

• Numero 20 – Settembre 2013 •



Lets play a game :)! by Michael Gil

<http://www.flickr.com/photos/13907834@N00/4385269822>

SCRATCH – CASUALITÀ MATEMATICA – FAMIGLIE DI INTERI – COORDINATE
GEOGRAFICHE GAUSSIANE – DIDATTICA E ISOMETRIE - MINIMIS MAGNITUDINIBUS

Come proporre un contributo

Istruzioni per gli autori

La rivista pubblica articoli, interviste, buone pratiche e giochi relativamente alla matematica e alle sue applicazioni.

Lo stile, la terminologia e le idee espresse devono essere chiari e accessibili a tutti.

Gli articoli saranno valutati da uno o più collaboratori esperti in materia. La redazione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore.

È possibile che la redazione subordini la pubblicazione dell'articolo a modifiche anche sostanziali che devono essere fatte dall'autore. I contributi devono essere inviati in forma elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato .doc, .docx, .rtf, .odt o formati analoghi. Le formule possono essere in Microsoft Equation Editor, MathType, Open office math o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati e inviati in file a parte. Di ogni elemento non testuale deve essere indicata la posizione precisa all'interno del testo. Se le immagini utilizzate sono protette da diritti d'autore, sarà cura dell'autore dell'articolo ottenere le autorizzazioni necessarie.

Nella prima pagina andranno indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale e istituzione o ambiente professionale di appartenenza, indirizzo e-mail.

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (5-10 righe) preferibilmente in italiano e in inglese, e dovrà terminare con una bibliografia.

I riferimenti bibliografici devono essere indicati all'interno del testo nel seguente modo: [3] oppure [Ba], se si deve indicare la pagina usare [Ba, p.15].

Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia.

I contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

La redazione non garantisce la correttezza scientifica del contenuto degli articoli. Gli autori sono responsabili del contenuto dei testi inviati per la pubblicazione.

Se l'articolo è stato pubblicato in altra sede l'autore deve richiederne l'autorizzazione a chi ha pubblicato per primo l'articolo e fornire le coordinate alla redazione.

I testi pubblicati in questa rivista, se non diversamente indicato, sono soggetti a licenza Creative Commons Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate 3.0: la riproduzione, distribuzione e divulgazione dei testi sono consentite a condizione che vengano citati i nomi degli autori e della rivista Matematicamente.it Magazine; l'uso commerciale e le opere derivate non sono consentiti.

MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito
www.matematicamente.it

Registrazione del 19.12.2006 al n.953 del Tribunale di Lecce
ISSN 2035-0449

Direttore responsabile

Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it

Vicedirettore

Luca Lussardi
lucalussardi@matematicamente.it

Redazione

Flavio Cimolin
flaviocimolin@matematicamente.it
Diego Alberto - Luca Barletta - Michele Mazzucato - Nicola Chiriano

Hanno collaborato a questo numero

Rosa Marincola, Nicola De Nitti, Stefano Borgogni, Michele T. Mazzucato, Alfio Grasso, Matteo Veglianti, Daniela Molinari.

Sommario

186. Un gioco d'incertezza: "Forse che sì, forse che no"	5
Rosa Marincola	
187. Casualità matematica e Metodo Monte Carlo	15
Nicola De Nitti	
188. Successioni e famiglie di numeri interi	20
Stefano Borgogni	
189. Esponenziali di matrici	32
Emilio Novati	
190. Coordinate geografiche gaussiane, un metodo di trasformazione	44
Michele T. Mazzucato	
191. Proposta per un diverso sviluppo della geometria con l'uso strutturale delle isometrie	50
Alfio Grasso	
192. De minimis magnitudinibus, analisi infinitesimale in epoca ellenistica e cenni sull'opera di Newton.	62
Matteo Veglianti	
193. Lo scaffale dei libri	68

In questo numero un'attività didattica sulla creazione di giochi ispirata da una visita al Palazzo Ducale di Mantova: forse che sì, forse che no. Il Metodo Monte Carlo basato su procedimenti probabilistici per risolvere problemi di statistica; il corretto criterio per stabilire quando una serie di numeri può dirsi casuale. Famiglie particolari di numeri interi, dai numeri figurati ai numeri di Fibonacci, tribonacci, Catalan, Bell. Prime definizioni e operazioni con gli esponenziali di matrici, come estendere l'operazioni di esponenziale dai numeri alle matrici. Coordinate gaussiane e coordinate geografiche per i punti della superficie terrestre, come passare da un sistema all'altro. Insegnare geometria con l'uso delle isometrie, un metodo di insegnamento ancora da esplorare completamente. Una breve storia dell'analisi matematica in epoca ellenistica, con uno sguardo ai metodi usati da Euclide, Archimede e Newton. Libri di divulgazione scientifica da leggere e di matematica in particolare.

Antonio Bernardo

186. Un gioco d'incertezza: “Forse che sì, forse che no”

Rosa Marincola
rosamarincola@virgilio.it

Premessa

Durante una mia visita al Palazzo Ducale di Mantova, nell'ammirare i tanti capolavori che custodisce, sono rimasta particolarmente colpita dal soffitto particolarissimo che dà il nome alla Sala del Labirinto. Si tratta, appunto di un soffitto ligneo, dipinto che riproduce un labirinto dorato. Lo sfondo azzurro non fa pensare ad un giardino o ad un sentiero percorribile (come normalmente vengono realizzati i labirinti), ma ad una volta celeste in cui lo sguardo e il pensiero indugiano lungo percorsi enigmatici. Il soffitto proviene dal palazzo di San Sebastiano a Mantova e porta, ripetuto al proprio interno lungo il labirinto, il motto "forse che sì, forse che no" che il marchese Francesco II Gonzaga riprese dal ritornello di una canzone d'amore del XVI secolo (appartenente al genere del tempo: "frottola amorosa"). La fascia più esterna, invece è stata realizzata per adattare il soffitto alla sala dove è stato collocato in epoca successiva a opera del duca Vincenzo Gonzaga. L'iscrizione presente in questa zona perimetrale richiama la battaglia di Kanizsa ("sub arce Canisiae") in Ungheria, una crociata contro i turchi, condotta dal Gonzaga, dall'esito incerto. Questo soffitto affascinò Gabriele D'Annunzio che intitolò una sua opera "Forse che sì, forse che no".

In questo contributo presenterò un'attività che ho ideato e sperimentato nelle classi del biennio Tecnico Economico dell'I.I.S. "A. Guarasci" di Rogliano (Cs), dove insegno informatica. Si tratta di un videogioco educativo interdisciplinare, realizzato con Scratch.

Scratch

Scratch è un linguaggio di programmazione visuale simile a MIT App Inventor, sviluppato da Google per applicazioni Android.

Con Scratch si possono creare storie interattive, animazioni, videogames, grafica, ecc. I tutorial presenti sul sito ufficiale (si veda la sitografia), i numerosissimi video pubblicati su You Tube e su altri canali ne favoriscono l'apprendimento in modo ludico. Registrandosi al sito è possibile non solo scaricare gratuitamente il programma, ma condividere i propri progetti e scaricare liberamente quelli presenti in "galleria" in modo da poterli ulteriormente sviluppare, personalizzare e condividere. Il linguaggio consente agli utilizzatori, la creazione di codice (gli script) basati su concetti matematici e computazionali, a lavorare in modo creativo e a collaborare in rete.

Gli script si ottengono trascinando i blocchi e incastrandoli come dei mattoncini Lego. Le istruzioni sono scritte in linguaggio naturale, per cui nel fare la stesura dell'algoritmo risolutivo si ottiene direttamente il programma eseguibile. In questo modo è possibile avviare alla programmazione studenti anche giovanissimi (numerosi progetti sono realizzati anche per la scuola primaria) concentrandosi sulla risoluzione di un problema piuttosto che sulla codifica.

L'attività didattica

Con quest'attività mi sono posta l'obiettivo di motivare gli studenti all'apprendimento di alcuni concetti matematici e di avviarli alla programmazione facendo costruire loro un videogioco.

Il lavoro si basa sull'intreccio e lo sviluppo di più fasi.

- 1) La progettazione del videogioco: la scelta della tipologia di videogioco da realizzare (un labirinto), l'ambientazione e l'inquadratura anche dal punto storico-artistico, quindi ricerca di documentazione in rete sulla Sala del Labirinto.
- 2) Lo studio dell'argomento oggetto delle domande interne del gioco: elementi di calcolo combinatorio e di calcolo delle probabilità, in un contesto ludico con collegamenti interdisciplinari (informatica,

matematica, storia e letteratura). Queste tematiche notoriamente nelle indagini internazionali rientrano nell'ambito denominato "Incertezza" che ben si coniuga col percorso di un labirinto e in particolare con quello trattato.

3) L'apprendimento di alcuni elementi di programmazione, in particolare le istruzioni di assegnazione e di selezione a due vie annidate. Occorre precisare che con questi studenti ho già realizzato in precedenza altre attività più semplici per farli familiarizzare col software.

4) La realizzazione in modalità collaborativa e la validazione del gioco.

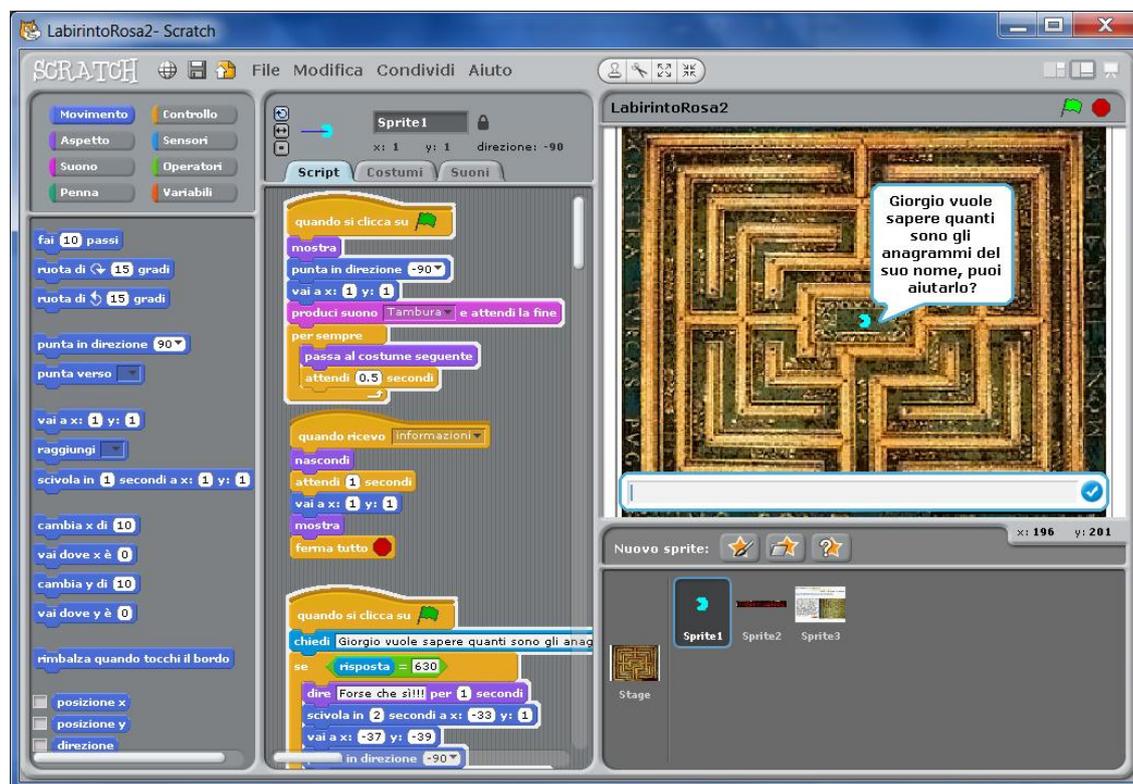


Figura 1: Il progetto con lo script dello Sprite1

In tutte le fasi, gli studenti sono stati coinvolti attivamente e i momenti di lezione frontale e di sistematizzazione dei concetti sono stati ridotti all'essenziale, puntando prima alla soluzione intuitiva dei problemi proposti.

Per ciascun quesito lo Sprite1 si trova in un punto dello Stage (l'immagine di sfondo) individuato dalle coordinate cartesiane a partire dal centro del labirinto di coordinate (1,1). Se il giocatore risponde esattamente alla domanda, appare la scritta "Forse che sì!!!", lo Sprite1 in automatico percorre un tratto del percorso (eseguendo una sequenza di spostamenti in orizzontale e in verticale con rotazioni nei vertici) e viene posto un nuovo quesito fino a raggiungere l'uscita posta nel punto di coordinate (0, -150).

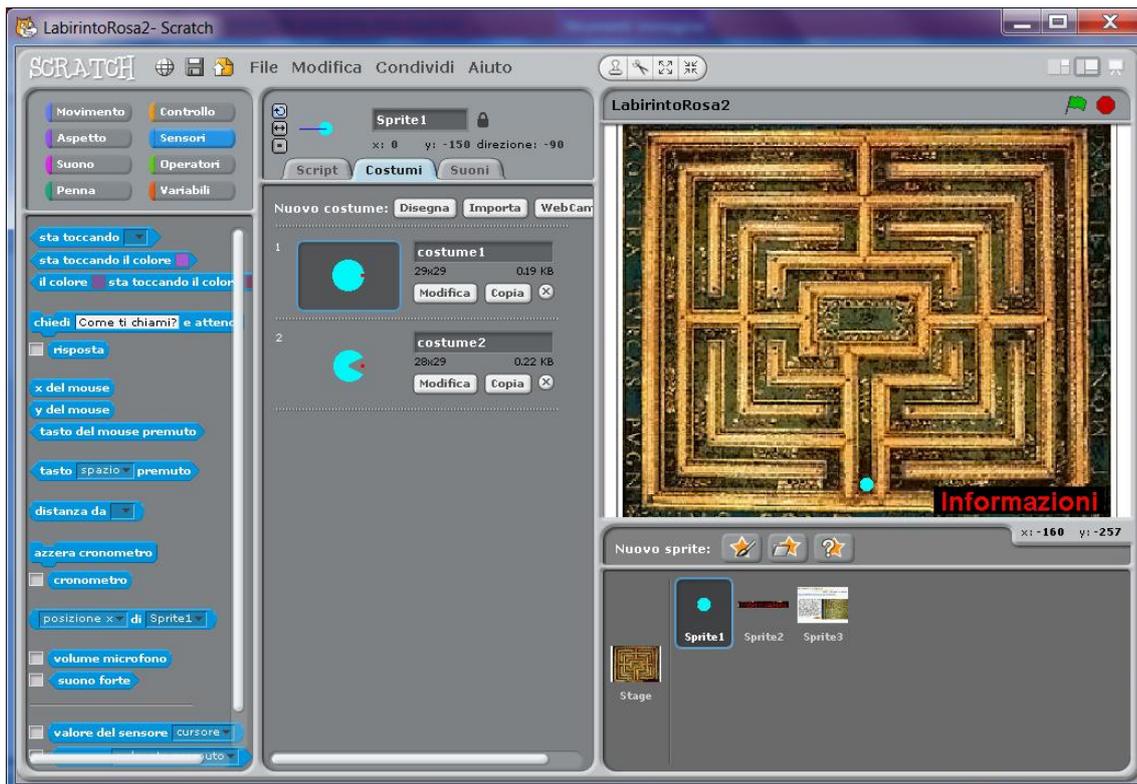


Figura 2: Lo Sprite1 presenta due diversi costumi che si alternano durante l'animazione in modo che apra e chiuda la bocca

Se la risposta ad un quesito è errata, appare un commento e la frase “*Forse che no!!!*”, il gioco viene interrotto e lo Sprite1 ritorna nel punto iniziale di coordinate (1,1).

Sono stati selezionati 10 quesiti:

1) Sprite1 nel punto di coordinate x:1, y:1

Giorgio vuole sapere quanti sono gli anagrammi del suo nome, puoi aiutarlo?

Risposta esatta: le permutazioni con ripetizioni $P'(7, 2,2,2)=7!/(2!*2!*2!) = 630$

2) Sprite1 nel punto di coordinate x:-30, y:-92

Quante etichette da 4 cifre, si possono ottenere con i numeri da 0 a 9, senza ripetizioni?

Risposta esatta: le disposizioni semplici $D(10,4)=10*9*8*7=5040$

3) Sprite1 nel punto di coordinate x:-26, y:-147

In quanti modi diversi 6 bambini possono disporsi in cerchio?

Risposta esatta: le permutazioni circolari $P'(6)=5!= 120$

4) Sprite1 nel punto di coordinate x:-150, y:15

Quante terne di numeri si possono ottenere lanciando contemporaneamente 3 dadi cubici?

Risposta esatta: le disposizioni con ripetizione $D'(6,3) = 6^3 = 216$

5) Sprite1 nel punto di coordinate x:-70, y:40

Nel gioco del lotto (90 bussolotti numerati da 1 a 90), quante sono le cinque che contengono la quaterna 23-54-7-80?

