189. Esponenziale di matrici

Emilio Novati
emilionovati@libero.it

1 Introduzione

É ben noto che nei campi numerici $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ la funzione esponenziale $\exp(x) = e^x$ verifica l'equazione funzionale esponenziale $e^{x+y} = e^x e^y$. Tale uguaglianza non è però in generale vera quando la funzione esponenziale viene definita su un'algebra non commutativa, come un'algebra di matrici.
In tal caso sappiamo che l'equazione funzionale è verificata se le due matrici esponenti commutano:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} \ \Rightarrow \ e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}$$

ma l'implicazione contraria non è sempre vera e per due matrici che non commutano può valere una qualunque delle relazioni:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} &= e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}} \\ e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} &\neq e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}} \\ e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} &= e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}} \\ e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} &\neq e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}} \end{aligned}$$

Diversi lavori hanno cercato di caratterizzare le matrici che non commutano ma che verificano comunque l'equazione funzionale esponenziale. In particolare il problema è stato studiato negli anni '50 per matrici di dimensione due e tre [1] [2] e ripreso anche di recente in [3].

Il caso più semplice è quello delle matrici in $M(2,\mathbb{R})$, risolto in [2] nell'ambito più generale delle algebre complesse di grado due. In queste note viene proposta una semplice trattazione didattica su come caratterizzarele le matrici di $M(2,\mathbb{R})$ per cui si ha:

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}} \tag{1}$$

e si mostra che non esistono matrici per cui si ha:

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}} \neq e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$$

1.1 Definizioni e notazioni

L'insieme delle matrici reali 2×2, $M(2,\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni di somma di matrici e di moltiplicazione per un numero reale, è un'algebra non commutativa rispetto a tali operazioni e all'usuale prodotto di matrici, ed è uno spazio metrico completo rispetto alla norma:

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{|x|=1} |\mathbf{A}x|$$

Nel seguito considereremo matrici in $M(2,\mathbb{R})$.
Una matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile (o non singolare) se e solo se $\det\mathbf{A} = ad - bc \neq 0$ e la sua inversa è data da:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

L'insieme delle matrici invertibili, indicato con $GL(2,\mathbb{R})$ è un gruppo non commutativo rispetto all'operazione di prodotto di matrici, il cui elemento neutro è la matrice:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La traccia di una matrice è la somma dei suoi elementi sulla diagonale principale.

$$\mathrm{tr}\mathbf{A} = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$$

Il commutatore di due matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ è la matrice definita da:

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$$

Se $[\mathbf{A},\mathbf{B}] \neq 0$ allora $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{I}$ sono linearmente indipendenti.
Il centro $\mathcal{C}(2,\mathbb{R})$ di $M(2,\mathbb{R})$ è l'insieme delle matrici $\mathbf{X} \in M(2,\mathbb{R})$ che commutano con tutte le matrici di $M(2,\mathbb{R})$:

$$\mathcal{C}(2,\mathbb{R}) = \{\mathbf{X} : \ [\mathbf{A},\mathbf{X}] = 0\,, \forall \mathbf{A} \in M(2,\mathbb{R})\}$$

ed è il sottogruppo di $GL(2,\mathbb{R})$ costituito dalle matrici scalari: $\mathbf{X} = x\mathbf{I}$ con $x \in \mathbb{R}$. $\mathcal{C}(2,\mathbb{R})$ è un gruppo di Lie ed è ovviamente isomorfo a $\mathbb{R}^*$. Il segno di $\mathbf{X} \in \mathcal{C}(2,\mathbb{R})$ è il segno di $x \in \mathbb{R}$.

2 L'esponenziale di una matrice

L'esponenziale di una matrice è definito da:

$$\exp(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \tag{2}$$

La serie formale è assolutamente convergente e definisce in $\mathbb{C}$ una funzione intera, quindi è convergente nello spazio metrico $M(2,\mathbb{R})$.
Poiché il prodotto di matrici in $M(2,\mathbb{R})$ non è commutativo, la funzione esponenziale così definita non soddisfa, in generale, l'equazione funzionale (1). Valgono però le seguenti proprietà che utilizzeremo nel seguito:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}}e^{-\mathbf{A}} &= e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I} \\ \mathrm{Det}\mathbf{A} \neq 0 \Rightarrow \ e^{\mathbf{ABA}^{-1}} &= \mathbf{A}e^{\mathbf{B}}\mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \ \Rightarrow e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} &= e^{\mathbf{B}t}e^{\mathbf{A}t} = e^{(\mathbf{B}+\mathbf{A})t} \quad \forall t \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Per una dimostrazione di queste proprietà si veda ad esempio [5]

2.1 Calcolo dell'esponenziale

Il calcolo della matrice esponenziale in un'algebra $M(n,\mathbb{K})$ diventa rapidamente molto complesso al crescere di n. Ci sono comunque delle procedure che permettono sempre di effettuare tale calcolo in un numero finito di passi, almeno in linea di principio [6].
Nel caso di matrici in $M(2,\mathbb{R})$ il calcolo dell'esponenziale è abbastanza semplice grazie alla seguente scomposizione.

