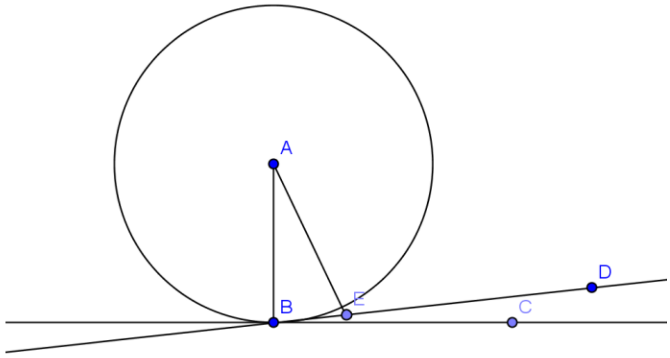
192. De minimis magnitudinibus, analisi infinitesimale in epoca ellenistica e cenni sull'opera di Newton

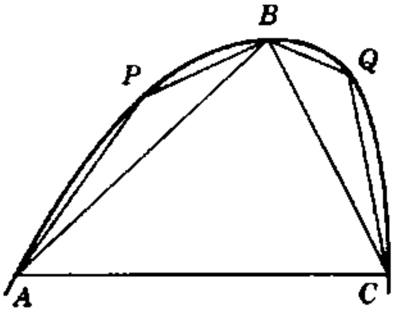
di Matteo Veglianti

Per capire il pensiero che si aveva in età ellenistica riguardo al concetto di infinitesimo bisogna innanzitutto capire quale era la concezione di numero reale. I greci non avevano una parola per indicare i numeri reali per il semplice fatto che il concetto fondamentale della matematica per loro non era il numero, concetto piuttosto astratto, ma era la grandezza!
Quello di grandezza è un concetto che oggi è usato soprattutto in fisica, ma in età ellenistica con questo termine si indicavano sia gli enti che noi chiameremmo fisici (lunghezza, massa, tempo) sia quelli che noi oggi chiameremmo matematici (numeri o figure geometriche), questo perché all'epoca non c'era la distinzione tra queste due discipline.
Chiaramente con queste grandezze si possono fare tutte le operazioni che noi facciamo con i numeri, in particolare quella che più ci interessa è la divisione. Il rapporto tra due grandezze è l'analogo, infatti, del nostro "numero reale".
Per prima cosa, quindi, bisogna decidere quando due grandezze hanno un rapporto e questo compito è spettato al grande Euclide di Alessandria.
La quarta definizione del quinto libro degli Elementi, infatti, dice: "due grandezze hanno rapporto quando esiste un multiplo dell'una che supera l'altra e un multiplo dell'altra che supera l'una" (L'edizione italiana curata da Nicolò Tartaglia riporta: "Le magnitudine sono dette hauer proportione fra loro lequali multiplicate se possono l'una e l'altra eccedere").
Questa proposizione definisce subito coppie di grandezze con rapporto e coppie di grandezze senza rapporto, facciamo alcuni esempi.
Un segmento ed una figura piana, ad esempio un rettangolo, non hanno rapporto, infatti non esiste alcun multiplo del segmento che sia più grande del rettangolo ed in generale non hanno rapporto qualsiasi coppia di grandezze non omogenee (cioè grandezze di dimensioni differenti).
Viceversa la diagonale e il lato del quadrato hanno rapporto in quanto la diagonale è più grande del lato e il doppio del lato è più grande della diagonale, infatti esso può essere considerato come la diagonale di un altro quadrato avente come lato la diagonale del quadrato di partenza. Un'altra coppia di grandezze che hanno rapporto sono la circonferenza e il diametro di un cerchio.
Considerando la definizione di Euclide, quindi, si supera il famoso problema di incommensurabilità tra il lato e la diagonale del quadrato che aveva suscitato tanto imbarazzo tra i pitagorici.
Euclide quindi con questa definizione sottintende che due grandezze non omogenee non possono avere rapporto; ma non afferma che due grandezze omogenee possono sempre averlo, perché questa mancanza?
Risulta difficile credere che Euclide si sia dimenticato di fare tale affermazione, è più semplice credere che egli non abbia inserito questa proposizione nella sua opera poiché voleva lasciare aperta la strada a teorie che non prevedono rapporti tra grandezze omogenee. Questa congettura non è del tutto campata in aria perché ci sono alcuni esempi che fanno propendere per questa idea. Vediamone tre.
Il primo esempio è tratto proprio dagli Elementi, in particolare dalla proposizione 16 del terzo libro. Si afferma: "Condotta una linea retta per un estremo del diametro di un cerchio e giacente al di fuori del cerchio, tra essa e il cerchio non si può inserire nessun'altra linea retta. E l'angolo mistilineo formato da tale retta e dalla circonferenza e più piccolo di qualsiasi angolo rettilineo formato dalla stessa retta con un'altra retta generica".