Risposta esatta: 86 (poiché 4 numeri sono fissati, per il quinto numero ci sono 86 possibili scelte, non occorre neanche ricorrere alle combinazioni)

6) Sprite1 nel punto di coordinate x:120, y:95

Quanti triangoli si possono formare con 5 punti di un piano, 3 dei quali non siano mai allineati?

Risposta esatta: le combinazioni di 5 numeri presi a 3 a 3 $C(5,3)=10$

7) Sprite1 nel punto di coordinate x:175, y:-150

In percentuale, qual è la probabilità di estrarre una figura da un mazzo di carte napoletane?

Risposta esatta: la probabilità $P=12/40= 30\%$

8)Sprite1 nel punto di coordinate x:120, y:-15

Se da un mazzo di carte napoletane si estrae un asso di coppe, qual è la probabilità (in frazione) di estrarre il sette bello alla seconda estrazione (senza rimettere nel mazzo la prima carta)?

Risposta esatta: la probabilità $P= 1/39$

9)Sprite1 nel punto di coordinate x:90, y:-65

Qual è la probabilità (in frazione) di ottenere almeno una testa nel lancio di due monete?

Risposta esatta: la probabilità $P= 3/4$

10) Sprite1 nel punto di coordinate x:0, y:-40

Qual è la probabilità (in frazione) che lanciando un dado cubico esca due volte consecutive il numero 2?

Risposta esatta: la probabilità $P= 1/36$

Lo Script dello Sprite1 è il seguente:



quando si clicca su 

chiedi **Giorgio vuole sapere quanti sono gli anagrammi del suo nome, puoi aiutarlo?** e attendi

se **risposta = 630**

dire **Forse che sì!!!** per **1 secondi**

scivola in **2 secondi** a x: **-33** y: **1**

vai a x: **-37** y: **-39**

punta in direzione **-90**

scivola in **1 secondi** a x: **-65** y: **-39**

vai a x: **-70** y: **-9**

scivola in **1 secondi** a x: **-94** y: **-12**

vai a x: **-96** y: **-67**

punta in direzione **90**

scivola in **1 secondi** a x: **-28** y: **-67**

vai a x: **-30** y: **-92**

chiedi **Quante etichette da 4 cifre, si possono ottenere con i numeri da 0 a 9, senza ripetizioni?** e attendi

se **risposta = 5040**

dire **Forse che sì!!!** per **1 secondi**

punta in direzione **-90**

scivola in **1 secondi** a x: **-124** y: **-92**

vai a x: **-122** y: **-12**

scivola in **1 secondi** a x: **-150** y: **-12**

vai a x: **-150** y: **-119**

punta in direzione **90**

scivola in **1 secondi** a x: **-31** y: **-119**

vai a x: **-26** y: **-147**

punta in direzione **-90**

chiedi **In quanti modi diversi 6 bambini possono disporsi in cerchio?** e attendi

se **risposta = 120**

dire **Forse che sì!!!** per **1 secondi**

scivola in **1 secondi** a x: **-179** y: **-150**

punta in direzione **0**

scivola in **1 secondi** a x: **-175** y: **150**

punta in direzione **90**

scivola in **1 secondi** a x: **-15** y: **147**

vai a x: **-15** y: **124**

punta in direzione **-90**

scivola in **1 secondi** a x: **-151** y: **124**

vai a x: **-150** y: **15**

chiedi **Quante terne di numeri si possono ottenere lanciando contemporaneamente 3 dadi cubici?** e attendi

se **risposta = 216**

dire **Forse che sì!!!** per **1 secondi**

punta in direzione **90**

scivola in **1 secondi** a x: **-125** y: **15**

vai a x: **-122** y: **93**

punta in direzione **90**

scivola in **1 secondi** a x: **-15** y: **93**

vai a x: **-15** y: **73**

punta in direzione **-90**

scivola in **1 secondi** a x: **-95** y: **70**

vai a x: **-100** y: **15**

punta in direzione **90**

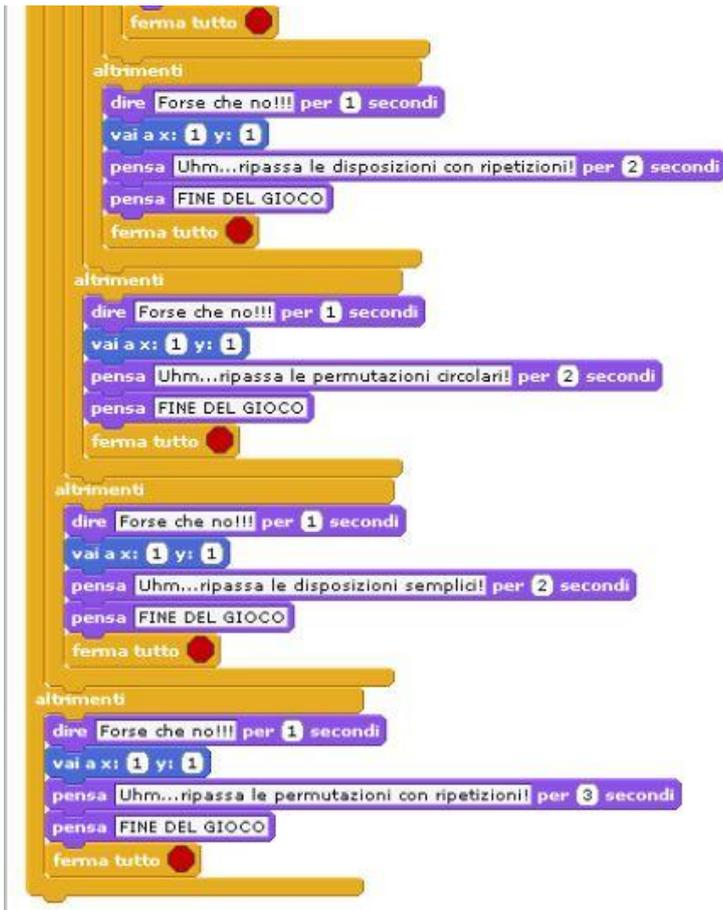
```

scivola in 1 secondi a x: -65 y: 15
vai a x: -70 y: 40
punta in direzione 90
chiedi Nel gioco del lotto (90 bussolotti numerati da 1 a 90), quante sono le cinque che contengono la quaterna 23-54-7-80? e attendi
se risposta = 86
dire Forse che sì!!! per 1 secondi
scivola in 1 secondi a x: 65 y: 40
vai a x: 65 y: 15
scivola in 1 secondi a x: 95 y: 15
vai a x: 95 y: 65
punta in direzione -90
scivola in 1 secondi a x: 15 y: 70
vai a x: 15 y: 95
punta in direzione 90
scivola in 1 secondi a x: 120 y: 95
chiedi Quanti triangoli si possono formare con 5 punti di un piano, 3 dei quali non siano mai allineati? e attendi
se risposta = 10
dire Forse che sì!!! per 1 secondi
vai a x: 120 y: 15
scivola in 1 secondi a x: 150 y: 15
vai a x: 150 y: 125
punta in direzione -90
scivola in 1 secondi a x: 15 y: 125
vai a x: 15 y: 150

scivola in 1 secondi a x: 170 y: 150
punta in direzione 180
scivola in 1 secondi a x: 175 y: -150
punta in direzione -90
chiedi In percentuale, qual è la probabilità di estrarre una figura da un mazzo di carte napoletane? e attendi
se risposta = 30%
dire Forse che sì!!! per 1 secondi
scivola in 1 secondi a x: 25 y: -150
vai a x: 25 y: -120
punta in direzione 90
scivola in 1 secondi a x: 150 y: -120
vai a x: 150 y: -15
punta in direzione -90
scivola in 1 secondi a x: 120 y: -15
chiedi Se da un mazzo di carte napoletane si esrae un asso di coppe, qual è la probabilità (in frazione) di estrarre il sette bello alla seconda estrazione (senza rimettere nel mazzo la prima carta)? e attendi
se risposta = 1/39
dire Forse che sì!!! per 1 secondi
vai a x: 120 y: -95
scivola in 1 secondi a x: 25 y: -95
vai a x: 30 y: -70
punta in direzione 90
scivola in 1 secondi a x: 90 y: -65
chiedi Qual è la probabilità (in frazione) di ottenere almeno una testa nel lancio di due monete? e attendi
se risposta = 3/4
dire Forse che sì!!! per 1 secondi
vai a x: 90 y: -15
    
```

```

punta in direzione -90
scivola in 1 secondi a x: 60 y: -15
vai a x: 65 y: -40
scivola in 1 secondi a x: 0 y: -40
chiedi Qual è la probabilità (in frazione) che lanciando un dado cubico esca due volte consecutive il numero 2? e attendi
se risposta = 1/36
  dire Forse che sì!!! per 1 secondi
  vai a x: 0 y: -150
  porta effetto mulinello a 0
  vai in primo piano
  produci suono GuitarStrum e attendi la fine
  dire BRAVISSIMO HAI RISPOSTO CORRETTAMENTE A TUTTE LE DOMANDE! per 2 secondi
  ferma tutto
altrimenti
  dire Forse che no!!! per 1 secondi
  vai a x: 1 y: 1
  pensa Uhm... per 2 secondi
  pensa FINE DEL GIOCO
  ferma tutto
altrimenti
  dire Forse che no!!! per 1 secondi
  vai a x: 1 y: 1
  pensa Uhm... per 2 secondi
  pensa FINE DEL GIOCO
  ferma tutto
altrimenti
  dire Forse che no!!! per 1 secondi
  vai a x: 1 y: 1
  pensa Uhm... per 2 secondi
  pensa FINE DEL GIOCO
  ferma tutto
altrimenti
  dire Forse che no!!! per 1 secondi
  vai a x: 1 y: 1
  pensa Uhm...le combinazioni...! per 2 secondi
  pensa FINE DEL GIOCO
  ferma tutto
altrimenti
  dire Forse che no!!! per 1 secondi
  vai a x: 1 y: 1
  pensa Uhm...90 numeri...non occorrono neanche le combinazioni! per 2 secondi
  pensa FINE DEL GIOCO
  
```



Lo Script dello Sprite2 (la scritta Informazioni)



Figura 3: Lo Sprite2

Lo Script dello Sprite3 (immagine contenente le informazioni) è il seguente:

```
quando si clicca su [Sprite3]
nascondi
```

```
quando ricevo informazioni
vai in primo piano
mostra
```

```
quando si clicca su Sprite3
nascondi
```

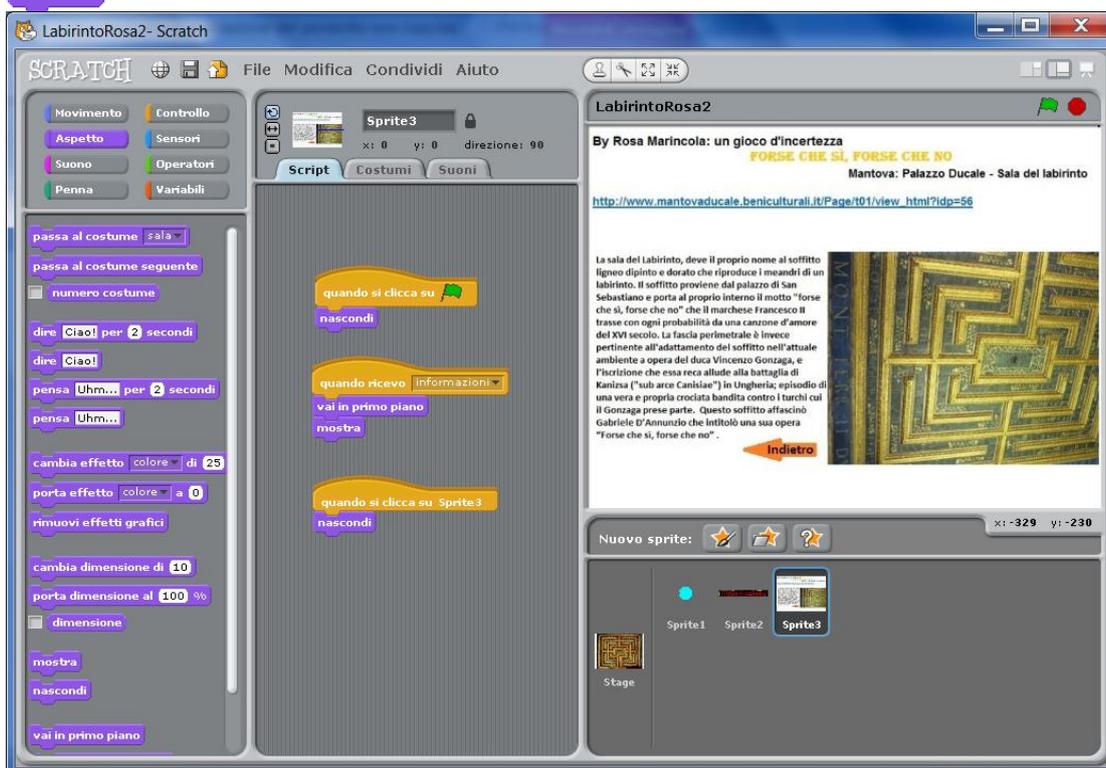


Figura 4: Lo Sprite3

Conclusioni

Considerata in tutto il suo percorso, l'attività si è dimostrata molto formativa per gli studenti del primo biennio della scuola secondaria di secondo grado. La parte più efficace è stata la progettazione del percorso interdisciplinare, realizzata sotto la guida del docente-esperto, proprio come nelle botteghe rinascimentali, nella situazione tipica di apprendistato cognitivo della didattica laboratoriale. Un possibile sviluppo futuro, potrebbe essere la realizzazione di altre attività ludiche, in situazioni scelte dagli studenti, aventi come oggetto delle domande su argomenti già noti, ma importanti, sui quali dovrebbero diventare davvero esperti per costruire un gioco per studenti più giovani.

Sitografia

-Mantova: Palazzo Ducale

http://www.mantovaduale.beniculturali.it/Page/t01/view_html?idp=56

[http://it.wikipedia.org/wiki/Forse_che_s%C3%AC_forse_che_no_\(romanzo\).](http://it.wikipedia.org/wiki/Forse_che_s%C3%AC_forse_che_no_(romanzo))

-Sito ufficiale di Scratch

<http://scratch.mit.edu/>

-Learn Scratch

<http://learnscratch.org/>

-Alcuni dei tantissimi video-tutorial You Tube su Scratch

https://www.youtube.com/watch?v=0OGSw20n5YI&playnext=1&list=PLA8F238B754E84868&feature=results_main

-MIT App Inventor

<http://appinventor.mit.edu/>

-Il calcolo combinatorio

<http://utenti.quipo.it/base5/combinatoria/combinatorio.htm>

-Il calcolo delle probabilità:

<http://it.wikipedia.org/wiki/Probabilit%C3%A0>

Rosa Marincola

187. Casualità Matematica e Metodo Monte Carlo

Nicola De Nitti
nicoladenitti@gmail.com

Premessa

Il concetto di probabilità, impiegato a partire dal XVII secolo, è diventato con il passare del tempo fondamentale per diverse discipline. I primi studi che portarono a sviluppare concetti legati alla probabilità si ritrovano nel *Liber de ludo aleæ* di Girolamo Cardano (scritto nel 1526, ma pubblicato solo nel 1663) e in *Sulla scoperta dei dadi* di Galileo Galilei (pubblicato nel 1656), ma la nascita del concetto moderno di probabilità viene attribuita a Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665). Nel 1657 Christiaan Huygens (1629-1695) scrisse un *Libellus de ratiociniis in ludo aleæ*, il primo vero e proprio trattato sul calcolo delle probabilità. Nel 1713 venne pubblicato postumo *Ars conjectandi* di Jakob Bernoulli, in cui veniva dimostrato il teorema che porta il suo nome, noto anche come “legge dei grandi numeri”. Successivamente, de Moivre pervenne ad una prima formulazione, in seguito generalizzata da Pierre Simon Laplace (1749-1827), del fondamentale “Teorema del limite centrale”. La teoria della probabilità raggiunse così basi matematicamente solide e, dunque, il rango di nuova disciplina.

Il calcolo delle probabilità è uno strumento essenziale per la statistica, in quanto dà una risposta al problema inverso di quello della statistica inferenziale. Infatti, mentre essa cerca di determinare, tramite la conoscenza dei risultati di un esperimento (o più esperimenti), quali siano le caratteristiche della popolazione su cui tale sperimentazione è stata eseguita, nel calcolo delle probabilità, si assume che tutte le caratteristiche della popolazione siano note e si cerca di calcolare a priori la ‘probabilità’ che un esperimento abbia un determinato risultato.