Lemma 2.1. Ogni matrice $\mathbf{A} \in M(2,\mathbb{R})$ si può scomporre in una somma di due matrici di cui una sta nel centro $\mathcal{C}(2,\mathbb{R})$ e l'altra ha traccia nulla:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = k\mathbf{I} + \mathbf{A}' = k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & b \\ c & -m \end{pmatrix}$$

e, per due matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in M(2,\mathbb{R})$, si ha:

$$[\mathbf{A}',\mathbf{B}'] = 0 \iff [\mathbf{A},\mathbf{B}] = 0$$

Dimostrazione. La scomposizione è ovvia, basta porre:

$$k = \frac{a+d}{2} = \frac{\mathrm{tr}\mathbf{A}}{2} \qquad m = \frac{a-d}{2}$$

per cui:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{A})}{2}\mathbf{I}$$

e quindi si ha:

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}',\mathbf{B}'] &= \left[\mathbf{A} - \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{A})}{2}\,\mathbf{I}, \mathbf{B} - \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{B})}{2}\,\mathbf{I}\right] = \\ &= [\mathbf{A},\mathbf{B}] - \left[\mathbf{A}, \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{B})}{2}\mathbf{I}\right] - \left[\frac{\mathrm{tr}(\mathbf{A})}{2}\mathbf{I}, \mathbf{B}\right] + \left[\frac{\mathrm{tr}(\mathbf{A})}{2}\mathbf{I}, \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{B})}{2}\mathbf{I}\right] = [\mathbf{A},\mathbf{B}]\end{aligned}$$

dato che $\dfrac{\mathrm{tr}(\mathbf{A})}{2}\,\mathbf{I}\,,\ \dfrac{\mathrm{tr}(\mathbf{B})}{2}\,\mathbf{I} \in \mathcal{C}(2,\mathbb{R})$ □

Per le matrici a traccia nulla la serie che definisce la funzione esponenziale risulta particolarmente semplice da calcolare, come si vede dal seguente lemma.

Lemma 2.2. Se $\mathbf{M}$ è una matrice a traccia nulla, posto $\theta = \sqrt{\det \mathbf{M}}$ si ha:

$$e^{\mathbf{M}} = \mathbf{I}\cos\theta + \mathbf{M}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

Dimostrazione. Cominciamo col notare che per una matrice a traccia nulla:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & b \\ c & -m \end{pmatrix}$$

si ha:

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} m & b \\ c & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & b \\ c & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2+bc & 0 \\ 0 & bc+m^2 \end{pmatrix} = -\det(\mathbf{M})\mathbf{I}$$

quindi, posto $\theta = \sqrt{\det(\mathbf{M})}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{M}} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{M}^k}{k!} = \\ &= \mathbf{I} + \frac{\mathbf{M}}{1!} - \frac{\theta^2\mathbf{I}}{2!} - \frac{\theta^3\mathbf{M}}{3!\,\theta} + \frac{\theta^4\mathbf{I}}{4!} + \frac{\theta^5\mathbf{M}}{5!\,\theta} - \frac{\theta^6\mathbf{I}}{6!} + \cdots = \\ &= \mathbf{I}\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!}\cdots\right) + \frac{\mathbf{M}}{\theta}\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}\cdots\right) = \\ &= \mathbf{I}\cos\theta + \frac{\mathbf{M}}{\theta}\sin\theta \end{aligned}$$

□

Possiamo quindi calcolare l'esponenziale di una matrice di $M(2, \mathbb{R})$ utilizzando il seguente teorema.

Teorema 2.1. Per ogni matrice $\mathbf{A} \in M(2, \mathbb{R})$ si ha:

$$e^{\mathbf{A}} = e^{k\mathbf{I}+\mathbf{A}'} = e^{k\mathbf{I}} e^{\mathbf{A}'} = e^{k} \left(\mathbf{I} \cos\alpha + \mathbf{A}' \frac{\sin\alpha}{\alpha} \right)$$

Con $k = \dfrac{\mathrm{tr}\mathbf{A}}{2}$, $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - k\mathbf{I}$, $\alpha = \sqrt{\det \mathbf{A}'}$.