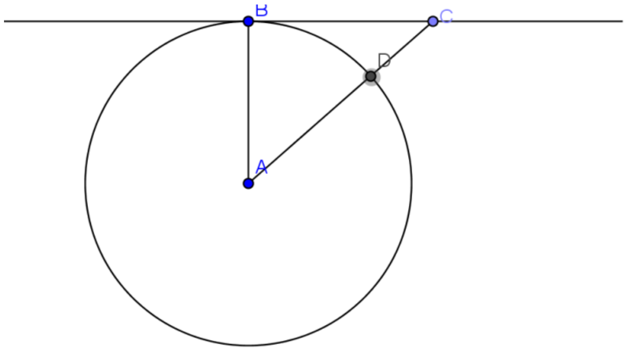


Con riferimento alla figura, si vuole dimostrare che tra la circonferenza e la retta BC non si può inserire nessun'altra retta.
Supponiamo dunque, per assurdo, che si possa tracciare una retta tra la circonferenza e la retta BC, per esempio la retta BD. Tracciamo ora il segmento di perpendicolare condotto dal centro del cerchio (il punto A) alla retta BD. Detto E il piede della perpendicolare, si ha che gli angoli AEB e AED sono retti. L'angolo ABE, dunque è minore di un angolo retto (poiché il triangolo ABE è retto in E) e di conseguenza il lato AB sarà maggiore di AE in quanto opposto ad angolo maggiore. Ma questo è assurdo dal momento che AE, congiungendo il centro del cerchio con un punto esterno ad esso, è maggiore del raggio, e dunque di AB. Da ciò si deduce la verità della tesi, ovvero che non si può inserire alcuna retta tra la circonferenza e la retta BC. Da questo si ricava immediatamente che l'angolo mistilineo formato dalla circonferenza e dalla retta BC è più piccolo dell'angolo CBD, poiché se fosse più grande, allora lo si potrebbe dividere in due parti e quindi si potrebbe inserire una retta tra la circonferenza e la retta BC, ma abbiamo appena dimostrato che ciò è impossibile!
Da questo esempio si capisce come Euclide non ammetteva un rapporto tra angoli, o per lo meno in questo caso particolare; due grandezze omogenee, dunque, almeno in un caso (quello appena visto), non hanno rapporto.
Un altro esempio viene dall'astronomia e la testimonianza ci è data dall'Arenario di Archimede. Tra le critiche alla teoria eliocentrica proposta da Aristarco di Samo (III sec. a.C.), infatti, in particolare c'è la seguente: se la Terra veramente si muove intorno al Sole, come mai non si vedono effetti di parallasse guardando le stelle fisse? Aristarco rispondeva dicendo che la distanza Sole-stelle fisse e la distanza Sole-Terra hanno lo stesso rapporto che c'è tra una superficie sferica e il suo centro (o, se vogliamo, tra un segmento e un punto). Quindi anche questa coppia di grandezze omogenee (distanza Sole-Terra e distanza Sole-stelle fisse) non ha rapporto.
L'ultimo esempio è preso dall'opera attribuita ad Aristotele, i "Problemi meccanici". Quando Aristotele descrive il moto circolare, infatti, afferma che il punto che si muove di tale moto è animato da due spostamenti, uno tangenziale e uno centripeto, che non hanno rapporto (noi oggi diremo che lo spostamento tangenziale è infinitesimo e quello centripeto è infinitesimo di ordine superiore). Questi tre esempi mostrano che l'idea di grandezze omogenee senza rapporto non era assente in epoca ellenistica ed in particolare non hanno rapporto quelle grandezze che noi oggi diremo infinitesime. Ammettendo però grandezze senza rapporto si concepisce l'infinitesimo come qualcosa in atto; concetto ripreso da Leibniz nel 1600 e da Abraham Robinson negli anni '60 ed è alla base dell'analisi non standard. L'analisi standard invece concepisce gli infinitesimi come grandezze potenziali, non attuali e questo deriva dal fatto che si assume come postulato che due grandezze omogenee hanno sempre un rapporto (rapporto che a volte può essere minore di qualsiasi quantità si voglia).
Questo assioma è noto come assioma di Archimede e lo troviamo citato in alcune sue opere, tra cui l'opera sulla quadratura della parabola. In quest'opera Archimede dimostra, tra le altre cose, che l'area del segmento parabolico è 4/3 di quella del massimo triangolo inscrivibile in esso. Per dimostrare ciò ricopre la superficie del segmento con dei triangoli e poi fa la somma delle aree di tutti i triangoli in un processo che ricorda vagamente l'integrazione di Riemann. Il rigore di Archimede è talmente elevato che egli si pone un problema: se si considera il segmento parabolico come la figura geometrica chiusa delimitata dal segmento e dall'arco di parabola, questa non coincide con l'unione di tutti i triangoli, poiché l'unione di tutti i triangoli non contiene la frontiera del segmento parabolico; chiaramente nel calcolare la misura della