Metodo Monte Carlo e casualità matematica

Negli ultimi anni ha assunto crescente importanza il “metodo Monte Carlo”, un metodo numerico basato su procedimenti probabilistici, usato in statistica per la risoluzione di problemi di varia natura che presentano difficoltà analitiche difficilmente (o non in altro modo) superabili. Tale metodo è stato citato in un articolo di J. Dongarra e F. Sullivan, pubblicato sulla prestigiosa rivista “Computing in Science and Engineering”, tra i dieci algoritmi con “la più grande influenza sullo sviluppo e la pratica della scienza e dell’ingegneria del XX secolo”. Il metodo Monte Carlo fu formalizzato negli anni ’40 del Novecento da John von Neumann e Stanislaw Marcin Ulam, che partecipavano al Progetto Manhattan per lo studio della dinamica delle esplosioni nucleari. A quanto pare, il nome “Monte Carlo” fu coniato da Nicholas Constantine Metropolis in riferimento alla capitale del Principato di Monaco, Montecarlo, dove ha sede il celebre casinò, luogo dell’aleatorietà per antonomasia. Infatti alla base dell’algoritmo ci sono proprio ripetuti campionamenti casuali.

Non è tuttavia una operazione semplice dare una definizione univoca di casualità matematica. Una tra le più note proposte di caratterizzazione formale di questo concetto (cioè quali criteri debba soddisfare una sequenza di numeri per essere casuale) è il criterio di Richard von Mises: una sequenza di numeri è casuale quando sono completamente assenti regole che possano essere applicate con successo per migliorare le previsioni circa il numero successivo della serie. Tale principio è noto come “principio dell’impossibilità di un sistema di gioco” (o “assioma del disordine”). Il criterio di von Mises presenta, tuttavia, una evidente ambiguità quando è applicato a sequenze infinite, in quanto viene a mancare la possibilità di qualsiasi controllo effettivo della casualità della sequenza stessa.

Negli anni ‘30, Karl Popper propose un altro tipo di sequenza casuale: una sequenza finita costruita con una regola matematica. Le idee di Popper si ritrovano nei sistemi fondati su algoritmi per la costruzione delle sequenze di numeri casuali che vengono comunemente adoperate. Tuttavia, è evidente che se si

conosce la legge con cui comporre una sequenza, questa non è più definibile, a rigore, casuale: ogni numero è infatti predicibile con probabilità pari al 100%.

Concetti chiave del metodo Monte Carlo

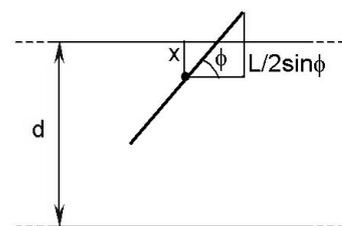
Con il termine di “metodo Monte Carlo” vengono in generale denominate tutte quelle tecniche che adoperano variabili aleatorie artificiali (ovvero generate con un calcolatore) per la risoluzione di problemi (quali il calcolo di quantità o la simulazione di fenomeni).

Spesso i ricercatori si trovano a fronteggiare situazioni in cui hanno bisogno di conoscere la probabilità di un determinato evento condizionato da un numero elevato di variabili che rendono molto difficoltosi i calcoli analitici. In tali situazioni, generalmente si adottano metodi di campionamento simulato (cioè si simula la situazione nella quale si vuole calcolare la probabilità di un certo evento). La simulazione stocastica si attua riproducendo il meccanismo preso in esame; sostituendo la valutazione analitica con l’osservazione empirica del fenomeno; e traendo da quest’ultima le informazioni non rilevabili per via analitica. Tuttavia, è accertato che questo non è il metodo più efficace per trovare la soluzione di un problema, in quanto la procedura del campionamento simulato porta ad un risultato sempre influenzato dall’errore statistico.

L’applicazione di questo metodo non è ristretta solamente ai problemi di natura statistica, ma include tutti i casi in cui è possibile trovare un collegamento tra il problema in esame ed il comportamento di un certo sistema aleatorio.

L’ago di Buffon

Le basi teoriche del metodo Monte Carlo risalgono al 1777, quando il matematico francese George Louis Leclerc, conte di Buffon (1707-1788), propose e risolse un curioso problema, che, per il profondo interesse che suscita, per la sua rilevanza storica, e per la semplicità dell’approccio con cui può essere affrontato, costituirà il principale oggetto d’analisi di questo articolo, insieme ad altri due esempi significativi dei concetti alla base del metodo Monte Carlo.



Questo problema, comunemente noto come “il problema dell’ago di Buffon” fa intervenire π in un contesto assolutamente originale. Buffon considerò un’area piana sulla quale erano state tracciate linee rette parallele a distanza d l’una dall’altra ed immaginò, poi, di lanciare ‘a caso’ sulla superficie un ago di lunghezza $L < d$. Si presentavano due eventualità: 1) l’ago incontrava una delle linee; 2) cadeva tra una linea e l’altra.

La condizione affinché l’ago incontri una retta è

$$x < \frac{L}{2} \sin \varphi$$

per cui per risolvere il problema è necessario calcolare la probabilità:

$$P\left(x < \frac{L}{2} \sin \varphi\right)$$

A tal fine, si può tentare un approccio geometrico, trasformando la definizione classica di probabilità in un rapporto tra aree convenientemente individuate.

I limiti geometrici del problema sono:

$$0 < x < \frac{d}{2} \text{ e } 0 < \varphi < \pi$$

Utilizzando un grafico (φ ; x), queste condizioni consentono di individuare un rettangolo la cui area costituisce la somma di tutte le possibili combinazioni tra l’orientazione dell’ago e la posizione del suo centro sul piano. Fra queste, le combinazioni favorevoli sono quelle individuate dai punti le cui coordinate soddisfano la condizione sopra determinata, ovvero da tutti i punti al di sotto della curva

$$x = \frac{L}{2} \sin \varphi$$

Da queste considerazioni segue:

$$P\left(x < \frac{L}{2} \sin \varphi\right) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{\frac{L}{2} \int_0^{\pi} \sin \varphi \cdot d\varphi}{\pi \cdot \frac{d}{2}}$$

ovvero: $P = \frac{2L}{\pi d}$.

Dunque, è possibile calcolare π utilizzando la formula:

$$\pi = \frac{2L}{Pd}$$

Dal punto di vista di un elaboratore elettronico, il procedimento seguito nella risoluzione del problema può essere così schematizzato:

- generare una prima sequenza di numeri casuali (x) per simulare la posizione dell'ago;
- generare una seconda sequenza di numeri casuali (φ) per simulare l'orientazione dell'ago;
- controllare che ogni coppia di numeri casuali x e φ verifichi o meno la disuguaglianza che caratterizza il problema;
- contare quante volte la condizione è soddisfatta (tenendo conto del numero di prove effettuate);
- calcolare π .

Il problema e la soluzione proposta da Buffon furono, tuttavia, persi di vista finché Pierre Simon Laplace (1749-1827) ne propose una generalizzazione, così gettando le basi del metodo Monte Carlo.

Metodo Monte Carlo per la determinazione di π

Esiste un secondo modo per determinare le cifre decimali di π adoperando il metodo Monte Carlo (cambia unicamente l'evento casuale preso in considerazione).

Si suppone di lanciare N freccette ad un bersaglio costituito da un quadrato di lato $2L$ circoscritto ad una circonferenza. Si assume che le freccette vengano lanciate casualmente all'interno del quadrato e che, quindi, colpiscano il quadrato in ogni posizione con uguale probabilità. Per analizzare questa situazione, si può stabilire un sistema cartesiano xOy avente per origine il centro della circonferenza, in cui la posizione di ogni freccetta sarà indicata da un punto individuato da una coppia 'casuale' di coordinate: $Z_i(x; y)$.

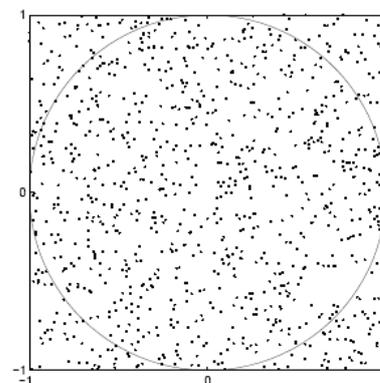
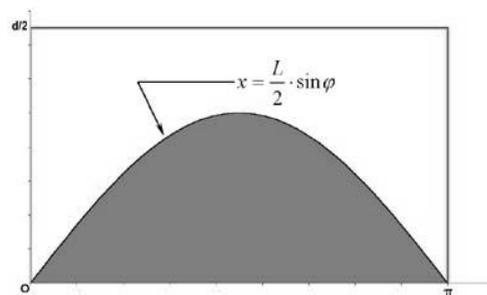
Dopo un numero consistente di lanci, la frazione di freccette che ha colpito la circonferenza (ovvero il numero di punti che hanno distanza dall'origine minore del raggio della circonferenza) sarà circa uguale al rapporto tra l'area della circonferenza e quella del quadrato.

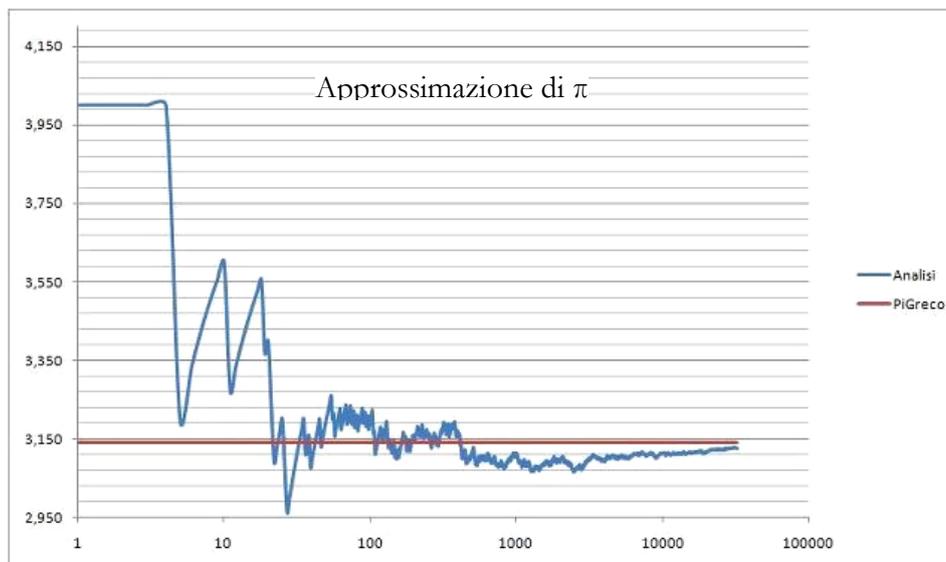
Pertanto:

$$\frac{\pi L^2}{4L^2} = \frac{1}{4} \pi \cong \frac{N_c}{N}$$

dove N è il numero totale di freccette lanciate e N_c indica il numero di freccette cadute all'interno della circonferenza.

Si potrà dunque usare il valore $\frac{4N_c}{N}$ come approssimazione di π .





Si può notare che la stima di π migliora all'aumentare di N . Tuttavia, la convergenza è tutt'altro che veloce ed uniforme: la presenza di fluttuazioni dovute all'approccio probabilistico è, infatti, una caratteristica del metodo Monte Carlo.

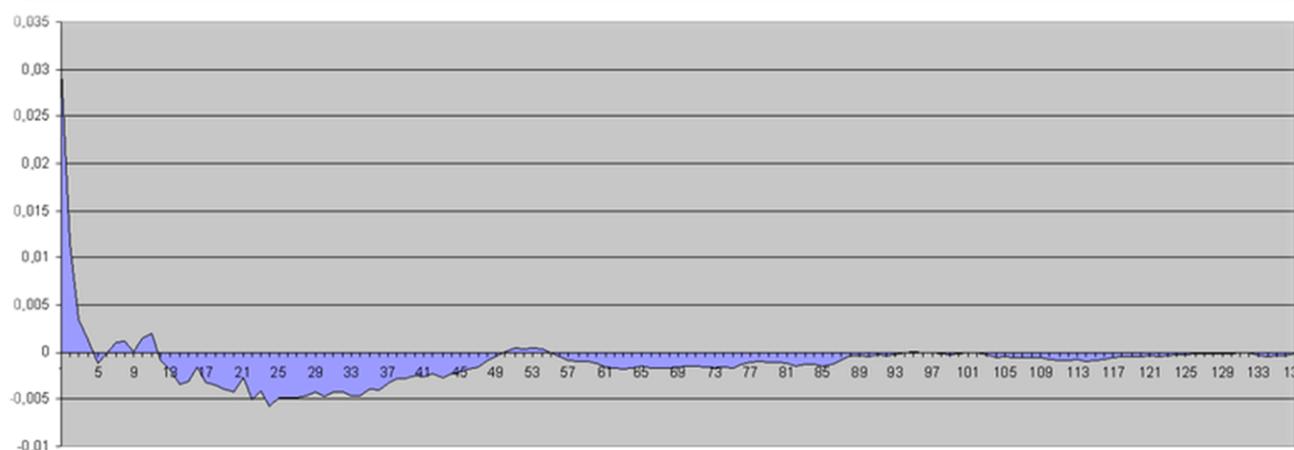


Immagine tratta da http://it.wikipedia.org/wiki/File:Errore_montecarlo_calcolo_pi_greco.PNG

Andamento percentuale dell'errore tra il π teorico e il π calcolato. Il programma ha eseguito 1370 milioni di lanci. Si noti che, all'inizio, l'errore è molto elevato, ma rapidamente tende a decrescere.

Determinazione della superficie di una figura piana

In molti casi pratici, il calcolo dell'area di una regione di piano richiede troppe variabili per darne una stima in modo rapido (è il caso del calcolo della superficie di una macchia). Anche in questo caso è possibile adoperare il metodo Monte Carlo per trovare almeno un valore approssimativo della misura cercata. Come si evince dagli esempi precedenti, la probabilità P che un punto appartenga ad una superficie piana S_1 racchiusa all'interno di un'altra superficie piana S_2 è data dal rapporto fra le aree delle due superfici.

Viceversa, nota la probabilità P , possiamo affermare che l'area di S_1 è uguale al prodotto di P per l'area di S_2 .

$$S_1 = P \cdot S_2$$

Per un gran numero di prove, si può sostituire a P la frequenza relativa f_n :

$$S_1 = f_n \cdot S_2$$

Considerazioni

Sono numerosi ormai i campi in cui si utilizzano metodi statistici per ottenere informazioni e stime su fenomeni legati al caso. In questi contesti non occorre nemmeno che i dati siano raccolti durante un esperimento reale: infatti, possono anche provenire da simulazioni effettuate per mezzo di un computer attraverso l'uso di sequenze di numeri casuali. Esse sono utilizzate per simulare per migliaia di volte il fenomeno aleatorio, e per raccogliere rapidamente serie di dati che, trattati con metodi statistici, forniscono stime che diventano tanto più attendibili quanto più è grande il numero delle prove eseguite. Oggi il metodo Monte Carlo trova applicazione in vari ambiti scientifici, fra cui l'analisi di problemi fisici che richiederebbero esperimenti difficilmente realizzabili. In questi casi il metodo Monte Carlo costituisce uno strumento vitale per la verifica di nuove teorie.

Bibliografia

BECKMANN, P., *A History of Pi*, St. Martin's Press, New York, 1971.

DEL PICCOLO, A., *Appunti per una lezione*.

http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argomento/APPUNTI/TESTI/Apr_03/APPUNTI.LHTM

DONGARRA, J. e SULLIVAN, F., *Guest editors' introduction: the top 10 algorithms*, in "Computing in Science and Engineering", 2(1):22–23, January/February 2000.

GOULD, H. e TOBOCHNIK, J., *An Introduction to Computer Simulation Methods*, Addison-Wesley, New York, 1988.

ROBERT, C. P. e CASELLA, G., *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer-Verlag, New York, 2004.

188. SUCCESSIONI E FAMIGLIE DI NUMERI INTERI

Stefano Borgogni
e-mail: stfbrg@rocketmail.com

*“La Matematica è la regina delle scienze e la Teoria dei Numeri è la regina della Matematica”
(C.F. Gauss)*

SUNTO

Questo studio, senza alcuna pretesa di essere esaustivo di un argomento tanto vasto, intende trattare alcuni insiemi di numeri interi che, per maggiore chiarezza, saranno suddivisi in due tipologie: successioni e famiglie.

Da un lato si prenderanno in considerazione le successioni di interi calcolabili con una formula ben precisa; un caso semplicissimo è quello dei numeri pari, che si possono definire tramite la relazione $n=m \times 2$ (con m intero).

Nella seconda parte, invece, saranno esaminate famiglie di numeri che hanno determinate proprietà, ma non sono costruibili tramite una formula. L'esempio più immediato potrebbe essere quello dei numeri primi, visto che non esiste alcun modo per prevedere la loro successione.¹

Questa suddivisione, peraltro, va intesa solo come un'indicazione di massima - utile per dare un ordinamento alle informazioni e agevolarne la lettura - in quanto vi sono casi in cui il confine tra le due tipologie non è così netto.