Dimostrazione. Utilizzando la scomposizione del Lemma 2.1 e notando che $[k\mathbf{I}, \mathbf{A}'] = 0$, si ha:

$$e^{\mathbf{A}} = e^{k\mathbf{I}+\mathbf{A}'} = e^{k\mathbf{I}} e^{\mathbf{A}'} = e^{\mathbf{A}'} e^{k\mathbf{I}}$$

e per il Lemma 2.2 si ottiene l'asserto.

□

Nota

Si noti che il risultato di questo teorema è valido anche se $\det \mathbf{A}' \leq 0$.
Se $\det \mathbf{A}' = 0$, quindi $\alpha = 0$, basta porre $\dfrac{\sin 0}{0} = 1$ e in tal caso si ha: $e^{\mathbf{A}} = e^{k}(\mathbf{I} + \mathbf{A}')$.
Se $\det \mathbf{A}' < 0$, quindi $\alpha = \pm i|\alpha| = \pm i\sqrt{|\det \mathbf{A}'|}$, si prende, come nel caso reale, la radice con segno $+$ e si utilizzano le relazioni tra funzioni circolari e funzioni iperboliche ottenendo:

$$\frac{\sin(i|\alpha|)}{i|\alpha|} = \frac{i \sinh|\alpha|}{i|\alpha|} = \frac{e^{|\alpha|} - e^{-|\alpha|}}{2|\alpha|} \qquad \cos(i|\alpha|) = \cosh|\alpha| = \frac{e^{|\alpha|} + e^{-|\alpha|}}{2}$$

Si dimostra facilmente che se $\mathbf{A} \in \mathcal{C}(2, \mathbb{R})$ allora $e^{\mathbf{A}} \in \mathcal{C}(2, \mathbb{R})$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} e^{a} & 0 \\ 0 & e^{a} \end{pmatrix}$$

ma l'implicazione contraria non è in generale vera, come si vede dal lemma seguente.

Lemma 2.3. Data una matrice non nulla: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $e^{\mathbf{A}} \in \mathcal{C}(2, \mathbb{R})$ se e solo se:
$\mathbf{A} \in \mathcal{C}(2, \mathbb{R})$ oppure $\det\mathbf{A}' = \det\mathbf{A} - \left(\dfrac{\mathrm{tr}\mathbf{A}}{2}\right)^2 = \mu^2\pi^2$ con $\mu \in \mathbb{N}^{+}$

Dimostrazione. Se $e^{\mathbf{A}} \in \mathcal{C}(2, \mathbb{R})$ deve essere:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}} &= e^{k} \left(\mathbf{I} \cos\alpha + \mathbf{A}' \frac{\sin\alpha}{\alpha} \right) = \\ &= e^{k} \begin{pmatrix} \cos\alpha + \dfrac{m \sin\alpha}{\alpha} & \dfrac{b \sin\alpha}{\alpha} \\ \dfrac{c \sin\alpha}{\alpha} & \cos\alpha - \dfrac{m \sin\alpha}{\alpha} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

quindi uguagliando i termini sulla diagonale secondaria si ha:

$$\frac{b\sin\alpha}{\alpha}=0 \;\Rightarrow\; b=0 \vee \frac{\sin\alpha}{\alpha}=0$$
$$\frac{c\sin\alpha}{\alpha}=0 \;\Rightarrow\; c=0 \vee \frac{\sin\alpha}{\alpha}=0$$

e sottraendo i termini sulla diagonale principale si ha:

$$2\,\frac{m\sin\alpha}{\alpha}=0 \;\Rightarrow\; m=0 \vee \frac{\sin\alpha}{\alpha}=0$$

Se $b=c=m=0$ la matrice $\mathbf{A}'$ è nulla e quindi $\mathbf{A}\in\mathcal{C}(2,\mathbb{R})$.
Altrimenti si deve avere:

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}=0$$

e si hanno tre casi possibili:

$$\begin{aligned}
\det\mathbf{A}'=0 &\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\alpha}=1\\
\det\mathbf{A}'<0 &\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\alpha}=\frac{\sin i|\alpha|}{i|\alpha|}=\frac{\sinh|\alpha|}{|\alpha|}>0\ \forall|\alpha|>0\\
\det\mathbf{A}'>0 &\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\alpha}=0\Rightarrow \alpha=\mu\pi \text{ con } \mu\in\mathbb{N}^+
\end{aligned}$$

ed essendo $\det\mathbf{A}'=\alpha^2$ si ha l'asserto.

□

3 Verifica dell'equazione funzionale

Cominciamo con il trovare le condizioni necessarie e sufficienti affinché gli esponenziali di due matrici commutino. Sappiamo che questo è vero se le due matrici commutano, quindi siamo interessati solo a matrici tali che $[\mathbf{A},\mathbf{B}]\neq 0$ e ovviamente una condizione sufficiente è che almeno uno dei due esponenziali sta nel centro $\mathcal{C}(2,\mathbb{R})$. Nel caso di matrici in $M(2,\mathbb{R})$ questa condizione è anche necessaria.