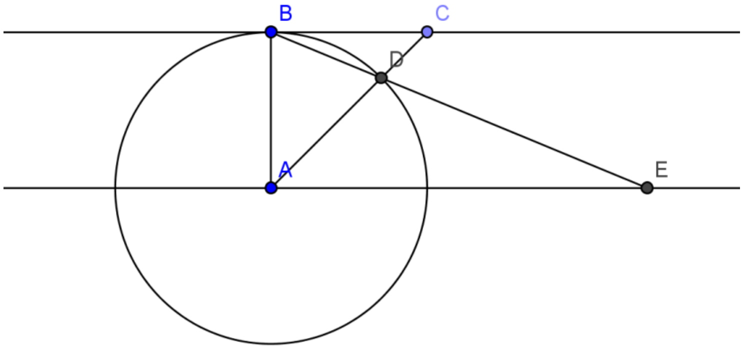
superficie questo non genera problemi, però concettualmente questo fatto è scomodo. Per superarlo Archimede introduce un assioma: "*Se due superfici sono diverse, allora esiste un multiplo della differenza che supera qualsiasi superficie prefissata*".
Questo elimina il problema accennato in quanto, detto in termini Euclidei, due superfici hanno sempre rapporto. E generalizzando, due grandezze omogenee hanno sempre rapporto!



La ricerca di Archimede però non si ferma alla formulazione di questo importante assioma: vanno citati almeno altri due suoi risultati.
Il primo è quello di aver individuato due infinitesimi di ordine diverso. Un suo teorema afferma infatti che data una circonferenza di centro A ed una retta ad essa tangente nel punto B, è sempre possibile individuare un punto C sulla retta tale che il rapporto $\frac{CD}{BC}$ è minore di qualsiasi quantità prefissata.



Per dimostrarlo, Archimede traccia la retta parallela alla retta BC passante per il centro A della circonferenza e congiunge il punto B col punto D e prolunga tale segmento dalla parte di D fino ad incontrare la suddetta retta e chiama E il punto di intersezione. Ora, i due triangoli BCD e ADE sono simili in quanto gli angoli BDC e ADE sono uguali perché opposti al vertice, gli angoli DBC e DEA sono uguali perché angoli alterni interni individuati dalle due rette parallele BC e AE tagliate dalla trasversale BE e infine, per lo stesso motivo, sono uguali gli angoli BCD e DAE. Dalla similitudine dei due triangoli si ricava: $\frac{CD}{BC}=\frac{AD}{AE}=\frac{\text{costante}}{\text{variabile}}=\frac{1}{k}$ e quindi per K sufficientemente grande il rapporto $\frac{CD}{BC}$ diventa arbitrariamente piccolo, questo avviene nel limite di C che tende a B.