Saranno esaminati gruppi di numeri di cui probabilmente hanno sentito parlare solo gli appassionati di matematica (ad esempio, i Numeri di Achille), insieme ad altri sui quali - al contrario - esiste un'ampia letteratura: vedi i Numeri di Fibonacci.

Inoltre, per ogni insieme di numeri saranno messe in evidenza le possibili varianti, nonché alcune proprietà curiose o sorprendenti.

1 - SUCCESSIONI DI NUMERI INTERI²

In primo luogo, vediamo una tabella che riporta sinteticamente le caratteristiche principali delle successioni numeriche che saranno esaminate nel prosieguo del testo. Per completezza, compaiono nella tabella suddetta anche le svariate tipologie di **Numeri Figurati** (Poligonali, Stella etc.), numeri di cui non si parlerà in questa sede, poiché ad essi è già stato dedicato un articolo specifico pubblicato qualche anno fa su questa stessa rivista.³

¹ Si tratta di uno dei problemi insoluti più importanti nella teoria dei numeri, a cui si sono dedicati, invano, i migliori matematici di diverse epoche. Tra le più recenti opere sull'argomento, si segnala *The music of the primes*, tradotta in italiano con l'assai meno significativo titolo *L'enigma dei numeri primi*, di Marcus De Sautoy, 2005.

² Per approfondire il tema, si può consultare il sito Internet <https://oeis.org> (OEIS sta per *On-line Encyclopedia of Integer Sequences*), che raccoglie le più svariate sequenze di numeri interi. Il sito viene aggiornato costantemente dagli stessi “internauti” e attualmente - Giugno 2013 - consta di oltre 226.000 successioni diverse (molte delle quali, per la verità, piuttosto cervellotiche).

³ Stefano Borgogni, *Numeri figurati* in *Matematicamente magazine* n.16 (dic. 2011).

Nome	Descrizione	Primi numeri della serie	Formula
Poligonal	Punti di un poligono di s lati	dipende dal numero di lati	$[(s-2)n^2-(s-4)n] / 2$
Poligonal centrati	Punti di un poligono di s lati con centro	dipende dal numero di lati	$(sn^2-sn+2) / 2$
Stella	Punti di una stella regolare a 6 punte	1-13-37-73-121-181-253	$6n(n-1)+1$
Piramidali	Punti di una piramide con base di s lati	dipende dal numero di lati	$n(n+1)[(s-2)n+5-s] / 6$
Fattoriale	Prodotto dei primi n interi	1-2-6-24-120-720-5.040	$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \dots$
Fattoriale doppio	Prodotto di n per il fattoriale doppio di (n-2)	1-2-3-8-15-48-105-384	$n!! = n \times (n-2)!!$
Fattoriale triplo	Prodotto di n per il fattoriale triplo di (n-3)	1-2-3-4-10-18-28-80-162	$n!!! = n \times (n-3)!!!$
Superfattoriale	Prodotto dei primi n fattoriali	1-2-12-288-34.560	$Sf(n) = n! \times (n-1)! \times (n-2)! \dots$
Derangement	Dismutazioni (permutazioni con nessun oggetto nell'ordine iniziale)	0-1-2-9-44-265-1.854	$!n = (n-1) \times [!(n-1) + !(n-2)]$
di Fibonacci	Somma 2 numeri precedenti (inizio 1-1)	1-1-2-3-5-8-13-21-34-55	$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
di Lucas	Somma 2 numeri precedenti (inizio 1-3)	1-3-4-7-11-18-29-47-76-123	$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$
Tribonacci	Somma 3 numeri precedenti (inizio 1-1-2)	1-1-2-4-7-13-24-44-81-149	$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$
di Catalan		1-2-5-14-42-132-429-1.430	$2 \times 6 \times \dots (4n-10) / (n-1)!$
di Bell	Partizioni di un insieme di n elementi	1-2-5-15-52-203-877-4.140	(vedi Triangolo di Bell)

1.1 - Fattoriale

Cominciamo questo excursus con una delle sequenze numeriche più note in assoluto, il **Fattoriale**, che, com'è noto, si ottiene moltiplicando successivamente i numeri interi a partire da 1.

Il punto esclamativo, proposto dal matematico tedesco Kramp nel 1807, è dovuto, si dice, alla sorpresa manifestata dal suo inventore per la rapidità con cui questi numeri crescono: il Fattoriale determinato da un numero relativamente piccolo come 15, ad esempio, è già un gigante di 12 cifre, ossia dell'ordine delle centinaia di miliardi.

Il Fattoriale è legato in particolare al calcolo combinatorio e alla probabilità, campi nei quali riveste un'importanza fondamentale. Ricordiamo solo le due formule più note che la riguardano, rimandando a testi specifici per eventuali approfondimenti:

il numero di possibili permutazioni di n oggetti è pari a n!

le possibili scelte di k oggetti su un totale di n (con n, ovviamente, maggiore di k) sono espresse dal cosiddetto coefficiente binomiale, una formula in cui il Fattoriale la fa "da padrone":

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Va aggiunto, però, che il Fattoriale ha anche altre importanti applicazioni; ad esempio, si ritrova con frequenza nel calcolo infinitesimale. Il caso più evidente riguarda la derivazione delle funzioni polinomiali: la derivata n-esima di x^n vale per l'appunto n!

Il numero n! può essere approssimato con la **Formula di Stirling**, $n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, una formula estremamente interessante, che mette insieme tre operazioni fondamentali (prodotto, elevamento a potenza, estrazione di radice) e coinvolge i due più importanti numeri trascendenti, e e π .

Proprietà numeriche e curiosità

La definizione stessa del Fattoriale implica che ogni 5 termini si aggiunga al numero una cifra finale "0". Ciò consente, dato un numero n!, di risalire a n con un'ottima approssimazione; ad esempio, se il numero n! ha 6 zeri al fondo, si può dedurre immediatamente che n è compreso tra 30 e 34.

Il **Teorema di Wilson**, risalente al XVIII secolo, afferma che $(n-1)!+1$ è divisibile per n se e solo se n è un numero primo. Ad esempio, $6!+1 = 721$, che equivale a 103×7 .

A parte il caso banale di $1!$ e $2!$, esistono due Fattoriali $m!$ e $n!$ il cui prodotto dia come risultato ancora un Fattoriale? La risposta è “Sì”; vale, infatti, l'identità $6! \times 7! = 10!$. Non sono noti altri prodotti del genere, anche aumentando il numero di fattori moltiplicativi ($m! \times n! \times p! \dots$).

Un altro problema irrisolto è il seguente: sono infiniti i Fattoriali che, aumentati di 1, producono un quadrato perfetto?⁴ E' facile verificare che $4!$, $5!$ e $7!$ hanno questa proprietà (da essi si ottengono rispettivamente 25, 121 e 5.041, cioè 5^2 , 11^2 e 71^2), ma finora non sono stati trovati altri numeri del genere, né è stato dimostrato che non ne esistono.

Riguardo a $7!$ (5.040) - che compare in entrambi i quesiti appena visti - va ricordata anche una curiosità di tipo filosofico: il numero di abitanti immaginato da Platone per la sua città ideale⁵ è proprio questo. Si tratta di un numero che - senza essere troppo grande - ha ben 58 divisori propri e, dunque, si presta ottimamente per suddividere la popolazione in parti uguali con diversi possibili scopi: distribuzione di terre, tasse etc.

Varianti del Fattoriale

Tra le possibili varianti, ricordiamo il **Fattoriale doppio** che, sulla falsariga del caso normale, si indica con il doppio punto esclamativo e si costruisce tramite la formula ricorsiva $n!! = n \times (n-2)!!$

Il Fattoriale doppio di un numero n equivale al prodotto dei primi numeri pari o dispari fino allo stesso n : ad esempio, $6!!$ è dato da $6 \times 4 \times 2$ (48), mentre $5!!$ si ottiene dal prodotto $5 \times 3 \times 1$ (15). Da quanto detto si deduce che in questa successione vi è un'alternanza continua di numeri pari e numeri dispari.

I primi termini della sequenza sono: 1, 2, 3, 8, 15, 48, 105, 384, 945 ...

Esiste una semplice formula - agevolmente ricavabile a partire dalle definizioni stesse delle due successioni - che lega tra loro Fattoriale e Fattoriale doppio: $n! = n!! \times (n-1)!!$

Analogamente a quanto visto fin qui, il numero $n!!! = n \times (n-3)!!!$ è definito **Fattoriale triplo**; i suoi primi termini sono 1, 2, 3, 4, 10, 18, 28, 80, 162 ... A parte 3, questa sequenza è composta esclusivamente da numeri pari poiché in ogni prodotto c'è sempre almeno un fattore pari.

Nel già citato sito OEIS vengono riportati anche il Fattoriale quadruplo e quello quintuplo, che si costruiscono allo stesso modo dei precedenti.

Un'altra variante sul tema è il cosiddetto **Superfattoriale**, definito come il prodotto dei primi n fattoriali; in sostanza $Sf(n) = n! \times (n-1)! \times (n-2)! \dots$. Ad esempio, $Sf(4)$ vale $1 \times 2 \times 6 \times 24$, cioè 288.

Com'è facile immaginare, questa successione produce rapidamente numeri enormi; basta osservare come cresce, anche solo limitandosi ai primi termini: 1, 2, 12, 288, 34.560, 24.883.200...

1.2 - Numeri Derangement

Capovolgiamo adesso la notazione, passando da $n!$ a $!n$: quest'ultima, infatti, è la simbologia normalmente usata per indicare i **Numeri Derangement**.

Un *derangement* (o dismutazione) è una permutazione di n oggetti in cui nessuno rimane nell'ordine naturale. Ad esempio, immaginiamo il caso di n persone che entrano in teatro lasciando nel guardaroba i propri n cappelli, i quali, però, vengono sistemati alla rinfusa. Si ha un derangement se all'uscita nessuno riprende il proprio copricapo.⁶

Ovviamente, per $n=1$, $!n$ vale 0 (si tratta di uno dei rari casi di successione di interi che non comincia per 1); i termini successivi sono 1, 2, 9, 44, 265, 1.854, 14.833 ...

Nella sequenza si alternano costantemente numeri pari e numeri dispari.

Vi sono due formule piuttosto semplici per costruire i Numeri Derangement.

La prima, di tipo ricorsivo, è $!n = (n-1) \times (!n-1 + !n-2)$; l'altra, ancora più immediata, è $!n \approx n!/e$. In altre parole, l' n -esimo numero della successione può essere ricavato semplicemente prendendo l'intero più vicino al rapporto tra $n!$ e il numero e .

⁴ Si tratta del cosiddetto “Problema di Brocard”, dal nome del matematico francese che pose per primo la questione.

⁵ Platone ne parla nell'opera “*La Repubblica*” (in greco Πολιτεία, *Politéia*).

⁶ A volte viene citato come esempio quello della “segretaria pasticciona”, che infila N lettere in N buste in maniera tale che nessuna lettera viene spedita all'indirizzo corretto.

La successione fu studiata per la prima volta nel 1708 da Pierre de Montmort; successivamente, se ne occuparono anche Nicholas Bernoulli, appartenente alla ben nota famiglia di matematici, e Leonhard Euler (Eulero), che - oltre a portare contributi fondamentali in tutte le branche della matematica “seria” - ha legato il suo nome anche a moltissime questioni di matematica ricreativa.

In particolare, il grande matematico di Basilea studiò un’applicazione di questi numeri al campo della probabilità con il cosiddetto “*Jeu du rencontre*”: due giocatori A e B voltano contemporaneamente una a una le carte di due mazzi uguali; se almeno una volta girano la stessa carta, A vince; se ciò non avviene (cioè si verifica il derangement) vince B. Quali sono le probabilità di vittoria dei due giocatori?

Evidentemente, nel caso di due carte la probabilità è del 50% per ciascun giocatore, mentre con tre carte A vince in un numero di casi pari a 2/3. Questa è la situazione più favorevole al primo giocatore, che comunque mantiene sempre una maggiore probabilità di vittoria secondo la formula

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots \pm \frac{1}{n!}$$

Al crescere di n, tale probabilità tende a $1 - 1/e$, cioè vale all’incirca 0,63; in sostanza, in un gioco come quello analizzato da Eulero, il giocatore A può aspettarsi di vincere circa 63 volte su 100. Vale la pena di sottolineare che se anche le carte da girare fossero 1.000 o 100.000 (anziché 52), tale probabilità resterebbe sostanzialmente invariata.

1.3 - Numeri di Fibonacci

I **Numeri di Fibonacci** prendono il nome dal più importante matematico europeo del ‘200, Leonardo da Pisa, detto per l’appunto Fibonacci, cioè “figlio di Bonaccio”.

Commerciando con il padre, era entrato in contatto con la cultura matematica araba e fu il primo a promuovere il sistema posizionale arabo-indiano,⁷ comprendendo i suoi enormi vantaggi rispetto alla numerazione romana ancora in uso in Europa.

L’opera principale di Leonardo da Pisa, il *Liber abaci*, è ricca di contributi matematici, ma il suo nome resta legato a una successione di numeri che compaiono in un indovinello relativo all’accrescimento di una popolazione di conigli,⁸ la cui soluzione è data, per l’appunto, da quelli che oggi chiamiamo Numeri di Fibonacci, ossia la successione in cui - partendo dalla coppia 1-1 - ogni termine è dato dalla somma dei due precedenti: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 etc.

Curiosamente, il matematico pisano ma non si soffermò affatto sulle proprietà della “sua” serie, che venne studiata approfonditamente solo nella seconda metà dell’800 dal matematico francese Edouard Lucas:⁹ fu proprio lui a darle il nome con cui oggi è universalmente nota.

Per capire quale importanza abbia questa successione nel mondo matematico, basta citare un dato: negli USA si pubblica da ben 50 anni (il primo numero è proprio del 1963) una rivista trimestrale denominata *The Fibonacci Quarterly*, edita dalla Fibonacci Association.

Negli ultimi anni i Numeri di Fibonacci hanno acquistato notorietà anche presso una vastissima platea di non addetti ai lavori, dopo la pubblicazione del best-seller di Dan Brown, *Il codice da Vinci*. Peraltro, molti altri scrittori (e artisti in genere) sono rimasti affascinati da questa successione numerica; ad esempio, il pittore e scultore Mario Merz inserisce spesso i Numeri di Fibonacci nelle sue opere, come emblema della crescita organica e dell’energia insita nella materia.¹⁰

Ma qual è il motivo del successo di questa sequenza? Probabilmente, esso si deve al contrasto tra la sua estrema semplicità e l’incredibile quantità di applicazioni che ha, in ambiti talora insospettabili.

⁷ Aggiungiamo che all’epoca la proposta di Fibonacci non ebbe molto successo. Tra le altre cose, si racconta che a Firenze il sistema posizionale fosse stato rifiutato in quanto ... sostenuto da un pisano!

⁸ Data una coppia di conigli, si suppone che diventi fertile dopo un mese e dia alla luce una nuova coppia dopo un altro mese. Considerando che tutte le nuove coppie si comportino allo stesso modo, quante coppie di conigli ci saranno alla fine di ogni mese? Per maggiori dettagli, si rimanda all’ampia letteratura esistente sui Numeri di Fibonacci.

⁹ Tra le altre cose, Lucas si occupò di matematica ricreativa e fu l’inventore del rompicapo noto come “Torre di Hanoi”, che diffuse sotto lo pseudonimo di *N. Claus de Siam*, anagramma di *Lucas d’Amiens*.

¹⁰ I primi numeri della successione compaiono, tra l’altro, sull’installazione luminosa “*Il volo dei numeri*”, collocata sulla Mole Antonelliana di Torino.

In particolare, i Numeri di Fibonacci compaiono in natura con una frequenza impressionante. Lasciando da parte il già citato indovinello dei conigli, li ritroviamo ovunque nel mondo vegetale: dai fiori (quasi tutti hanno 3 o 5 o 8 o 13 o 21 o ... petali) alle file di squame degli ananas, agli elementi conici ripetuti in un cavolfiore.

Per maggiori dettagli, si rimanda all'ampia letteratura esistente sul tema; ci limitiamo in questa sede a citare uno dei casi più stupefacenti, quello dei girasoli.

Le infiorescenze al centro di questo fiore sono disposte lungo due insiemi di spirali che girano in senso orario e antiorario. Di norma vi sono 34 spirali in senso orario e 55 in senso antiorario (oppure 55 e 89); alcune specie giganti hanno rispettivamente 89 e 144 spirali: ebbene, tutti i numeri indicati appartengono alla successione di Fibonacci.

Tornando a un ambito più prettamente matematico, i "Fibonacci" compaiono in problemi come la generazione di numeri casuali o i metodi di approssimazione di massimi e minimi in alcune funzioni particolari, argomenti che non trattiamo in questa sede.



