come 2^n-1 con n primo sono i ben noti **Numeri primi di Mersenne**[20], per cui si può dire che ciascuno di essi dà sicuramente origine a un numero perfetto. Al momento, si conoscono 48 primi di Mersenne (l'ultimo è $2^{57.885.161}$-1) e, di conseguenza, 48 Numeri Perfetti; il più grande tra questi è un "mostro" composto da quasi 35 milioni di cifre.
Tra le altre proprietà dei Numeri Perfetti, si può ricordare che essi sono anche triangolari, visto che si possono scrivere nella forma k(k+1)/2, che è - per l'appunto - la formula generale per trovare il k-esimo numero triangolare.
Inoltre, è facile dimostrare che tutti i numeri perfetti pari terminano necessariamente per 6 o per 8; poiché dalla formula stessa si ricava che:
2^{n-1} è pari e termina con le cifre 2, 4, 8, 6 (trascuriamo il caso banale n=1);
2^n-1 è dispari e termina rispettivamente per 3, 7, 5, 1 (ma 5 va scartato poiché cadrebbe l'ipotesi di primalità);
le coppie rimanenti, 2-3, 4-7 e 6-1, danno come prodotto rispettivamente 6, 8 e 6.
Restano tuttora aperte due questioni relative ai numeri perfetti:
I Numeri Perfetti sono infiniti?
Esistono Numeri Perfetti dispari?
Sulla base dei risultati trovati finora, effettuando le ricerche per numeri di dimensioni sempre più grandi, si ipotizzano rispettivamente un sì e un no alle due domande (cioè, i Numeri Perfetti sarebbero infiniti e non ne esisterebbero di dispari), ma nessuna delle due congetture è stata ancora dimostrata.

2.2 - Numeri Potenti e Numeri di Achille

I **Numeri Potenti** (o Powerful) sono interi positivi tali che se sono divisibili per un numero primo p, lo sono anche per p^2. Una definizione equivalente - e assai più semplice - è la seguente: un numero potente è il prodotto di un quadrato per un cubo, ovvero ha la forma $a^2\times b^3$, dove a e b sono interi positivi (eventualmente uguali a 1).
Ovviamente, tutte le potenze, di qualsiasi ordine, possono essere espresse nella forma suddetta, per cui rientrano automaticamente nella famiglia dei Numeri Potenti: ad esempio, $a^7=(a^2)^2\times a^3$ oppure $a^{10}=(a^5)^2\times 1^3$.
Per questi motivi risulta, indubbiamente, più interessante un sottoinsieme dei "Potenti", quello costituito dai numeri che rispettano la regola generale ma non costituiscono una potenza perfetta: si tratta dei cosiddetti **Numeri di Achille**.[21]
E' facile dedurre che questi numeri si possono costruire moltiplicando tra loro un quadrato (m^2) e un cubo (n^3) purché m ed n siano primi tra loro; i tre numeri più piccoli di questa famiglia sono 72 ($2^3\times3^2$), 108 ($2^2\times3^3$) e 200 ($5^2\times2^3$).
Infine, una curiosità. Per trovare la più piccola coppia di interi consecutivi che sono anche Numeri di Achille bisogna salire oltre il miliardo: i due numeri sono rispettivamente 5.425.069.447 (pari a $7^3\times41^2\times97^2$) e 5.425.069.448 ($2^3\times26.041^2$).

[19] I numeri Difettivi, Abbondanti, Altamente composti e Perfetti sono stati trattati in un altro articolo pubblicato in questo stesso sito (*Funzioni sui numeri interi,* 2011); in questa sede si riprendono - molto brevemente - solo i numeri perfetti, che sono anche i più significativi del gruppo.
[20] Dal nome del frate francese Marin Mersenne, che li studiò nel XVII secolo.
[21] Il curioso nome di questi numeri deriva, per l'appunto, da quello dell'eroe omerico, che era un guerriero potente ma "imperfetto", a causa del suo proverbiale tallone.