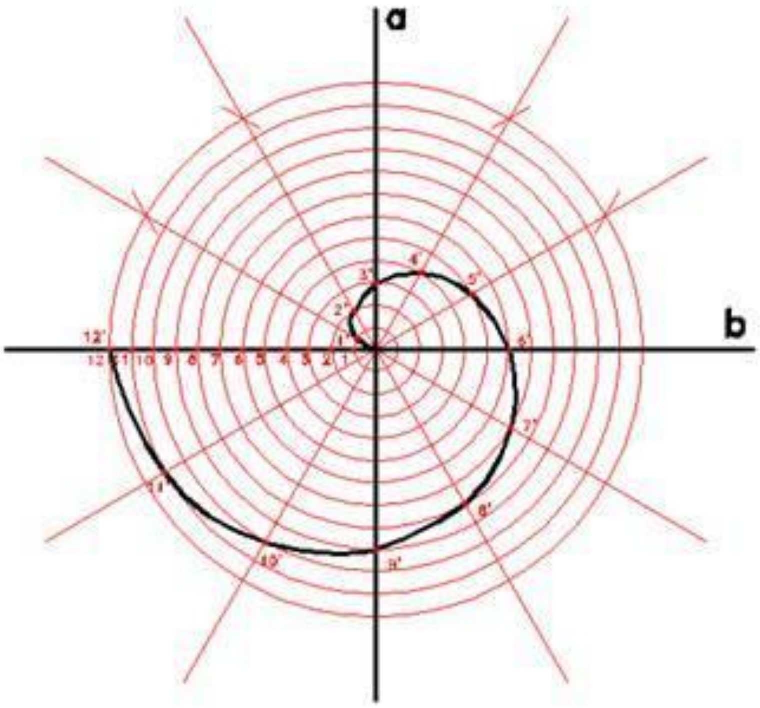


Noi oggi diremo che quando C tende a B, ovvero quando BC tende a zero, chiaramente BC è infinitesimo e CD è infinitesimo di ordine superiore a BC. È interessante vedere come l'infinitesimo è qui considerato come qualcosa di potenziale, ovvero il rapporto $\frac{CD}{BC}$ esiste sempre, ma per BC che tende a 0 entrambi le quantità diventano infinitesime ma una risulta infinitamente più piccola dell'altra; cioè il rapporto viene a mancare quando si passa al limite e questo è quello che si studia ancora oggi nelle nostre scuole!

Il secondo risultato è tratto dall'opera sulle spirali, che è l'opera di Archimede con il contenuto matematico più avanzato che ci è rimasta. Archimede considera una spirale descritta da un punto che si muove di moto rettilineo uniforme su una semiretta che ruota di moto circolare uniforme intorno alla propria origine, tale curva è chiamata oggi "spirale di Archimede" (la sua equazione in coordinate polari è $\varrho=k\theta$). Archimede affronta due problemi: quello di trovare la direzione della retta tangente alla spirale in ogni punto e quello di calcolare l'area racchiusa dalla spirale ogni giro.

Questi due problemi sono alla base del calcolo differenziale e del calcolo integrale rispettivamente.

Tralasciamo il primo problema, che è abbastanza complicato e vediamo invece il procedimento adottato per ottenere la quadratura del primo giro della spirale.



Innanzitutto si divide la spirale in N settori (dalla figura N=12) e si approssima ogni settore di spirale con i settori circolari inscritto e circoscritto; in questo modo l'intera superficie S delimitata dalla spirale sarà approssimata per difetto dalla somma di tutti i settori circolari interni (chiamiamo tale somma I_N) e per eccesso dalla somma di tutti i settori circolari esterni (chiamiamo tale somma C_N). Chiaramente più N è grande e più queste somme saranno vicine al valore vero.