Due esempi della presenza dei Numeri di Fibonacci in natura

Proprietà numeriche e curiosità

Il valore dell'*n*-esimo numero di Fibonacci si può calcolare direttamente, senza bisogno di conoscere i

due precedenti; la formula è: $F_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$,¹¹ ossia il rapporto, arrotondato all'intero più vicino, tra il

numero aureo φ elevato a *n* e la radice di 5.

Una notevole proprietà della successione riguarda il rapporto tra due termini consecutivi, che tende a $(1+\sqrt{5})/2$, ossia al valore dello stesso φ . In particolare, il rapporto F_n/F_{n-1} dà un numero che è alternativamente maggiore e minore rispetto al numero aureo, ma si avvicina sempre più al limite, al crescere di *n*.

I Numeri di Fibonacci possono essere pari o dispari, ma osservano sempre una stessa regola: si alternano due dispari e un pari, poi altri due dispari e un pari e così via.

Non si sa se all'interno della successione i primi siano o meno infiniti, ma se un numero di Fibonacci F_k è primo, anche il suo indice *k* lo è. Non è vero il contrario: ad esempio, $F_{19} = 4.181$, che non è primo (equivale a 113×37).

A parte 1, l'unico quadrato perfetto è 144, che tra l'altro corrisponde a F_{12} , ossia al dodicesimo numero della serie; si tratta di una coincidenza notevole: il numero, infatti, equivale esattamente al quadrato del proprio indice. L'unico cubo perfetto della successione (1 escluso) è 8.

Infine, ecco alcune proprietà numeriche che legano tra loro due o più Numeri di Fibonacci:

Per qualsiasi *n*, vale la relazione $F_n^2 = (F_{n-1} \times F_{n+1}) \pm 1$: ad esempio, $8^2 = (5 \times 13) - 1$.

Legata alla precedente è anche questa proprietà: dati quattro termini consecutivi A, B, C e D, si verifica che $C^2 - B^2 = A \times D$. Ad esempio, $13^2 - 8^2 = 105$, che equivale a 5×21 .

¹¹ Si tratta di un valore approssimato che deriva dalla cosiddetta "Formula di Binet" (matematico e astronomo francese del primo '800): $F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}$

$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ (ad esempio, $F_5^2 + F_6^2 = F_{11}$, cioè $5^2 + 8^2 = 89$).

La sommatoria dei primi n termini vale F_{n+2} meno F_2 (cioè 1). Ad esempio, con 7 termini si ha: $1+1+2+3+5+8+13 = 33$, pari a $F_9 - 1$. Tale regola rimane valida anche se si prendono n numeri consecutivi a partire da un qualsiasi termine della successione.¹²

E tutto questo è solo “un campione” delle innumerevoli proprietà numeriche che possiede la successione di Fibonacci.

1.4 - Numeri di Lucas

Non è difficile immaginare le possibili varianti ai Numeri di Fibonacci: basta partire da una coppia di interi diversa da 1-1 e applicare successivamente la regola additiva per cui ogni termine è pari alla somma dei due che lo precedono.

La scelta più naturale è quella della coppia 1-3 (ovviamente, non va bene la coppia 1-2, poiché in tal caso si ripresenterebbe la successione di Fibonacci “normale”). Operando in tal modo si ottengono i cosiddetti **Numeri di Lucas**, che prendono il nome dal già citato matematico che più di ogni altro si è dedicato a questo tipo di sequenze numeriche.

I primi termini della successione sono 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123 ...

Proprietà numeriche e curiosità

Come per i “Fibonacci”, si alternano costantemente due numeri dispari e uno pari, e si ignora se i numeri primi siano o meno infiniti.

Il valore dell' n -esimo numero di Lucas si può calcolare direttamente per mezzo di una formula estremamente semplice: $L_n = [\varphi^n]$.

Il limite del rapporto tra numeri consecutivi della sequenza è lo stesso già visto per i “Fibonacci”, cioè il numero aureo φ , con valori che sono alternativamente maggiori o minori del limite.¹³

Escluso 1, l'unico numero di Lucas che sia anche un quadrato perfetto è 4, mentre non ci sono cubi perfetti all'interno della successione.

Analogamente a quanto visto per i Numeri di Fibonacci, anche per quelli di Lucas esiste una semplice relazione che collega tre termini consecutivi; la formula è $L_n^2 = (L_{n-1} \times L_{n+1}) \pm 4$: in sostanza, basta sostituire F_n con L_n e 1 con 4.¹⁴

Infine, un accenno ad alcune delle molteplici relazioni esistenti tra Numeri di Fibonacci e di Lucas.

Esistono due semplici formule che legano tra di loro i numeri appartenenti alle due sequenze: la prima è $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$; la seconda $F_n \times L_n = F_{2n}$. Vediamo un esempio per ciascuna formula: $L_6 = F_5 + F_7$ ($18 = 5 + 13$); $F_4 \times L_4 = F_8$ ($3 \times 7 = 21$).

Le due successioni non hanno alcun numero in comune, ad eccezione dei due casi banali 1 e 3.

Il rapporto tra n -esimo “Lucas” e n -esimo “Fibonacci” (L_n/F_n) tende a $\sqrt{5}$; anche in questo caso i valori sono alternativamente maggiori o minori del limite.

1.5 - Numeri Tribonacci e altre successioni additive

Tra le possibili varianti sul tema delle successioni additive, vale la pena di citare quelli che, per assonanza con la sequenza standard, sono stati denominati **Numeri Tribonacci**¹⁵, ossia i numeri che si costruiscono sommando ogni volta tre termini anziché due.

¹² Questa notevole proprietà è alla base di alcuni “trucchi” matematici, come il seguente: fate scegliere a qualcuno due numeri interi e fategli costruire una sequenza applicando la regola dei Numeri di Fibonacci. Tirate una riga in modo da lasciare due numeri sotto la riga stessa. Ora stupite tutti calcolando “al volo” la somma di tutti i numeri al di sopra della riga: essa è pari all'ultimo numero scritto meno il secondo. Provare per credere!

¹³ Ciò vale per tutte le “successioni di Fibonacci generalizzate”, ossia le sequenze additive che, a partire da una coppia di interi positivi qualunque, si sviluppano secondo le regole viste.

¹⁴ Una regola simile, cambiando opportunamente la costante da sommare o da sottrarre, vale per qualsiasi serie additiva.

¹⁵ Questo nome si deve a Mark Feinberg, precoce matematico che a soli 14 anni, nel 1963, pubblicò un articolo in proposito sul *Fibonacci Quarterly*. Feinberg morì pochi anni dopo in un incidente stradale.

La successione inizia con i numeri 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 125 ... Nella sequenza si alternano costantemente due numeri pari e due dispari.

Un dato interessante è che, al crescere di n , il rapporto TR_{n+1}/TR_n tende alla radice reale compresa tra 1 e 2 del polinomio x^3-x^2-x-1 (1,83929...). Non è un caso; al contrario, una regola simile vale per tutte le successioni additive costruite a partire dalla coppia 1-1, compresa quella di Fibonacci: il numero ϕ , infatti, non è altro che la radice positiva del polinomio x^2-x-1 .

Analogamente, sono stati definiti **Numeri Tetranacci** i numeri pari alla somma dei precedenti quattro interi. Senza approfondire più di tanto, segnaliamo che - com'è facilmente immaginabile da quanto visto in precedenza - il rapporto TE_{n+1}/TE_n tende a un valore (1,92756...) che corrisponde a una radice del polinomio $x^4-x^3-x^2-x-1$.

L'elenco potrebbe continuare con i "Pentanacci", gli "Esanacci" etc., sui quali non ci soffermiamo, rimandando per maggiori dettagli al già citato sito OEIS. Ci limitiamo a far rilevare che - al crescere di n - il rapporto tra due Numeri "N-nacci" consecutivi si avvicina sempre più al valore-limite 2.

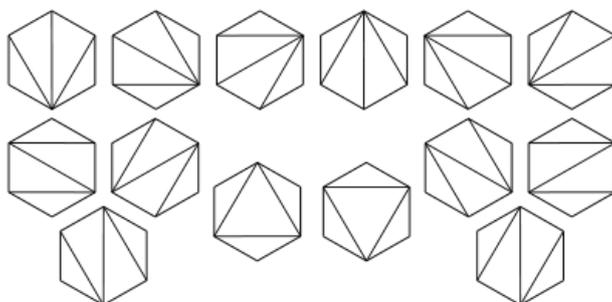
1.6 - Numeri di Catalan

Chi non abbia mai sentito parlare di questi numeri, leggendo "Catalan Numbers" nella dizione inglese potrebbe ragionevolmente pensare che essi siano legati in qualche modo alla Catalogna. Niente di tutto ciò: questi numeri non hanno nulla a che fare con Barcellona e dintorni, ma prendono il nome dal matematico belga Eugène Charles Catalan, che li studiò nel XIX secolo.

In realtà, come per i Numeri di Fibonacci, non vi è corrispondenza tra il nome dello scopritore e quello della successione: in questo caso, il primo in Europa¹⁶ a occuparsene fu il "solito" Eulero.

Partendo dalla domanda "In quanti modi diversi si può dividere un poligono convesso in triangoli, tracciando diagonali che non si intersecano?", Eulero scoprì - per l'appunto - la sequenza che stiamo esaminando: la risposta al quesito, infatti, è data dall' n -esimo numero di Catalan, con n equivalente al numero di lati del poligono meno due.

Ad esempio, il numero di modi diversi in cui si può dividere un esagono con le regole sopra descritte è 14, cioè C_4 , il quarto numero della successione.



I primi **Numeri di Catalan** sono: 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1.430 ...

Eulero elaborò anche una (tutt'altro che semplice) formula generale per calcolare i termini di questa successione: $2 \times 6 \times \dots (4n-10) / (n-1)!$, con n intero positivo e maggiore di due.

I Numeri di Catalan hanno - come quelli di Fibonacci - la tendenza a comparire inaspettatamente in svariate situazioni, come nell'esempio sopra citato; il loro campo d'applicazione è, però, assai più ristretto, limitandosi sostanzialmente al calcolo combinatorio.

Una interessante proprietà di questi numeri è che sono tutti pari, tranne quelli di posizione 2^n-1 (ossia quelli di posto 1, 3, 7, 15 etc.). In altre parole, si può dire che in questa successione vi sono sequenze sempre più lunghe di numeri pari intervallate da un solo numero dispari.

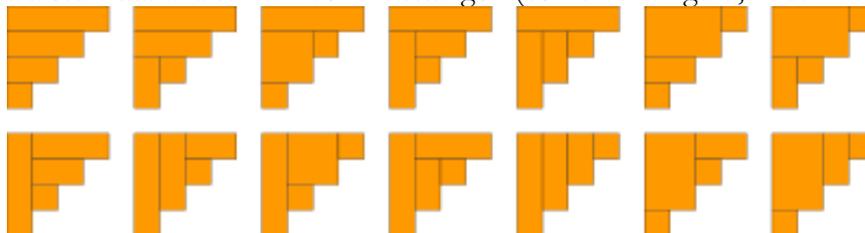
Tra i molti problemi la cui soluzione è data dai Numeri di Catalan, ne citiamo ancora due; C_n è il numero di modi diversi in cui è possibile:

inserire n coppie di parentesi in un prodotto di $n+1$ fattori (ecco l'esempio per $n=3$):

¹⁶ Va specificato "in Europa" poiché questa successione era già stata scoperta e utilizzata alcuni anni prima in Cina (nel 1730) dal matematico e astronomo mongolo Minggatu.

$$(((ab)c)d) \quad ((a(bc))d) \quad ((ab)(cd)) \quad (a((bc))d) \quad (a(b(cd)))$$

tagliare una forma a scalinata di altezza n con n rettangoli (come nella figura, in cui n vale 4):



Infine, si segnala un collegamento tra i Numeri di Catalan e la teoria dei grafi: C_n è il numero di alberi planari trivalententi (cioè tali che in ogni biforcazione confluiscono esattamente tre linee) e che hanno uno e un solo “tronco” uscente dalla “radice”.

1.7 - Numeri di Bell¹⁷

Molto simili ai Numeri di Catalan, ma da non confondere con essi, sono i **Numeri di Bell**, definiti come le possibili partizioni di un insieme di n elementi, cioè il numero di modi in cui questo insieme può essere ottenuto come unione disgiunta di suoi sottoinsiemi non vuoti.

Un esempio può chiarire meglio il concetto: $B_3 = 5$ in quanto per un insieme di tre elementi {a,b,c} esistono cinque differenti modi di dividerlo in sottoinsiemi non vuoti:

$$\{a\}, \{b\}, \{c\} / \{a,b\}, \{c\} / \{a,c\}, \{b\} / \{a\}, \{b,c\} / \{a,b,c\}.$$

La successione comincia con i seguenti numeri: 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4.140 ...

Esiste sia una formula di tipo ricorsivo, sia una che permette di calcolare direttamente l'n-esimo numero di Bell, ma sono entrambe alquanto complicate. C'è, invece, un modo molto semplice per costruire questa sequenza, utilizzando il cosiddetto “Triangolo di Bell” (o “Matrice di Aitken”).

Tale triangolo si può ricavare con un procedimento più complicato da spiegare che da mettere in pratica. Si scrive 1 nella prima riga. La seconda riga inizia con l'ultimo numero della riga precedente, poi si aggiunge come secondo numero la somma tra il numero precedente e quello posizionato al di sopra:

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1 \quad 2 \quad (1+1) \end{array}$$

La terza riga inizia con l'ultimo numero della seconda; poi si scrive il numero ottenuto sommando il numero precedente con il numero che gli sta sopra e si ripete 2 volte lo stessa operazione:

1

$$\begin{array}{l} 1 \quad 2 \\ 2 \quad 3 \quad (2+1) \quad 5 \quad (3+2) \end{array}$$

Continuando allo stesso modo si ottiene il triangolo che segue: gli ultimi numeri di ogni riga costituiscono, per l'appunto, la successione di Bell.

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1 \quad 2 \\ 2 \quad 3 \quad 5 \\ 5 \quad 7 \quad 10 \quad 15 \\ 15 \quad 20 \quad 27 \quad 37 \quad 52 \\ 52 \quad 67 \quad 87 \quad 114 \quad 151 \quad 203 \end{array}$$

Una notevole applicazione dei Numeri di Bell è la seguente: data una poesia di n versi, essi indicano il numero dei possibili schemi differenti di rima. Ad esempio, una quartina offre 15 possibilità: aaaa, aaab, aaba, abaa, baaa, aabb, abab, abba, aabc, abac, abca, abbc, abcb, abcc, abcd.

¹⁷ Il nome deriva da quello del matematico e scrittore scozzese del primo '900 Eric Temple Bell.

“Salendo” nel numero di versi, le possibili rime differenti aumentano in maniera vertiginosa: ad esempio, nel caso di un poema di 14 versi (la misura del sonetto, la forma poetica più classica della nostra tradizione letteraria) esistono B_{14} schemi diversi di rima, un numero pari a 190.899.322!

2 - FAMIGLIE DI NUMERI INTERI

In questa seconda parte passiamo ad esaminare alcune “famiglie” per le quali - a differenza delle successioni viste finora - non esiste una formula specifica che permette di calcolare i numeri che ne fanno parte.

Va precisato che questo elenco è lungi dall'essere completo, poiché esistono innumerevoli altre famiglie, che - come quelle della tabella - prendono il nome dal loro scopritore oppure sono state ribattezzate con aggettivi più o meno fantasiosi.¹⁸ In rete si possono trovare facilmente maggiori dettagli in proposito.

Per ovvie ragioni, nel presente testo saranno esaminate solo alcune delle famiglie indicate nella tabella.

Nome	Descrizione	Esempio	Primi numeri del gruppo
Semiprimi	Prodotto di due primi (anche coincidenti)	26 (2×13)	4-6-9-10-14-15-21-22-25
Primi "Oddest"	Primi con tutte le cifre dispari	37	3-5-7-11-13-17-19-31-37
Primi "Imirp"	Invertendo le cifre danno un altro primo	149	13-17-31-37-71-73-79
Difettivi	Maggiori della somma dei loro divisori	22 ($> 1+11$)	2-3-5-6-7-8-9-10-11-13
Lievemente difettivi	La Σ dei propri divisori vale $n-1$	tutte le potenze di 2	2-4-8-16-32-64-128-256
Abbondanti	Minori della somma dei loro divisori	12 ($< 1+2+3+4+6$)	12-18-20-24-30-36-40
Altamente composti	Hanno più fattori di ogni intero minore	24	2-4-6-12-24-36-48-60
Perfetti	Uguali alla Σ dei propri divisori	28	6-28-496-8.128
Quasi perfetti	Uguali alla Σ dei propri divisori, 1 escluso		??? (non ancora trovati)
Potenti (Powerful)	Divisibili per un primo p e per p^2	27	1-4-8-9-16-25-27-32-36
di Achille	Potenti che non sono potenze perfette	72 ($3^2 \times 2^3$)	72-108-200-288-392-432
Ciclici	Moltiplicati per 1,2... danno le stesse cifre in ordine ciclico	142.857	142.857
Automorfi	Le potenze terminano tutte con n	$76^2=5.776$	0-1-5-6-25-76-376-625-9.376
di Armstrong	Pari alla Σ delle k cifre elevate a k	153 ($1^3+5^3+3^3$)	1-2-3...9-153-370-371
Conservativi	Dividono esattamente il proprio inverso	$8.712 / 2.178=4$	8.712-9.801-87.912-98.901
Dattaraya	Il quadrato si può separare in quadrati	$13^2=169$ (16,9)	7,10,13,20,30,1.602
di Kaprekar	Il quadrato si separa in numeri la cui Σ è n	$45^2=2.025$; $20+25=45$	1-9-45-55-99-297-703

¹⁸ Citiamo, a titolo di esempio, le seguenti famiglie: Numeri di Genocchi, Numeri di Leonardo, Numeri di Keith, Numeri Fortunati, Numeri Felici, Numeri Intoccabili. Come si vede, ce n'è per tutti i gusti!