Teorema 3.1. Date due matrici $\mathbf{A},\mathbf{B}\in M(2,\mathbb{R})$ tali che $[\mathbf{A},\mathbf{B}]\neq 0$, $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}=e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}$ se e solo se $e^{\mathbf{A}}\in\mathcal{C}(2,\mathbb{R})$ oppure $e^{\mathbf{B}}\in\mathcal{C}(2,\mathbb{R})$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare solo l'implicazione $\{e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}=e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}\}\Rightarrow\{e^{\mathbf{A}}\in\mathcal{C}(2,\mathbb{R})\vee e^{\mathbf{B}}\in\mathcal{C}(2,\mathbb{R})\}$. Utilizzando i Lemmi 2.1 e 2.2 si ha:

$$e^{\mathbf{A}}=e^{k}\left(\mathbf{I}\cos\alpha+\mathbf{A}'\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\qquad e^{\mathbf{B}}=e^{h}\left(\mathbf{I}\cos\beta+\mathbf{B}'\frac{\sin\beta}{\beta}\right)$$

Calcolando il commutatore e notando che $\mathbf{I}\cos\alpha$ e $\mathbf{I}\cos\beta$ sono elementi di $\mathcal{C}(2,\mathbb{R})$ si ha quindi:

$$\begin{aligned}
[e^{\mathbf{A}},e^{\mathbf{B}}]&=e^{k+h}\left[\mathbf{I}\cos\alpha+\mathbf{A}'\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,,\;\mathbf{I}\cos\beta+\mathbf{B}'\frac{\sin\beta}{\beta}\right]=\\
&=e^{k+h}\,\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\alpha\beta}[\mathbf{A}',\mathbf{B}']
\end{aligned}$$

e siccome $[\mathbf{A}',\mathbf{B}']=[\mathbf{A},\mathbf{B}]\neq 0$, gli esponenziali commutano solo se $\sin\alpha\sin\beta=0$ con $\alpha\,,\,\beta\neq 0$ e quindi $\alpha=\mu\pi$ oppure $\beta=\phi\pi$ con $\mu,\phi\in\mathbb{N}^+$.

□

Il fatto che gli esponenziali commutino non implica che valga l'equazione funzionale (1), anche nel caso che sia $e^{\mathbf{A}}$ che $e^{\mathbf{B}}$ stiano nel centro $\mathcal{C}(2,\mathbb{R})$.
Si considerino ad esempio due matrici del tipo:

$$\mathbf{A} = \pi \begin{pmatrix} a & -\mu \\ \mu & a \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \pi \begin{pmatrix} b+\phi c & -\phi^2 - c^2 \\ \phi^2 & b - \phi c \end{pmatrix}$$

Se $\mu \in \mathbb{N}^+$ allora $e^{\mathbf{A}} = (-1)^{\mu} e^{a\pi}\mathbf{I}$ e se $\phi \in \mathbb{N}^+$ allora $e^{\mathbf{B}} = (-1)^{\phi} e^{b\pi}\mathbf{I}$, quindi:

$$e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = (-1)^{\mu+\phi} e^{(a+b)\pi}\mathbf{I}$$

ma si ha $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$ solo se:

$$c^2 = \frac{\nu^2 - (\mu + \phi^2)^2}{\mu}$$

con ν intero della stessa parità di $\mu + \phi$.

Le condizioni per cui l'equazione funzionale (1) è verificata sono date dal seguente teorema.

Teorema 3.2. Date due matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B} \in M(2,\mathbb{R})$, $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}}$ se e solo se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ commutano oppure $e^{\mathbf{A}}$, $e^{\mathbf{B}}$, $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$ stanno nel centro $\mathcal{C}(2,\mathbb{R})$ e il segno di $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$ è uguale al segno di $e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare solo il caso in cui $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ non commutano.
Nel caso che $\alpha = \mu\pi$ con $\mu \in \mathbb{R}^+$ sappiamo che $e^{\mathbf{A}}$ e $e^{\mathbf{B}}$ commuatno. Cerchiamo le condizioni per cui si ha anche $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$.

Poniamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = k\mathbf{I} + \mathbf{A}' \qquad \text{con}: \qquad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} m & b \\ c & -m \end{pmatrix} \quad k = \frac{a+d}{2} \quad m = \frac{a-d}{2}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = h\mathbf{I} + \mathbf{B}' \qquad \text{con}: \qquad \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} n & y \\ z & -n \end{pmatrix} \quad h = \frac{x+t}{2} \quad n = \frac{x-t}{2}$$

Si ha quindi:

$$e^{\mathbf{A}} = e^{k} \left(\mathbf{I}\cos\alpha + \mathbf{A}' \frac{\sin\alpha}{\alpha} \right) \qquad \text{con}: \qquad \alpha = \sqrt{\det(\mathbf{A}')} = \sqrt{-m^2 - bc}$$

$$e^{\mathbf{B}} = e^{h} \left(\mathbf{I}\cos\beta + \mathbf{B}' \frac{\sin\beta}{\beta} \right) \qquad \text{con}: \qquad \beta = \sqrt{\det(\mathbf{B}')} = \sqrt{-n^2 - yz}$$

da cui si ottiene:

$$e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{k+h} \left(\mathbf{I}\cos\alpha\cos\beta + \mathbf{B}' \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\beta} + \mathbf{A}' \frac{\cos\beta\sin\alpha}{\alpha} + \mathbf{A}'\mathbf{B}' \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\alpha\beta} \right) \tag{3}$$

e posto $\alpha = \mu\pi$ si ha $e^{\mathbf{A}} = (-1)^{\mu} e^{k}\mathbf{I}$ e la (3) diventa:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} &= e^{k+h}(-1)^{\mu}\left(\mathbf{I}\cos\beta + \mathbf{B}'\frac{\sin\beta}{\beta}\right) = \\ &= e^{k+h}(-1)^{\mu}\left[\cos\beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin\beta}{\beta}\begin{pmatrix} n & y \\ z & -n \end{pmatrix}\right] = \\ &= e^{h+k}(-1)^{\mu}\begin{pmatrix} \cos\beta + \dfrac{n\sin\beta}{\beta} & \dfrac{y\sin\beta}{\beta} \\ \dfrac{z\sin\beta}{\beta} & \cos\beta - \dfrac{n\sin\beta}{\beta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'altra parte si ha:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix} = (h+k)\mathbf{I} + \mathbf{C}'$$

con:

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} m+n & b+y \\ c+z & -(m+n) \end{pmatrix} = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$$

e posto:

$$\gamma = \sqrt{\det(\mathbf{C}')} = \sqrt{-q^2 - (b+y)(c+z)}$$

si ottiene:

$$e^{\mathbf{C}} = e^{h+k}\left(\mathbf{I}\cos\gamma + \mathbf{C}'\frac{\sin\gamma}{\gamma}\right) e^{\mathbf{C}} = e^{h+k}\begin{pmatrix} \cos\gamma + \dfrac{(m+n)\sin\gamma}{\gamma} & \dfrac{(b+y)\sin\gamma}{\gamma} \\ \dfrac{(c+z)\sin\gamma}{\gamma} & \cos\gamma - \dfrac{(m+n)\sin\gamma}{\gamma} \end{pmatrix}$$

Uguagliando i termini corrispondenti delle due matrici si ha:

$$\begin{cases} (b+y)\dfrac{\sin\gamma}{\gamma} = y\dfrac{\sin\beta}{\beta}(-1)^{\mu} \\ (c+z)\dfrac{\sin\gamma}{\gamma} = z\dfrac{\sin\beta}{\beta}(-1)^{\mu} \\ (m+n)\dfrac{\sin\gamma}{\gamma} = (-1)^{\mu}\left(\cos\beta + \dfrac{n\sin\beta}{\beta} - \cos\gamma\right) \\ -(m+n)\dfrac{\sin\gamma}{\gamma} = (-1)^{\mu}\left(\cos\beta - \dfrac{n\sin\beta}{\beta} - \cos\gamma\right) \end{cases} \tag{4}$$

Abbiamo quindi due casi possibili:

Caso 1 : $\dfrac{\sin\gamma}{\gamma} \neq 0$: in tal caso, dalle ultime due equazioni del sistema (4) si ha:

$$\begin{cases} m = \dfrac{\gamma}{\sin\gamma}\left[(-1)^{\mu}\cos\beta - \cos\gamma\right] + n\left[(-1)^{\mu}\dfrac{\gamma\sin\beta}{\beta\sin\gamma} - 1\right] \\ m = -\dfrac{\gamma}{\sin\gamma}\left[(-1)^{\mu}\cos\beta - \cos\gamma\right] + n\left[(-1)^{\mu}\dfrac{\gamma\sin\beta}{\beta\sin\gamma} - 1\right] \end{cases}$$

da cui si ricava:

$$(-1)^{\mu}\cos\beta-\cos\gamma=-\left[(-1)^{\mu}\cos\beta-\cos\gamma\right]$$

che è verificata quando:

$$\gamma=\pm\beta+2\nu\pi\quad\text{per }\mu\text{ pari}\qquad\gamma=\pm\beta+(2\nu+1)\pi\quad\text{per }\mu\text{ dispari}$$

e in questi casi si ha:

$$m=n\left(\frac{(-1)^{\mu}\gamma\sin\beta}{\beta\sin\gamma}-1\right)=\omega n$$

e dalle altre due equazioni del sistema si ottiene:

$$b=y\left(\frac{(-1)^{\mu}\gamma\sin\beta}{\beta\sin\gamma}-1\right)=\omega y$$

$$c=z\left(\frac{(-1)^{\mu}\gamma\sin\beta}{\beta\sin\gamma}-1\right)=\omega z$$

quindi si ha:

$$\mathbf{A}'=\omega\mathbf{B}'$$

e le matrici $\mathbf{A}'$ e $\mathbf{B}'$, quindi anche $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, commutano.

Caso 2 : $\sin\gamma=0$ con $\gamma\neq0$, cioè $\gamma=\nu\pi$ con $\nu\in\mathbb{N}^{+}$. Si ha allora:

$$e^{\mathbf{C}}=(-1)^{\nu}e^{k+h}\mathbf{I}$$

e per avere $e^{\mathbf{C}}=e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$ deve essere:

$$\sin\beta=0\quad\wedge\quad(-1)^{\nu}=(-1)^{\mu}\cos\beta$$

quindi: $\beta=\phi\pi$ con $(-1)^{\phi+\mu}=(-1)^{\nu}$.
in questo caso quindi tutte le matrici: $e^{\mathbf{A}}$, $e^{\mathbf{B}}$, $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$, $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$ stanno nel centro $\mathcal{C}(2,\mathbb{R})$ e ν ha la stessa parità di $\mu+\phi$ e quindi $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$ ha lo stesso segno di $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$.
Si noti che se ν ha parità opposta a $\mu+\phi$ allora si ha : $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}=-e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$.

$\square$

Rimane da verificare la possibilità che l'esponenziale della somma sia uguale a uno solo dei due prodotti degli esponenziali, ma tale situazione è impossibile in $M(2,\mathbb{R})$, come mostra il seguente teorema.

Teorema 3.3. Per due matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}\in M(2,\mathbb{R})$ è impossibile avere:

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}=e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}\neq e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}$$

Dimostrazione. Ovviamente basta dimostrare che è impossibile avere:

$$e^{\mathbf{A}'+\mathbf{B}'}=e^{\mathbf{A}'}e^{\mathbf{B}'}\neq e^{\mathbf{B}'}e^{\mathbf{A}'}$$

Uguagliando $e^{\mathbf{A}'}e^{\mathbf{B}'}=e^{\mathbf{A}'+\mathbf{B}'}$ si ha

$$\begin{aligned}&\mathbf{I}\cos\alpha\cos\beta+\mathbf{A}'\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\alpha}+\mathbf{B}'\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\beta}+\mathbf{A}'\mathbf{B}'\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\alpha\beta}=\\&=\mathbf{I}\cos\gamma+\mathbf{A}'\frac{\sin\gamma}{\gamma}+\mathbf{B}'\frac{\sin\gamma}{\gamma}\end{aligned}\tag{5}$$

dal teorema 3.1 sappiamo che, se $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$ non commutano, $e^{\mathbf{A}'}e^{\mathbf{B}'} \neq e^{\mathbf{B}'}e^{\mathbf{B}'}$ equivale a $\sin\alpha\sin\beta \neq 0$ con α , $\beta \neq 0$. In tal caso $\mathbf{A}'\mathbf{B}'$ si può quindi esprimere come combinazione lineare delle tre matrici linearmente indipendenti $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{I}$.

$$\mathbf{A}'\mathbf{B}' = \frac{\alpha\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\left[\mathbf{I}\left(\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta\right) + \mathbf{A}'\left(\frac{\sin\gamma}{\gamma} - \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\alpha}\right) + \mathbf{B}'\left(\frac{\sin\gamma}{\gamma} - \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\beta}\right)\right] =$$
$$= \xi_1\mathbf{I} + \xi_2\mathbf{A}' + \xi_3\mathbf{B}'$$