A questo punto Archimede dimostra che la differenza tra C_N e I_N può essere arbitrariamente piccola, cioè preso un N sufficientemente grande, tale differenza risulterà minore di una quantità prefissata. Infatti, come si vede subito dalla figura questa differenza coincide con il settore circolare circoscritto all'ultimo settore di spirale, difatti per ogni settore di spirale, il settore circolare inscritto corrisponde allo stesso settore circolare che circoscrive il settore di spirale precedente mentre il settore circolare circoscritto corrisponde a quello che è inscritto nel settore di spirale successivo, cioè:

$$C_N = \sum_{k=1}^{N} S_k \text{ e } I_N = \sum_{k=1}^{N-1} S_k$$

A questo punto possiamo vedere qual è la superficie del k-esimo settore di spirale S_k. Chiaramente la coordinata lineare ϱ aumenta linearmente con k, cioè è proporzionale a k e poiché i settori circolari sono

tutti simili, hanno cioè, tutti lo stesso angolo, la loro superficie è proporzionale al quadrato della coordinata lineare e quindi al quadrato di k; possiamo perciò scrivere: $S_k = ak^2$. La superficie del settore circolare circoscritto all'ultimo settore di spirale è $S_N = \frac{1}{N}C$, da cui $C = N \cdot S_N = aN^3$ ($C = \pi R^2$ è la superficie del cerchio di raggio $R = 2\pi k$, quello che Archimede chiama "primo cerchio").
Detto ciò Archimede afferma che la superficie racchiusa dalla spirale dopo il primo giro è un terzo del primo cerchio: $S = \frac{1}{3}C$; come è suo solito è ignoto il procedimento usato per arrivare a questa conclusione, ma dimostra per assurdo la sua affermazione mostrando che S non può essere né minore, né maggiore di $\frac{1}{3}C$.

Supponiamo infatti $S < \frac{1}{3}C$, siccome la differenza tra C_N e I_N può essere resa arbitrariamente piccola, esiste un N tale che $C_N < \frac{1}{3}C$.

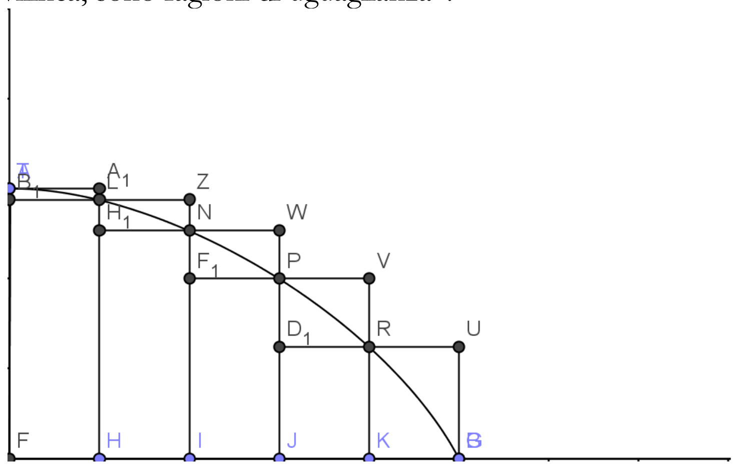
Ma $C_N = \sum_{k=1}^{N} S_k = a\sum_{k=1}^{N} k^2 = a\frac{1}{3}N\left(N+\frac{1}{2}\right)(N+1) > \frac{1}{3}aN^2 > \frac{1}{3}C$. Che è contraddittorio.

Analogamente supponendo $S > \frac{1}{3}C$, esisterà un N tale che $I_N > \frac{1}{3}C$.

Ma $I_N = \sum_{k=1}^{N-1} S_k = a\sum_{k=1}^{N-1} k^2 = a\frac{1}{3}N\left(N-\frac{1}{2}\right)(N-1) < \frac{1}{3}aN^3 < \frac{1}{3}C$. Che è contraddittorio.