2.1 - Numeri Perfetti¹⁹

I **Numeri Perfetti** sono numeri equivalenti alla somma dei propri divisori (compreso 1, ma non - ovviamente - il numero stesso).

Questi numeri furono studiati sin dall'antichità: un teorema enunciato da Pitagora e dimostrato poi da Euclide afferma che se $2^n - 1$ è un numero primo, allora $m = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$ è un numero perfetto. Successivamente, Eulero dimostrò che tutti i Numeri Perfetti pari devono avere tale forma.

Ma i numeri esprimibili come $2^n - 1$ con n primo sono i ben noti **Numeri primi di Mersenne**²⁰, per cui si può dire che ciascuno di essi dà sicuramente origine a un numero perfetto. Al momento, si conoscono 48 primi di Mersenne (l'ultimo è $2^{57.885.161} - 1$) e, di conseguenza, 48 Numeri Perfetti; il più grande tra questi è un "mostro" composto da quasi 35 milioni di cifre.

Tra le altre proprietà dei Numeri Perfetti, si può ricordare che essi sono anche triangolari, visto che si possono scrivere nella forma $k(k+1)/2$, che è - per l'appunto - la formula generale per trovare il k -esimo numero triangolare.

Inoltre, è facile dimostrare che tutti i numeri perfetti pari terminano necessariamente per 6 o per 8; poiché dalla formula stessa si ricava che:

2^{n-1} è pari e termina con le cifre 2, 4, 8, 6 (trascuriamo il caso banale $n=1$);

$2^n - 1$ è dispari e termina rispettivamente per 3, 7, 5, 1 (ma 5 va scartato poiché cadrebbe l'ipotesi di primalità);

le coppie rimanenti, 2-3, 4-7 e 6-1, danno come prodotto rispettivamente 6, 8 e 6.

Restano tuttora aperte due questioni relative ai numeri perfetti:

I Numeri Perfetti sono infiniti?

Esistono Numeri Perfetti dispari?

Sulla base dei risultati trovati finora, effettuando le ricerche per numeri di dimensioni sempre più grandi, si ipotizzano rispettivamente un sì e un no alle due domande (cioè, i Numeri Perfetti sarebbero infiniti e non ne esisterebbero di dispari), ma nessuna delle due congetture è stata ancora dimostrata.

2.2 - Numeri Potenti e Numeri di Achille

I **Numeri Potenti** (o Powerful) sono interi positivi tali che se sono divisibili per un numero primo p , lo sono anche per p^2 . Una definizione equivalente - e assai più semplice - è la seguente: un numero potente è il prodotto di un quadrato per un cubo, ovvero ha la forma $a^2 \times b^3$, dove a e b sono interi positivi (eventualmente uguali a 1).

Ovviamente, tutte le potenze, di qualsiasi ordine, possono essere espresse nella forma suddetta, per cui rientrano automaticamente nella famiglia dei Numeri Potenti: ad esempio, $a^7 = (a^3)^2 \times a^3$ oppure $a^{10} = (a^5)^2 \times 1^3$.

Per questi motivi risulta, indubbiamente, più interessante un sottoinsieme dei "Potenti", quello costituito dai numeri che rispettano la regola generale ma non costituiscono una potenza perfetta: si tratta dei cosiddetti **Numeri di Achille**.²¹

E' facile dedurre che questi numeri si possono costruire moltiplicando tra loro un quadrato (m^2) e un cubo (n^3) purché m ed n siano primi tra loro; i tre numeri più piccoli di questa famiglia sono 72 ($2^3 \times 3^3$), 108 ($2^2 \times 3^3$) e 200 ($5^2 \times 2^3$).

Infine, una curiosità. Per trovare la più piccola coppia di interi consecutivi che sono anche Numeri di Achille bisogna salire oltre il miliardo: i due numeri sono rispettivamente 5.425.069.447 (pari a $7^3 \times 41^2 \times 97^2$) e 5.425.069.448 ($2^3 \times 26.041^3$).

¹⁹ I numeri Difettivi, Abbondanti, Altamente composti e Perfetti sono stati trattati in un altro articolo pubblicato in questo stesso sito (*Funzioni sui numeri interi*, 2011); in questa sede si riprendono - molto brevemente - solo i numeri perfetti, che sono anche i più significativi del gruppo.

²⁰ Dal nome del frate francese Marin Mersenne, che li studiò nel XVII secolo.

²¹ Il curioso nome di questi numeri deriva, per l'appunto, da quello dell'eroe omerico, che era un guerriero potente ma "imperfetto", a causa del suo proverbiale tallone.

2.3 - Numeri Ciclici

I **Numeri Ciclici** sono interi di n cifre con una particolare proprietà: se li si moltiplica per ogni valore da 1 a n , il prodotto è composto esattamente dalle stesse cifre del numero originale e queste si succedono nel medesimo ordine.

Il concetto è più chiaro con un esempio. Il più piccolo numero ciclico è 142.857, che moltiplicato per 2, 3...6 dà 285.714, 428.571 ... 857.142. Un'altra curiosa proprietà è che se si moltiplica il numero per $n+1$, si ottiene una serie di tutti "9": $142.857 \times 7 = 999.999$.

La "magia" del numero 142.857 è nota da secoli, e i matematici di diverse epoche hanno cercato di dare risposta alla domanda: "Esistono altri numeri con le medesime caratteristiche?"

La risposta è affermativa.

All'inizio del secolo scorso, Leonard Dickson²² mise in evidenza che tutti i Numeri Ciclici costituiscono il periodo delle cifre decimali derivanti dai reciproci di alcuni numeri primi. In generale, vale la regola seguente: se $1/p$ (con p intero e primo) produce una sequenza di cifre decimali con un periodo di $p-1$ cifre, allora tale periodo costituisce un numero ciclico.

Ad esempio, 142.857, numero di 6 cifre, è esattamente il periodo di $1/7$ ($1/7 = 0,142857142857\dots$).

Il successivo numero primo che produce un numero ciclico è 17. Il rapporto tra 1 e 17, infatti, dà il risultato 0,05882352941176470588235294117647... che ha come periodo un numero di 16 cifre, 0588235294117647. Basta provare a moltiplicare tale numero per 2, 3...16 per fare la verifica.

E' evidente che - a parte 142.857 - qualsiasi numero ciclico deve cominciare con uno o più zeri: in particolare, all'inizio ci sarà uno zero se il numero primo generatore è di due cifre, ci saranno due zeri se il generatore ha tre cifre e così via.

I primi inferiori a 100 che producono Numeri Ciclici sono nove: 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97.

Non si conosce alcuna formula che consenta di identificare i generatori di un numero ciclico; egualmente, non è ancora stato accertato se esistono o meno infiniti Numeri Ciclici.

Tale ipotesi, comunque, appare molto probabile: da calcoli che ormai si sono estesi fino a numeri di dimensioni gigantesche, infatti, si è verificato che la percentuale di primi generatori tende a mantenersi costante, intorno al valore di $3/8$. In altre parole, ci si può attendere che esaminando 8.000, 80.000, 800.000 numeri primi consecutivi se ne trovino all'incirca 3.000, 30.000, 300.000 che soddisfano alle regole necessarie per produrre un numero ciclico.

I Numeri Ciclici hanno altre curiose proprietà; in particolare, si possono sempre ottenere con infinite addizioni successive. Ad esempio, il numero 142.857 può essere ricavato semplicemente sommando i successivi multipli di 14 in questo modo:

$$\begin{array}{r}
 14 \\
 28 \\
 42 \\
 56 \\
 70 \\
 84 \\
 98 \\
 \dots \\
 \hline
 142857142857\dots
 \end{array}$$

Utilizzando altri coefficienti, si possono ricavare allo stesso modo gli altri Numeri Ciclici.

Infine, riportiamo una notevole proprietà del numero ciclico generato da $1/19$.

Scrivendo in forma di matrice quadrata 18×18 le cifre dei successivi rapporti $1/19, 2/19 \dots 18/19$, si ottiene un quadrato magico in cui è costante non soltanto la somma su righe e colonne (ciò è vero per qualsiasi primo generatore di un numero ciclico), ma anche sulle due diagonali principali. Tale costante "magica" vale 81.

²² L. Dickson, History of the theory of Numbers, 1919.

2.4 - Numeri Automorfi

Un numero intero si definisce automorfo se tutte le sue potenze presentano nella parte finale il numero stesso. Ad esempio, 25 fa parte di questa famiglia, in quanto le sue successive potenze - 625, 15.625, 390.625 etc. - terminano per "25".

Basta un'occhiata alle vecchie tabelline delle scuole elementari per rendersi conto che solo i numeri che finiscono per 0, 1, 5 o 6 possono rientrare in questo gruppo, ma approfondendo un minimo l'analisi, si possono escludere le prime due tipologie (a parte i casi banali $n=0$ e $n=1$). Inoltre, una volta raggiunta la "doppia cifra", tutti i Numeri Automorfi devono terminare necessariamente per 25 o per 76.

I **Numeri Automorfi** fino all'ordine dei miliardi si possono costruire con un procedimento estremamente semplice, utilizzando la sequenza "magica" 8212890625. Basta prendere le ultime n cifre della sequenza e calcolare il complemento di tale numero alla successiva potenza di 10 aumentata di 1: entrambi i numeri trovati sono automorfi. Ad esempio, prendendo le ultime 3 cifre della serie, si ottengono 625 e 376; prendendo le ultime 5 cifre si ricavano 90.625 e 9.376 etc.

Va aggiunto che la sequenza sopra indicata costituisce soltanto la parte terminale di una stringa numerica che si può prolungare indefinitamente ottenendo, con lo stesso procedimento, numeri sempre più grandi.

Dunque, esistono infinite coppie di Numeri Automorfi, ognuna delle quali dà come somma una potenza di 10 aumentata di 1: 1 (0+1), 11(5+6), 101 (25+76), 1.001 (376+625) etc.

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

Conway J.H., Guy R.K., *The Book of Numbers*, Springer-Verlag, 1996

Devlin K., *I numeri magici di Fibonacci*, Rizzoli, 2012

Du Sautoy M., *L'enigma dei numeri primi*, BUR, 2005

Gardner M., *Enigmi e giochi matematici 1-5*, SuperBUR, 2001

Gardner M., *Mathematical magic show*, Penguin Mathematics, 1986

Gardner M., *Time travel and other mathematical bewilderments*, Freeman & Company, 1988

Gardner M., *Mathematical Circus*, Penguin Books, 1990

Jones G.A., Jones J.M., *Elementary Number Theory*, Springer, 2005

Sito OEIS (On-line Encyclopedia of Integer Sequences): <https://oeis.org/>

Sito Politecnico di Torino: www.polito.it

189. Esponenziale di matrici

Emilio Novati
emilionovati@libero.it

1 Introduzione

È ben noto che nei campi numerici \mathbb{R} e \mathbb{C} la funzione esponenziale $\exp(x) = e^x$ verifica l'equazione funzionale esponenziale $e^{x+y} = e^x e^y$. Tale uguaglianza non è però in generale vera quando la funzione esponenziale viene definita su un'algebra non commutativa, come un'algebra di matrici.

In tal caso sappiamo che l'equazione funzionale è verificata se le due matrici esponenti commutano:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} \Rightarrow e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}$$

ma l'implicazione contraria non è sempre vera e per due matrici che non commutano può valere una qualunque delle relazioni:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} &= e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}} \\ e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} &\neq e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}} \\ e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} &= e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}} \\ e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} &\neq e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}} \end{aligned}$$

Diversi lavori hanno cercato di caratterizzare le matrici che non commutano ma che verificano comunque l'equazione funzionale esponenziale. In particolare il problema è stato studiato negli anni '50 per matrici di dimensione due e tre [1] [2] e ripreso anche di recente in [3].

Il caso più semplice è quello delle matrici in $M(2, \mathbb{R})$, risolto in [2] nell'ambito più generale delle algebre complesse di grado due. In queste note viene proposta una semplice trattazione didattica su come caratterizzare le matrici di $M(2, \mathbb{R})$ per cui si ha:

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}} \quad (1)$$

e si mostra che non esistono matrici per cui si ha:

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}} \neq e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$$

1.1 Definizioni e notazioni

L'insieme delle matrici reali 2×2 , $M(2, \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} rispetto alle operazioni di somma di matrici e di moltiplicazione per un numero reale, è un'algebra non commutativa rispetto a tali operazioni e all'usuale prodotto di matrici, ed è uno spazio metrico completo rispetto alla norma:

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{|x|=1} |\mathbf{A}x|$$

Nel seguito considereremo matrici in $M(2, \mathbb{R})$.

Una matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile (o non singolare) se e solo se $\det \mathbf{A} = ad - bc \neq 0$ e la sua inversa è data da:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

L'insieme delle matrici invertibili, indicato con $GL(2, \mathbb{R})$ è un gruppo non commutativo rispetto all'operazione di prodotto di matrici, il cui elemento neutro è la matrice:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La traccia di una matrice è la somma dei suoi elementi sulla diagonale principale.

$$\text{tr} \mathbf{A} = \text{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$$

Il commutatore di due matrici \mathbf{A} , \mathbf{B} è la matrice definita da:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$$

Se $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \neq 0$ allora \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{I} sono linearmente indipendenti.

Il centro $\mathcal{C}(2, \mathbb{R})$ di $M(2, \mathbb{R})$ è l'insieme delle matrici $\mathbf{X} \in M(2, \mathbb{R})$ che commutano con tutte le matrici di $M(2, \mathbb{R})$:

$$\mathcal{C}(2, \mathbb{R}) = \{\mathbf{X} : [\mathbf{A}, \mathbf{X}] = 0, \forall \mathbf{A} \in M(2, \mathbb{R})\}$$

ed è il sottogruppo di $GL(2, \mathbb{R})$ costituito dalle matrici scalari: $\mathbf{X} = x\mathbf{I}$ con $x \in \mathbb{R}$. $\mathcal{C}(2, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie ed è ovviamente isomorfo a \mathbb{R}^* . Il segno di $\mathbf{X} \in \mathcal{C}(2, \mathbb{R})$ è il segno di $x \in \mathbb{R}$.

2 L'esponenziale di una matrice

L'esponenziale di una matrice è definito da:

$$\exp(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \quad (2)$$

La serie formale è assolutamente convergente e definisce in \mathbb{C} una funzione intera, quindi è convergente nello spazio metrico $M(2, \mathbb{R})$.

Poiché il prodotto di matrici in $M(2, \mathbb{R})$ non è commutativo, la funzione esponenziale così definita non soddisfa, in generale, l'equazione funzionale (1). Valgono però le seguenti proprietà che utilizzeremo nel seguito:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}} e^{-\mathbf{A}} &= e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I} \\ \text{Det} \mathbf{A} \neq 0 &\Rightarrow e^{\mathbf{ABA}^{-1}} = \mathbf{A} e^{\mathbf{B}} \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{AB} = \mathbf{BA} &\Rightarrow e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t} = e^{\mathbf{B}t} e^{\mathbf{A}t} = e^{(\mathbf{B}+\mathbf{A})t} \quad \forall t \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Per una dimostrazione di queste proprietà si veda ad esempio [5]

2.1 Calcolo dell'esponenziale

Il calcolo della matrice esponenziale in un'algebra $M(n, \mathbb{K})$ diventa rapidamente molto complesso al crescere di n . Ci sono comunque delle procedure che permettono sempre di effettuare tale calcolo in un numero finito di passi, almeno in linea di principio [6].

Nel caso di matrici in $M(2, \mathbb{R})$ il calcolo dell'esponenziale è abbastanza semplice grazie alla seguente scomposizione.