Con ξ_1 , ξ_2 , $\xi_3 \in \mathbb{R}$.
Essendo $\mathbf{A}'$ e $\mathbf{B}'$ elementi dell'algebra $M(2,\mathbb{R})$ si deve avere:

$$(\mathbf{A}')^2\mathbf{B}' = \mathbf{A}'(\mathbf{A}'\mathbf{B}')$$

quindi:

$$-\alpha^2\mathbf{B}' = (\xi_1\xi_3 - \xi_2\alpha^2)\mathbf{I} + (\xi_1 + \xi_2\xi_3)\mathbf{A}' + \xi_3^2\mathbf{B}'$$

e per l'indipendenza lineare si ricava

$$\xi_3^2 = -\alpha^2 \quad , \quad \xi_1 + \xi_2\xi_3 = 0$$

per lo stesso motivo si ha anche:

$$(\mathbf{A}')\mathbf{B}'^2 = (\mathbf{A}'\mathbf{B}')\mathbf{B}'$$

da cui si ricava allo stesso modo:

$$-\beta^2 = \xi_2^2$$

e siccome ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 devono essere numeri reali, questo è impossibile se α e β sono numeri reali, cioè se $\det\mathbf{A}'$ e $\det\mathbf{B}'$ sono positivi.
Consideriamo quindi solo il caso in cui $\det\mathbf{A}'$ e $\det\mathbf{B}'$ sono negativi, quindi: $\alpha = i|\alpha|$ e $\beta = i|\beta|$, per cui si ha: $\xi_2 = i\beta$, $\xi_3 = i\alpha$ e $\xi_1 = -\xi_2\xi_3 = \alpha\beta = -|\alpha||\beta|$

e quindi:

$$\mathbf{A}'\mathbf{B}' = \alpha\beta\mathbf{I} + i\beta\mathbf{A}' + i\alpha\mathbf{B}'$$

per cui si ottiene:

$$e^{\mathbf{A}'}e^{\mathbf{B}'} = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\alpha\beta}\left(\alpha\beta\mathbf{I} + i\beta\mathbf{A}' + i\alpha\mathbf{B}'\right) + \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\alpha}\mathbf{A}' + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\beta}\mathbf{B}' + \cos\alpha\cos\beta\mathbf{I} =$$
$$= \mathbf{I}\left(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\right) + \mathbf{A}'\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\alpha} + i\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\alpha}\right) + \mathbf{B}'\left(\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\beta} + i\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\beta}\right)$$

quindi da:

$$e^{\mathbf{A}'}e^{\mathbf{B}'} = e^{\mathbf{A}'+\mathbf{B}'} = \cos\gamma\,\mathbf{I} + \frac{\sin\gamma}{\gamma}\,\mathbf{A}' + \frac{\sin\gamma}{\gamma}\,\mathbf{B}'$$

si ottiene:

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = cos\gamma$$

che è verificata se $\gamma = \alpha - \beta$.
Dalle altre due componenti si ottiene:

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\alpha} + i\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\alpha} = \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\beta} + i\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\beta}$$

essendo α e β numeri immaginari riscriviamo questa uguaglianza utilizzando le funzioni iperboliche come indicato in nota al teorema 2.1, e otteniamo:

$$\frac{e^{-|\beta|}\left(e^{|\alpha|}-e^{-|\alpha|}\right)}{2|\alpha|}=\frac{e^{-|\alpha|}\left(e^{|\beta|}-e^{-|\beta|}\right)}{2|\beta|}$$

cioè:

$$\frac{e^{2|\alpha|}-1}{2|\alpha|}=\frac{e^{2|\beta|}-1}{2|\beta|}$$

ma questo è impossibile per due numeri reali diversi perché la funzione

$$y=\frac{e^x-1}{x}$$

è monotona crescente per $x>0$.

□

3.1 Costruzione di matrici che verificano l'equazione funzionale

Vogliamo ora definire una procedura che consente di costruire due matrici che verificano l'equazione funzionale (1). Cominciamo con il costruire due matrici a traccia nulla, che non commutino e tali che la radice quadrata del loro determinante sia un multiplo intero positivo di π. Una matrice che soddisfa tali condizioni ha la forma:

$$\mathbf{A_0}=\mu\pi\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\qquad\mu\in\mathbb{N}^+$$

una matrice che non commuta con $\mathbf{A_0}$ e che verifica le stesse condizioni deve avere la forma:

$$\mathbf{B_0}=\psi\pi\begin{pmatrix}x&-y\\(1+x^2)/y&-x\end{pmatrix}\qquad\psi\in\mathbb{N}^+\quad x,y\neq0$$