Risulta perciò dimostrata l'affermazione di Archimede $S = \frac{1}{3}C$: la superficie delimitata dalla spirale è un terzo del primo cerchio!
Questo procedimento, a differenza di quello usato per calcolare l'area del segmento parabolico, è del tutto analogo al metodo di integrazione di Riemann, anzi l'integrazione di Riemann è la generalizzazione di questo.
Al livello del rigore, inoltre, Archimede ha superato di gran lunga tutti i suoi successori almeno fino alla seconda metà del XIX secolo, cioè per oltre due millenni. Per esempio anche la necessità di introdurre un postulato è simbolo di un livello di rigore elevatissimo che non ha nulla da invidiare alle opere di analisi del XX secolo, anzi è proprio lo studio attento di Archimede e di Euclide che ha permesso agli analisti del XIX secolo di recuperare la metodologia ellenistica e quindi di riuscire a ricavare, in pochi anni, moltissimi risultati interessanti in un processo analogo a quello che portò Euclide, in una vita, ad ottenere una quantità immensa di risultati che si continuano a studiare ancora oggi, cioè dopo 23 secoli.
Ma vediamo ora brevemente alcuni risultati successivi, contenuti nei *"Philosophiae* Naturalis Principia Mathematica" di Newton (1687).
Nella sezione I Newton scrive come "titolo": "Metodo delle prime e delle ultime ragioni, col cui aiuto si dimostrano le cose che seguono". (Nel testo originale è "*De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur*").
Col termine "ultima ragione" Newton intende quindi l'ultimo rapporto tra due grandezze ("ragione" è la traduzione dal latino di "ratio", la quale è l'analogo della parola greca "logos", cioè "rapporto"). Quest'ultimo rapporto oggi è chiamato limite del rapporto, ovvero derivata, cioè è il rapporto quando le due quantità diventano infinitesime. Newton ha quindi l'idea che quando due grandezze diventano "evanescenti" (per usare la sua terminologia), cioè infinitesime, hanno comunque un rapporto: quello che chiama "ultimo rapporto".
Newton in pratica vuole estendere ad una curva qualsiasi il metodo usato da Archimede per calcolare l'area della spirale, ci riesce solo in parte poiché, se da una parte acquisisce generalità, dall'altra subisce una drastica perdita di rigore.

Il lemma I, per esempio, asserisce: "Le quantità, come anche i rapporti fra quantità, che costantemente tendono all'eguaglianza in un qualsiasi tempo finito, e prima della fine di quel tempo si accostano l'una all'altra più di una qualsiasi differenza data, divengono infine uguali".
In pratica con questo lemma, Newton sta considerando grandezze continue, ma lo fa senza dare una definizione di continuità; inoltre asserisce che queste grandezze variano, ma non dice mai rispetto a cosa variano, cioè non considera funzioni matematiche, sembra che esse varino nel tempo realmente; l'opera di Newton, da questo punto di vista, non può essere considerata matematica, ma è da classificare nelle opere di filosofia naturale.
Ma veniamo all'esempio che ci interessa: il lemma II. Senza enunciarlo diremo brevemente di cosa parla.
Newton vuole ora generalizzare il procedimento di Archimede visto sopra e lo fa in questo modo: considera una generica curva e approssima la sua superficie con N rettangoli contenuti e contenenti la curva e mostra che la somma delle differenze tra i rettangoli esterni e quelli interni è uguale al più grande di tutti questi rettangoli, il quale, dipendendo da N, può essere reso piccolo a piacere (per N sufficientemente grande). Afferma quindi che *"Se la* larghezza di questi rettangoli diminuirà e il loro numero aumenterà all'infinito, dico che le ultime ragioni che hanno fra di loro la figura inscritta, quella circoscritta e quella curvilinea, sono ragioni di uguaglianza".



Come si vede dalla figura questo funziona solo se la funzione è monotona decrescente, altrimenti non è vero che la somma di tutti gli scarti è pari al rettangolo maggiore; inoltre Newton non definisce cos'è una curva (dice semplicemente: "data una curva qualsiasi"), ne tanto meno cosa è una curva integrabile.
Analogamente, nel lemma VI egli cerca di introdurre il concetto di derivata; anche qui parla di una curva generica senza assicurarsi che sia differenziabile e il livello di rigore è piuttosto basso.
Chiaramente la grandezza di Newton sta nel cercare di generalizzare il procedimento di Archimede, la figura che troviamo nella sua opera, infatti è familiare a noi tutti, la troviamo infatti in ogni manuale di analisi. Newton però è ancora lontano dal recupero del metodo ellenistico, metodo che si riacquisterà timidamente nella seconda metà del XIX secolo. Il recupero del metodo e del rigore ellenistico è fondamentale per la nascita da una parte del calcolo integrale di Riemann, che altro non è che la generalizzazione del procedimento di Archimede, sia a livello concettuale che al livello formale (e questa seconda caratteristica, ripeto, è quella che manca nell'opera di Newton); dall'altra parte del calcolo differenziale di Cauchy; alla luce di questo, non stupisce il fatto che il recupero della metodologia ellenistica porta, nel giro di pochi anni, ad una quantità sorprendente di risultati!