Lemma 2.1. Ogni matrice $\mathbf{A} \in M(2, \mathbb{R})$ si può scomporre in una somma di due matrici di cui una sta nel centro $\mathcal{C}(2, \mathbb{R})$ e l'altra ha traccia nulla:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = k\mathbf{I} + \mathbf{A}' = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & b \\ c & -m \end{pmatrix}$$

e, per due matrici $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M(2, \mathbb{R})$, si ha:

$$[\mathbf{A}', \mathbf{B}'] = 0 \iff [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$$

Dimostrazione. La scomposizione è ovvia, basta porre:

$$k = \frac{a+d}{2} = \frac{\text{tr}\mathbf{A}}{2} \quad m = \frac{a-d}{2}$$

per cui:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{\text{tr}(\mathbf{A})}{2}\mathbf{I}$$

e quindi si ha:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}', \mathbf{B}'] &= \left[\mathbf{A} - \frac{\text{tr}(\mathbf{A})}{2}\mathbf{I}, \mathbf{B} - \frac{\text{tr}(\mathbf{B})}{2}\mathbf{I} \right] = \\ &= [\mathbf{A}, \mathbf{B}] - \left[\mathbf{A}, \frac{\text{tr}(\mathbf{B})}{2}\mathbf{I} \right] - \left[\frac{\text{tr}(\mathbf{A})}{2}\mathbf{I}, \mathbf{B} \right] + \left[\frac{\text{tr}(\mathbf{A})}{2}\mathbf{I}, \frac{\text{tr}(\mathbf{B})}{2}\mathbf{I} \right] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \end{aligned}$$

dato che $\frac{\text{tr}(\mathbf{A})}{2}\mathbf{I}, \frac{\text{tr}(\mathbf{B})}{2}\mathbf{I} \in \mathcal{C}(2, \mathbb{R})$ □

Per le matrici a traccia nulla la serie che definisce la funzione esponenziale risulta particolarmente semplice da calcolare, come si vede dal seguente lemma.

Lemma 2.2. Se \mathbf{M} è una matrice a traccia nulla, posto $\theta = \sqrt{\det \mathbf{M}}$ si ha:

$$e^{\mathbf{M}} = \mathbf{I} \cos \theta + \mathbf{M} \frac{\sin \theta}{\theta}$$

Dimostrazione. Cominciamo col notare che per una matrice a traccia nulla:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & b \\ c & -m \end{pmatrix}$$

si ha:

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} m & b \\ c & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & b \\ c & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 + bc & 0 \\ 0 & bc + m^2 \end{pmatrix} = -\det(\mathbf{M})\mathbf{I}$$

quindi, posto $\theta = \sqrt{\det(\mathbf{M})}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{M}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^k}{k!} = \\ &= \mathbf{I} + \frac{\mathbf{M}}{1!} - \frac{\theta^2 \mathbf{I}}{2!} - \frac{\theta^3 \mathbf{M}}{3! \theta} + \frac{\theta^4 \mathbf{I}}{4!} + \frac{\theta^5 \mathbf{M}}{5! \theta} - \frac{\theta^6 \mathbf{I}}{6!} + \dots = \\ &= \mathbf{I} \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} \dots \right) + \frac{\mathbf{M}}{\theta} \left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots \right) = \\ &= \mathbf{I} \cos \theta + \frac{\mathbf{M}}{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

□

Possiamo quindi calcolare l'esponenziale di una matrice di $M(2, \mathbb{R})$ utilizzando il seguente teorema.

Teorema 2.1. Per ogni matrice $\mathbf{A} \in M(2, \mathbb{R})$ si ha:

$$e^{\mathbf{A}} = e^{k\mathbf{I} + \mathbf{A}'} = e^{k\mathbf{I}} e^{\mathbf{A}'} = e^k \left(\mathbf{I} \cos \alpha + \mathbf{A}' \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$$

Con $k = \frac{\text{tr} \mathbf{A}}{2}$, $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - k\mathbf{I}$, $\alpha = \sqrt{\det \mathbf{A}'}$.

Dimostrazione. Utilizzando la scomposizione del Lemma 2.1 e notando che $[k\mathbf{I}, \mathbf{A}'] = 0$, si ha:

$$e^{\mathbf{A}} = e^{k\mathbf{I} + \mathbf{A}'} = e^{k\mathbf{I}} e^{\mathbf{A}'} = e^{\mathbf{A}'} e^{k\mathbf{I}}$$

e per il Lemma 2.2 si ottiene l'asserto. □

Nota

Si noti che il risultato di questo teorema è valido anche se $\det \mathbf{A}' \leq 0$.

Se $\det \mathbf{A}' = 0$, quindi $\alpha = 0$, basta porre $\frac{\sin 0}{0} = 1$ e in tal caso si ha: $e^{\mathbf{A}} = e^k(\mathbf{I} + \mathbf{A}')$.

Se $\det \mathbf{A}' < 0$, quindi $\alpha = \pm i|\alpha| = \pm i\sqrt{|\det \mathbf{A}'|}$, si prende, come nel caso reale, la radice con segno + e si utilizzano le relazioni tra funzioni circolari e funzioni iperboliche ottenendo:

$$\frac{\sin(i|\alpha|)}{i|\alpha|} = \frac{i \sinh |\alpha|}{i|\alpha|} = \frac{e^{|\alpha|} - e^{-|\alpha|}}{2|\alpha|} \quad \cos(i|\alpha|) = \cosh |\alpha| = \frac{e^{|\alpha|} + e^{-|\alpha|}}{2}$$

Si dimostra facilmente che se $\mathbf{A} \in \mathcal{C}(2, \mathbb{R})$ allora $e^{\mathbf{A}} \in \mathcal{C}(2, \mathbb{R})$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$$

ma l'implicazione contraria non è in generale vera, come si vede dal lemma seguente.

Lemma 2.3. Data una matrice non nulla: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $e^{\mathbf{A}} \in \mathcal{C}(2, \mathbb{R})$ se e solo se:

$\mathbf{A} \in \mathcal{C}(2, \mathbb{R})$ oppure $\det \mathbf{A}' = \det \mathbf{A} - \left(\frac{\text{tr} \mathbf{A}}{2}\right)^2 = \mu^2 \pi^2$ con $\mu \in \mathbb{N}^+$

Dimostrazione. Se $e^{\mathbf{A}} \in \mathcal{C}(2, \mathbb{R})$ deve essere:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}} &= e^k \left(\mathbf{I} \cos \alpha + \mathbf{A}' \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) = \\ &= e^k \begin{pmatrix} \cos \alpha + \frac{m \sin \alpha}{\alpha} & \frac{b \sin \alpha}{\alpha} \\ \frac{c \sin \alpha}{\alpha} & \cos \alpha - \frac{m \sin \alpha}{\alpha} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

quindi uguagliando i termini sulla diagonale secondaria si ha:

$$\frac{b \sin \alpha}{\alpha} = 0 \Rightarrow b = 0 \vee \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 0$$

$$\frac{c \sin \alpha}{\alpha} = 0 \Rightarrow c = 0 \vee \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 0$$

e sottraendo i termini sulla diagonale principale si ha:

$$2 \frac{m \sin \alpha}{\alpha} = 0 \Rightarrow m = 0 \vee \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 0$$

Se $b = c = m = 0$ la matrice \mathbf{A}' è nulla e quindi $\mathbf{A} \in \mathcal{C}(2, \mathbb{R})$.

Altrimenti si deve avere:

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} = 0$$

e si hanno tre casi possibili:

$$\det \mathbf{A}' = 0 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

$$\det \mathbf{A}' < 0 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{\sin i|\alpha|}{i|\alpha|} = \frac{\sinh |\alpha|}{|\alpha|} > 0 \forall |\alpha| > 0$$

$$\det \mathbf{A}' > 0 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = \mu\pi \text{ con } \mu \in \mathbb{N}^+$$

ed essendo $\det \mathbf{A}' = \alpha^2$ si ha l'asserto. □

3 Verifica dell'equazione funzionale

Cominciamo con il trovare le condizioni necessarie e sufficienti affinché gli esponenziali di due matrici commutino. Sappiamo che questo è vero se le due matrici commutano, quindi siamo interessati solo a matrici tali che $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \neq 0$ e ovviamente una condizione sufficiente è che almeno uno dei due esponenziali sta nel centro $\mathcal{C}(2, \mathbb{R})$. Nel caso di matrici in $M(2, \mathbb{R})$ questa condizione è anche necessaria.

Teorema 3.1. Date due matrici $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M(2, \mathbb{R})$ tali che $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \neq 0$, $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}$ se e solo se $e^{\mathbf{A}} \in \mathcal{C}(2, \mathbb{R})$ oppure $e^{\mathbf{B}} \in \mathcal{C}(2, \mathbb{R})$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare solo l'implicazione $\{e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}\} \Rightarrow \{e^{\mathbf{A}} \in \mathcal{C}(2, \mathbb{R}) \vee e^{\mathbf{B}} \in \mathcal{C}(2, \mathbb{R})\}$. Utilizzando i Lemmi 2.1 e 2.2 si ha:

$$e^{\mathbf{A}} = e^k \left(\mathbf{I} \cos \alpha + \mathbf{A}' \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \quad e^{\mathbf{B}} = e^h \left(\mathbf{I} \cos \beta + \mathbf{B}' \frac{\sin \beta}{\beta} \right)$$

Calcolando il commutatore e notando che $\mathbf{I} \cos \alpha$ e $\mathbf{I} \cos \beta$ sono elementi di $\mathcal{C}(2, \mathbb{R})$ si ha quindi:

$$\begin{aligned} [e^{\mathbf{A}}, e^{\mathbf{B}}] &= e^{k+h} \left[\mathbf{I} \cos \alpha + \mathbf{A}' \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \mathbf{I} \cos \beta + \mathbf{B}' \frac{\sin \beta}{\beta} \right] = \\ &= e^{k+h} \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\alpha \beta} [\mathbf{A}', \mathbf{B}'] \end{aligned}$$

e siccome $[\mathbf{A}', \mathbf{B}'] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \neq 0$, gli esponenziali commutano solo se $\sin \alpha \sin \beta = 0$ con $\alpha, \beta \neq 0$ e quindi $\alpha = \mu\pi$ oppure $\beta = \phi\pi$ con $\mu, \phi \in \mathbb{N}^+$. □

Il fatto che gli esponenziali commutino non implica che valga l'equazione funzionale (1), anche nel caso che sia $e^{\mathbf{A}}$ che $e^{\mathbf{B}}$ stiano nel centro $\mathcal{C}(2, \mathbb{R})$.

Si considerino ad esempio due matrici del tipo:

$$\mathbf{A} = \pi \begin{pmatrix} a & -\mu \\ \mu & a \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \pi \begin{pmatrix} b + \phi c & -\phi^2 - c^2 \\ \phi^2 & b - \phi c \end{pmatrix}$$

Se $\mu \in \mathbb{N}^+$ allora $e^{\mathbf{A}} = (-1)^\mu e^{a\pi} \mathbf{I}$ e se $\phi \in \mathbb{N}^+$ allora $e^{\mathbf{B}} = (-1)^\phi e^{b\pi} \mathbf{I}$, quindi:

$$e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = (-1)^{\mu+\phi} e^{(a+b)\pi} \mathbf{I}$$

ma si ha $e^{\mathbf{A+B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$ solo se:

$$c^2 = \frac{\nu^2 - (\mu + \phi^2)^2}{\mu}$$

con ν intero della stessa parità di $\mu + \phi$.

Le condizioni per cui l'equazione funzionale (1) è verificata sono date dal seguente teorema.

Teorema 3.2. Date due matrici \mathbf{A} e $\mathbf{B} \in M(2, \mathbb{R})$, $e^{\mathbf{A+B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}}$ se e solo se \mathbf{A} e \mathbf{B} commutano oppure $e^{\mathbf{A}}$, $e^{\mathbf{B}}$, $e^{\mathbf{A+B}}$ stanno nel centro $\mathcal{C}(2, \mathbb{R})$ e il segno di $e^{\mathbf{A+B}}$ è uguale al segno di $e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare solo il caso in cui \mathbf{A} e \mathbf{B} non commutano.

Nel caso che $\alpha = \mu\pi$ con $\mu \in \mathbb{R}^+$ sappiamo che $e^{\mathbf{A}}$ e $e^{\mathbf{B}}$ commutano. Cerchiamo le condizioni per cui si ha anche $e^{\mathbf{A+B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$.

Poniamo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = k\mathbf{I} + \mathbf{A}' \quad \text{con :} \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} m & b \\ c & -m \end{pmatrix} \quad k = \frac{a+d}{2} \quad m = \frac{a-d}{2}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = h\mathbf{I} + \mathbf{B}' \quad \text{con :} \quad \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} n & y \\ z & -n \end{pmatrix} \quad h = \frac{x+t}{2} \quad n = \frac{x-t}{2}$$

Si ha quindi:

$$e^{\mathbf{A}} = e^k \left(\mathbf{I} \cos \alpha + \mathbf{A}' \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \quad \text{con :} \quad \alpha = \sqrt{\det(\mathbf{A}')} = \sqrt{-m^2 - bc}$$

$$e^{\mathbf{B}} = e^h \left(\mathbf{I} \cos \beta + \mathbf{B}' \frac{\sin \beta}{\beta} \right) \quad \text{con :} \quad \beta = \sqrt{\det(\mathbf{B}')} = \sqrt{-n^2 - yz}$$

da cui si ottiene:

$$e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{k+h} \left(\mathbf{I} \cos \alpha \cos \beta + \mathbf{B}' \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\beta} + \mathbf{A}' \frac{\cos \beta \sin \alpha}{\alpha} + \mathbf{A}' \mathbf{B}' \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\alpha \beta} \right) \quad (3)$$

e posto $\alpha = \mu\pi$ si ha $e^{\mathbf{A}} = (-1)^\mu e^{k\mathbf{I}}$ e la (3) diventa:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} &= e^{k+h}(-1)^\mu \left(\mathbf{I} \cos \beta + \mathbf{B}' \frac{\sin \beta}{\beta} \right) = \\ &= e^{k+h}(-1)^\mu \left[\cos \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin \beta}{\beta} \begin{pmatrix} n & y \\ z & -n \end{pmatrix} \right] = \\ &= e^{h+k}(-1)^\mu \begin{pmatrix} \cos \beta + \frac{n \sin \beta}{\beta} & \frac{y \sin \beta}{\beta} \\ \frac{z \sin \beta}{\beta} & \cos \beta - \frac{n \sin \beta}{\beta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'altra parte si ha:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix} = (h+k)\mathbf{I} + \mathbf{C}'$$

con:

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} m+n & b+y \\ c+z & -(m+n) \end{pmatrix} = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$$

e posto:

$$\gamma = \sqrt{\det(\mathbf{C}')} = \sqrt{-q^2 - (b+y)(c+z)}$$

si ottiene:

$$e^{\mathbf{C}} = e^{h+k} \left(\mathbf{I} \cos \gamma + \mathbf{C}' \frac{\sin \gamma}{\gamma} \right) e^{\mathbf{C}} = e^{h+k} \begin{pmatrix} \cos \gamma + \frac{(m+n) \sin \gamma}{\gamma} & \frac{(b+y) \sin \gamma}{\gamma} \\ \frac{(c+z) \sin \gamma}{\gamma} & \cos \gamma - \frac{(m+n) \sin \gamma}{\gamma} \end{pmatrix}$$

Uguagliando i termini corrispondenti delle due matrici si ha:

$$\begin{cases} (b+y) \frac{\sin \gamma}{\gamma} = y \frac{\sin \beta}{\beta} (-1)^\mu \\ (c+z) \frac{\sin \gamma}{\gamma} = z \frac{\sin \beta}{\beta} (-1)^\mu \\ (m+n) \frac{\sin \gamma}{\gamma} = (-1)^\mu \left(\cos \beta + \frac{n \sin \beta}{\beta} - \cos \gamma \right) \\ -(m+n) \frac{\sin \gamma}{\gamma} = (-1)^\mu \left(\cos \beta - \frac{n \sin \beta}{\beta} - \cos \gamma \right) \end{cases} \quad (4)$$

Abbiamo quindi due casi possibili:

Caso 1 : $\frac{\sin \gamma}{\gamma} \neq 0$: in tal caso, dalle ultime due equazioni del sistema (4) si ha:

$$\begin{cases} m = \frac{\gamma}{\sin \gamma} [(-1)^\mu \cos \beta - \cos \gamma] + n \left[(-1)^\mu \frac{\gamma \sin \beta}{\beta \sin \gamma} - 1 \right] \\ m = -\frac{\gamma}{\sin \gamma} [(-1)^\mu \cos \beta - \cos \gamma] + n \left[(-1)^\mu \frac{\gamma \sin \beta}{\beta \sin \gamma} - 1 \right] \end{cases}$$

da cui si ricava:

$$(-1)^\mu \cos \beta - \cos \gamma = - [(-1)^\mu \cos \beta - \cos \gamma]$$

che è verificata quando:

$$\gamma = \pm\beta + 2\nu\pi \quad \text{per } \mu \text{ pari} \quad \gamma = \pm\beta + (2\nu + 1)\pi \quad \text{per } \mu \text{ dispari}$$

e in questi casi si ha:

$$m = n \left(\frac{(-1)^\mu \gamma \sin \beta}{\beta \sin \gamma} - 1 \right) = \omega n$$

e dalle altre due equazioni del sistema si ottiene:

$$b = y \left(\frac{(-1)^\mu \gamma \sin \beta}{\beta \sin \gamma} - 1 \right) = \omega y$$

$$c = z \left(\frac{(-1)^\mu \gamma \sin \beta}{\beta \sin \gamma} - 1 \right) = \omega z$$

quindi si ha:

$$\mathbf{A}' = \omega \mathbf{B}'$$

e le matrici \mathbf{A}' e \mathbf{B}' , quindi anche \mathbf{A} e \mathbf{B} , commutano.