Per queste due matrici si ha:

$$e^{\mathbf{A_0}}=(-1)^{\mu}\mathbf{I}\qquad e^{\mathbf{B_0}}=(-1)^{\psi}\mathbf{I}\qquad e^{\mathbf{A_0}}e^{\mathbf{B_0}}=(-1)^{\mu+\psi}e^{\mathbf{I}}$$

inoltre si ha:

$$\mathbf{A_0}+\mathbf{B_0}=(\mu+\psi)\pi\begin{pmatrix}x&-1-y\\1+(1+x^2)/y&-x\end{pmatrix}$$

e quindi:

$$\det(\mathbf{A_0}+\mathbf{B_0})=\left[-x^2+(1+y)\frac{1+y+x^2}{y}\right](\mu+\psi)^2\pi^2$$

quindi per verificare l'equazione funzionale (1) deve essere:

$$\frac{x^2}{y}+\frac{(1+y)^2}{y}=4\nu^2\qquad\nu\in\mathbb{N}^+$$

cioè:

$$x=\sqrt{4\nu^2y-(1+y)^2}$$

Quindi:

$$\mathbf{B_0}=\psi\pi\begin{pmatrix}\sqrt{4\nu^2y-(1+y)^2}&-y\\4\nu^2-y-2&-\sqrt{4\nu^2y-(1+y)^2}\end{pmatrix}\qquad\psi,\nu\in\mathbb{N}^+$$

e in tal caso si ha:

$$\det(\mathbf{A_0} + \mathbf{B_0}) = 4\nu^2(\mu + \psi)^2\pi^2$$

quindi

$$e^{\mathbf{A_0}+\mathbf{B_0}} = (-1)^{2\nu(\mu+\psi)}\mathbf{I} = (-1)^{\mu+\psi}\mathbf{I} = e^{\mathbf{A_0}}e^{\mathbf{B_0}}$$

Ricordiamo ora che matrici simili hanno lo stesso determinante, quindi data una matrice non singolare $\mathbf{P}$ Si possono poi costruire due matrici simili a $\mathbf{A_0}$ e $\mathbf{B_0}$:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P^{-1}A_0P} \qquad \mathbf{B}' = \mathbf{P^{-1}B_0P}$$

che ancora non commutano essendo:

$$[\mathbf{A}', \mathbf{B}'] = \mathbf{P^{-1}}[\mathbf{A_0}, \mathbf{B_0}]\mathbf{P}$$

e infine due matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = k\mathbf{I} + \mathbf{A}' \qquad \mathbf{B} = h\mathbf{I} + \mathbf{B}'$$

tali che:

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}} = (-1)^{\mu+\psi}e^{k+h}\mathbf{I}$$

3.2 Conclusioni

Il problema di determinare le condizioni necessarie e sufficienti per cui due matrici di $M(2,\mathbb{R})$ verificano l'equazione funzionale $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}$ è quindi interamente risolto.
Il risultato del Teorema 3.2 può essere espresso anche in termini topologici, notando che il centro $\mathcal{C}(2,\mathbb{R})$ è un gruppo di Lie non connesso, ovviamente isomorfo al gruppo moltiplicativo $\{\mathbb{R}^*, \times\}$ e le sue due componenti connesse sono gli insiemi delle matrici scalari positive e negative. Il Teorema 3.2 può quindi essere riformulato dicendo che $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$ se appartengono alla stessa componente connessa di $\mathcal{C}(2,\mathbb{R})$.
Non è difficile estendere questi risultati al caso di due matrici in $M(2,\mathbb{C})$, basta notare che il suo centro $\mathcal{C}(2,\mathbb{C})$ è connesso, quindi nel Teorema 3.2 basta chiedere che $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$, $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$, $e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}$ stiano nel centro, mentre il Teorema 3.3 non è più valido perché la funzione $w = (e^z - 1)/z$ è periodica in $\mathbb{C}$ e quindi in $M(2,\mathbb{C})$ esistono infinite matrici tali che $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}$.

Da una prima ricerca in letteratura non sembra che esista una soluzione nel caso generale di matrici in $M(n,\mathbb{K})$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, nemmeno nel caso $n = 3$.

Riferimenti bibliografici

[1] Fréchet M. (1953) Les solutions non-commutables de l'équation matrcielle $e^{x+y} = e^x e^y$. *Rend. Circ. Math. Palermo* **2** 11-27 e 71-72.

[2] Morinaga K. - Nono T. (1954) On the non-commutative solutions of the exponential equation $e^x e^y = e^{x+y}$. *J. Sci. Hiroshima Univ.* **(A) 17** 345-358.

[3] Bourgeois G. (2007) On commuting exponentials in low dimensions. *Linear Algebra Appl.* **423** 277-286.

[4] Clement de Seguins Pazzis (2011) A condition on the powers of $\exp(A)$ and $\exp(B)$ that implies $AB = BA$. *arXIV: 1012.4420v3.*

[5] Nathalie Nicholle Smalls (2007) The Exponential Function of Matrices. *http://digitalarchive.gsu.edu/*

[6] Cleve Moler, Charles Van Loan (2003) Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later *SIAM Review, Volume 20, Number 4, 1978, pages 801–836*