2.3 - Numeri Ciclici

I **Numeri Ciclici** sono interi di n cifre con una particolare proprietà: se li si moltiplica per ogni valore da 1 a n, il prodotto è composto esattamente dalle stesse cifre del numero originale e queste si succedono nel medesimo ordine.
Il concetto è più chiaro con un esempio. Il più piccolo numero ciclico è 142.857, che moltiplicato per 2, 3…6 dà 285.714, 428.571 … 857.142. Un'altra curiosa proprietà è che se si moltiplica il numero per n+1, si ottiene una serie di tutti "9": 142.857×7 = 999.999.
La "magia" del numero 142.857 è nota da secoli, e i matematici di diverse epoche hanno cercato di dare risposta alla domanda: "Esistono altri numeri con le medesime caratteristiche?"
La risposta è affermativa.
All'inizio del secolo scorso, Leonard Dickson[22] mise in evidenza che tutti i Numeri Ciclici costituiscono il periodo delle cifre decimali derivanti dai reciproci di alcuni numeri primi. In generale, vale la regola seguente: se 1/p (con p intero e primo) produce una sequenza di cifre decimali con un periodo di p-1 cifre, allora tale periodo costituisce un numero ciclico.
Ad esempio, 142.857, numero di 6 cifre, è esattamente il periodo di 1/7 (1/7 = 0,142857142857…).
Il successivo numero primo che produce un numero ciclico è 17. Il rapporto tra 1 e 17, infatti, dà il risultato 0,05882352941176470588235294117647… che ha come periodo un numero di 16 cifre, 0588235294117647. Basta provare a moltiplicare tale numero per 2, 3…16 per fare la verifica.
E' evidente che - a parte 142.857 - qualsiasi numero ciclico deve cominciare con uno o più zeri: in particolare, all'inizio ci sarà uno zero se il numero primo generatore è di due cifre, ci saranno due zeri se il generatore ha tre cifre e così via.
I primi inferiori a 100 che producono Numeri Ciclici sono nove: 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97.
Non si conosce alcuna formula che consenta di identificare i generatori di un numero ciclico; egualmente, non è ancora stato accertato se esistono o meno infiniti Numeri Ciclici.
Tale ipotesi, comunque, appare molto probabile: da calcoli che ormai si sono estesi fino a numeri di dimensioni gigantesche, infatti, si è verificato che la percentuale di primi generatori tende a mantenersi costante, intorno al valore di 3/8. In altre parole, ci si può attendere che esaminando 8.000, 80.000, 800.000 numeri primi consecutivi se ne trovino all'incirca 3.000, 30.000, 300.000 che soddisfano alle regole necessarie per produrre un numero ciclico.
I Numeri Ciclici hanno altre curiose proprietà; in particolare, si possono sempre ottenere con infinite addizioni successive. Ad esempio, il numero 142.857 può essere ricavato semplicemente sommando i successivi multipli di 14 in questo modo:

```
1 4
    2 8
        5 6
          1 1 2
              2 2 4
                  4 4 8
                      . . . .
--------------------------------
1 4 2 8 5 7 1 4 2 8 5 7 . . . .
```

Utilizzando altri coefficienti, si possono ricavare allo stesso modo gli altri Numeri Ciclici.
Infine, riportiamo una notevole proprietà del numero ciclico generato da 1/19.
Scrivendo in forma di matrice quadrata 18x18 le cifre dei successivi rapporti 1/19, 2/19 … 18/19, si ottiene un quadrato magico in cui è costante non soltanto la somma su righe e colonne (ciò è vero per qualsiasi primo generatore di un numero ciclico), ma anche sulle due diagonali principali. Tale costante "magica" vale 81.

[22] L. Dickson, History of the theory of Numbers, 1919.

2.4 - Numeri Automorfi

Un numero intero si definisce automorfo se tutte le sue potenze presentano nella parte finale il numero stesso. Ad esempio, 25 fa parte di questa famiglia, in quanto le sue successive potenze - 625, 15.625, 390.625 etc. - terminano per "25".
Basta un'occhiata alle vecchie tabelline delle scuole elementari per rendersi conto che solo i numeri che finiscono per 0, 1, 5 o 6 possono rientrare in questo gruppo, ma approfondendo un minimo l'analisi, si possono escludere le prime due tipologie (a parte i casi banali n=0 e n=1). Inoltre, una volta raggiunta la "doppia cifra", tutti i Numeri Automorfi devono terminare necessariamente per 25 o per 76.
I **Numeri Automorfi** fino all'ordine dei miliardi si possono costruire con un procedimento estremamente semplice, utilizzando la sequenza "magica" 8212890625. Basta prendere le ultime n cifre della sequenza e calcolare il complemento di tale numero alla successiva potenza di 10 aumentata di 1: entrambi i numeri trovati sono automorfi. Ad esempio, prendendo le ultime 3 cifre della serie, si ottengono 625 e 376; prendendo le ultime 5 cifre si ricavano 90.625 e 9.376 etc.
Va aggiunto che la sequenza sopra indicata costituisce soltanto la parte terminale di una stringa numerica che si può prolungare indefinitamente ottenendo, con lo stesso procedimento, numeri sempre più grandi.
Dunque, esistono infinite coppie di Numeri Automorfi, ognuna delle quali dà come somma una potenza di 10 aumentata di 1: 1 (0+1), 11(5+6), 101 (25+76), 1.001 (376+625) etc.

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

Conway J.H., Guy R.K., *The Book of Numbers,* Springer-Verlag, 1996
Devlin K., *I numeri magici di Fibonacci*, Rizzoli, 2012
Du Sautoy M., *L'enigma dei numeri primi*, BUR, 2005
Gardner M., *Enigmi e giochi matematici 1-5*, SuperBUR, 2001
Gardner M., *Mathematical magic show,* Penguin Mathematics, 1986
Gardner M., *Time travel and other mathematical bewilderments*, Freeman & Company, 1988
Gardner M., *Mathematical Circus*, Penguin Books, 1990
Jones G.A., Jones J.M., *Elementary Number Theory*, Springer, 2005

Sito OEIS (On-line Encyclopedia of Integer Sequences): https://oeis.org/
Sito Politecnico di Torino: www.polito.it