Caso 2 : $\sin \gamma = 0$ con $\gamma \neq 0$, cioè $\gamma = \nu\pi$ con $\nu \in \mathbb{N}^+$. Si ha allora:

$$e^{\mathbf{C}} = (-1)^\nu e^{k+h} \mathbf{I}$$

e per avere $e^{\mathbf{C}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$ deve essere:

$$\sin \beta = 0 \quad \wedge \quad (-1)^\nu = (-1)^\mu \cos \beta$$

quindi: $\beta = \phi\pi$ con $(-1)^{\phi+\mu} = (-1)^\nu$.

in questo caso quindi tutte le matrici: $e^{\mathbf{A}}$, $e^{\mathbf{B}}$, $e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$, $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$ stanno nel centro $\mathcal{C}(2, \mathbb{R})$ e ν ha la stessa parità di $\mu + \phi$ e quindi $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$ ha lo stesso segno di $e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$.

Si noti che se ν ha parità opposta a $\mu + \phi$ allora si ha : $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = -e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$.

□

Rimane da verificare la possibilità che l'esponenziale della somma sia uguale a uno solo dei due prodotti degli esponenziali, ma tale situazione è impossibile in $M(2, \mathbb{R})$, come mostra il seguente teorema.

Teorema 3.3. Per due matrici \mathbf{A} , $\mathbf{B} \in M(2, \mathbb{R})$ è impossibile avere:

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}}$$

Dimostrazione. Ovviamente basta dimostrare che è impossibile avere:

$$e^{\mathbf{A}'+\mathbf{B}'} = e^{\mathbf{A}'} e^{\mathbf{B}'} \neq e^{\mathbf{B}'} e^{\mathbf{A}'}$$

Uguagliando $e^{\mathbf{A}'} e^{\mathbf{B}'} = e^{\mathbf{A}'+\mathbf{B}'}$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \cos \alpha \cos \beta + \mathbf{A}' \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\alpha} + \mathbf{B}' \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\beta} + \mathbf{A}' \mathbf{B}' \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\alpha \beta} = \\ = \mathbf{I} \cos \gamma + \mathbf{A}' \frac{\sin \gamma}{\gamma} + \mathbf{B}' \frac{\sin \gamma}{\gamma} \end{aligned} \tag{5}$$

dal teorema 3.1 sappiamo che, se \mathbf{A}' , \mathbf{B}' non commutano, $e^{\mathbf{A}'}e^{\mathbf{B}'} \neq e^{\mathbf{B}'}e^{\mathbf{A}'}$ equivale a $\sin \alpha \sin \beta \neq 0$ con $\alpha, \beta \neq 0$. In tal caso $\mathbf{A}'\mathbf{B}'$ si può quindi esprimere come combinazione lineare delle tre matrici linearmente indipendenti \mathbf{A}' , \mathbf{B}' , \mathbf{I} .

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'\mathbf{B}' &= \frac{\alpha\beta}{\sin \alpha \sin \beta} \left[\mathbf{I}(\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta) + \mathbf{A}' \left(\frac{\sin \gamma}{\gamma} - \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\alpha} \right) + \mathbf{B}' \left(\frac{\sin \gamma}{\gamma} - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\beta} \right) \right] = \\ &= \xi_1 \mathbf{I} + \xi_2 \mathbf{A}' + \xi_3 \mathbf{B}' \end{aligned}$$

Con $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}$.

Essendo \mathbf{A}' e \mathbf{B}' elementi dell'algebra $M(2, \mathbb{R})$ si deve avere:

$$(\mathbf{A}')^2 \mathbf{B}' = \mathbf{A}'(\mathbf{A}'\mathbf{B}')$$

quindi:

$$-\alpha^2 \mathbf{B}' = (\xi_1 \xi_3 - \xi_2 \alpha^2) \mathbf{I} + (\xi_1 + \xi_2 \xi_3) \mathbf{A}' + \xi_3^2 \mathbf{B}'$$

e per l'indipendenza lineare si ricava

$$\xi_3^2 = -\alpha^2 \quad , \quad \xi_1 + \xi_2 \xi_3 = 0$$

per lo stesso motivo si ha anche:

$$(\mathbf{A}')\mathbf{B}'^2 = (\mathbf{A}'\mathbf{B}')\mathbf{B}'$$

da cui si ricava allo stesso modo:

$$-\beta^2 = \xi_2^2$$

e siccome ξ_1, ξ_2, ξ_3 devono essere numeri reali, questo è impossibile se α e β sono numeri reali, cioè se $\det \mathbf{A}'$ e $\det \mathbf{B}'$ sono positivi.

Consideriamo quindi solo il caso in cui $\det \mathbf{A}'$ e $\det \mathbf{B}'$ sono negativi, quindi: $\alpha = i|\alpha|$ e $\beta = i|\beta|$, per cui si ha: $\xi_2 = i\beta$, $\xi_3 = i\alpha$ e $\xi_1 = -\xi_2 \xi_3 = \alpha\beta = -|\alpha||\beta|$

e quindi:

$$\mathbf{A}'\mathbf{B}' = \alpha\beta \mathbf{I} + i\beta \mathbf{A}' + i\alpha \mathbf{B}'$$

per cui si ottiene:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}'}e^{\mathbf{B}'} &= \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\alpha\beta} (\alpha\beta \mathbf{I} + i\beta \mathbf{A}' + i\alpha \mathbf{B}') + \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\alpha} \mathbf{A}' + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\beta} \mathbf{B}' + \cos \alpha \cos \beta \mathbf{I} = \\ &= \mathbf{I}(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) + \mathbf{A}' \left(\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\alpha} + i \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\alpha} \right) + \mathbf{B}' \left(\frac{\sin \beta \cos \alpha}{\beta} + i \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\beta} \right) \end{aligned}$$

quindi da:

$$e^{\mathbf{A}'}e^{\mathbf{B}'} = e^{\mathbf{A}'+\mathbf{B}'} = \cos \gamma \mathbf{I} + \frac{\sin \gamma}{\gamma} \mathbf{A}' + \frac{\sin \gamma}{\gamma} \mathbf{B}'$$

si ottiene:

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos \gamma$$

che è verificata se $\gamma = \alpha - \beta$.

Dalle altre due componenti si ottiene:

$$\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\alpha} + i \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\alpha} = \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\beta} + i \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\beta}$$

essendo α e β numeri immaginari riscriviamo questa uguaglianza utilizzando le funzioni iperboliche come indicato in nota al teorema 2.1, e otteniamo:

$$\frac{e^{-|\beta|} (e^{|\alpha|} - e^{-|\alpha|})}{2|\alpha|} = \frac{e^{-|\alpha|} (e^{|\beta|} - e^{-|\beta|})}{2|\beta|}$$

cioè:

$$\frac{e^{2|\alpha|} - 1}{2|\alpha|} = \frac{e^{2|\beta|} - 1}{2|\beta|}$$

ma questo è impossibile per due numeri reali diversi perché la funzione

$$y = \frac{e^x - 1}{x}$$

è monotona crescente per $x > 0$.

□

3.1 Costruzione di matrici che verificano l'equazione funzionale

Vogliamo ora definire una procedura che consente di costruire due matrici che verificano l'equazione funzionale (1). Cominciamo con il costruire due matrici a traccia nulla, che non commutino e tali che la radice quadrata del loro determinante sia un multiplo intero positivo di π . Una matrice che soddisfa tali condizioni ha la forma:

$$\mathbf{A}_0 = \mu\pi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{N}^+$$

una matrice che non commuta con \mathbf{A}_0 e che verifica le stesse condizioni deve avere la forma:

$$\mathbf{B}_0 = \psi\pi \begin{pmatrix} x & -y \\ (1+x^2)/y & -x \end{pmatrix} \quad \psi \in \mathbb{N}^+ \quad x, y \neq 0$$

Per queste due matrici si ha:

$$e^{\mathbf{A}_0} = (-1)^\mu \mathbf{I} \quad e^{\mathbf{B}_0} = (-1)^\psi \mathbf{I} \quad e^{\mathbf{A}_0} e^{\mathbf{B}_0} = (-1)^{\mu+\psi} e^{\mathbf{I}}$$

inoltre si ha:

$$\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0 = (\mu + \psi)\pi \begin{pmatrix} x & -1 - y \\ 1 + (1+x^2)/y & -x \end{pmatrix}$$

e quindi:

$$\det(\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0) = \left[-x^2 + (1+y) \frac{1+y+x^2}{y} \right] (\mu + \psi)^2 \pi^2$$

quindi per verificare l'equazione funzionale (1) deve essere:

$$\frac{x^2}{y} + \frac{(1+y)^2}{y} = 4\nu^2 \quad \nu \in \mathbb{N}^+$$

cioè:

$$x = \sqrt{4\nu^2 y - (1+y)^2}$$

Quindi:

$$\mathbf{B}_0 = \psi\pi \begin{pmatrix} \sqrt{4\nu^2 y - (1+y)^2} & -y \\ 4\nu^2 - y - 2 & -\sqrt{4\nu^2 y - (1+y)^2} \end{pmatrix} \quad \psi, \nu \in \mathbb{N}^+$$

e in tal caso si ha:

$$\det(\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0) = 4\nu^2(\mu + \psi)^2\pi^2$$

quindi

$$e^{\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0} = (-1)^{2\nu(\mu + \psi)}\mathbf{I} = (-1)^{\mu + \psi}\mathbf{I} = e^{\mathbf{A}_0}e^{\mathbf{B}_0}$$

Ricordiamo ora che matrici simili hanno lo stesso determinante, quindi data una matrice non singolare \mathbf{P} Si possono poi costruire due matrici simili a \mathbf{A}_0 e \mathbf{B}_0 :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_0\mathbf{P} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{P}$$

che ancora non commutano essendo:

$$[\mathbf{A}', \mathbf{B}'] = \mathbf{P}^{-1}[\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0]\mathbf{P}$$

e infine due matrici \mathbf{A} , \mathbf{B} :

$$\mathbf{A} = k\mathbf{I} + \mathbf{A}' \quad \mathbf{B} = h\mathbf{I} + \mathbf{B}'$$

tali che:

$$e^{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}} = (-1)^{\mu + \psi}e^{k+h}\mathbf{I}$$

3.2 Conclusioni

Il problema di determinare le condizioni necessarie e sufficienti per cui due matrici di $M(2, \mathbb{R})$ verificano l'equazione funzionale $e^{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}$ è quindi interamente risolto.

Il risultato del Teorema 3.2 può essere espresso anche in termini topologici, notando che il centro $\mathcal{C}(2, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie non connesso, ovviamente isomorfo al gruppo moltiplicativo $\{\mathbb{R}^*, \times\}$ e le sue due componenti connesse sono gli insiemi delle matrici scalari positive e negative. Il Teorema 3.2 può quindi essere riformulato dicendo che $e^{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$ se appartengono alla stessa componente connessa di $\mathcal{C}(2, \mathbb{R})$.

Non è difficile estendere questi risultati al caso di due matrici in $M(2, \mathbb{C})$, basta notare che il suo centro $\mathcal{C}(2, \mathbb{C})$ è connesso, quindi nel Teorema 3.2 basta chiedere che $e^{\mathbf{A} + \mathbf{B}}$, $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$, $e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}$ stiano nel centro, mentre il Teorema 3.3 non è più valido perché la funzione $w = (e^z - 1)/z$ è periodica in \mathbb{C} e quindi in $M(2, \mathbb{C})$ esistono infinite matrici tali che $e^{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}$.

Da una prima ricerca in letteratura non sembra che esista una soluzione nel caso generale di matrici in $M(n, \mathbb{K})$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , nemmeno nel caso $n = 3$.

Riferimenti bibliografici

- [1] Fréchet M. (1953) Les solutions non-commutables de l'équation matricielle $e^{x+y} = e^x e^y$. *Rend. Circ. Math. Palermo* **2** 11-27 e 71-72.
- [2] Morinaga K. - Nono T. (1954) On the non-commutative solutions of the exponential equation $e^x e^y = e^{x+y}$. *J. Sci. Hiroshima Univ. (A)* **17** 345-358.
- [3] Bourgeois G. (2007) On commuting exponentials in low dimensions. *Linear Algebra Appl.* **423** 277-286.
- [4] Clement de Seguins Pazzis (2011) A condition on the powers of $\exp(A)$ and $\exp(B)$ that implies $AB = BA$. *arXIV: 1012.4420v3*.

- [5] Nathalie Nicholle Smalls (2007) The Exponential Function of Matrices.
[http : //digitalarchive.gsu.edu/](http://digitalarchive.gsu.edu/)
- [6] Cleve Moler, Charles Van Loan (2003) Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later *SIAM Review*, Volume 20, Number 4, 1978, pages 801–836

190. Coordinate geografiche e gaussiane, un metodo di trasformazione

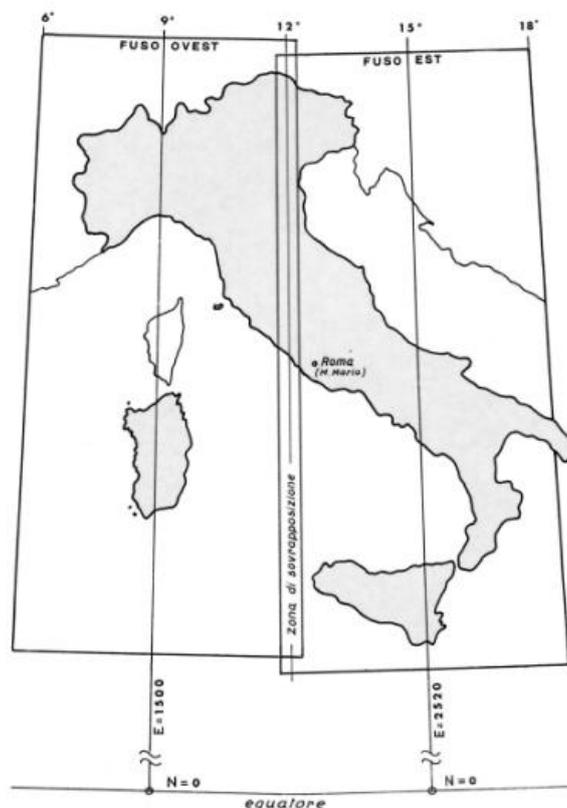
di Michele T. Mazzucato

Compito della scienza non è aprire una porta all'infinito sapere, ma porre una barriera all'infinita ignoranza

Galileo Galilei (1564-1642), atto IX

Vita di Galileo di E. B. F. Brecht

Nel sistema UTM (Universal Transverse Mercator) ogni punto del globo terrestre resta individuato da una coppia di valori che costituiscono le coordinate chilometriche o gaussiane. Queste, ricavate dal reticolato chilometrico già tracciato sulle carte topografiche, vengono definite Coordinata Nord (distanza dall'equatore) e Coordinata Est (distanza dal meridiano centrale di tangenza del fuso al quale appartiene il punto). Allo scopo di eliminare i valori negativi delle coordinate est dei punti posti a ovest del meridiano centrale del fuso, si attribuisce a questo un valore convenzionale detto entità della falsa origine. Tale falsa origine assume, nel sistema UTM, il valore di 500000 metri (al meridiano centrale di ogni fuso UTM) mentre, nel sistema Gauss-Boaga, i valori di 1500000 metri (al meridiano centrale del fuso ovest o fuso 1) e di 2520000 metri (al meridiano centrale del fuso est o fuso 2). Allo stesso modo dicasi per le coordinate nord dei punti posti a sud dell'equatore terrestre dove nel sistema UTM la falsa origine assume il valore convenzionale di 10000000 metri.



I fusi, ovest o primo ed est o secondo, del sistema Gauss-Boaga introdotto nel 1948. Vennero adottati i valori 1500 km e 2520 km per la falsa origine in modo tale che la prima cifra delle coordinate gaussiane indicasse il fuso di appartenenza del punto mentre i venti chilometri aggiuntivi impedissero la confusione nelle coordinate dei punti ricadenti nella zona di sovrapposizione fra i due fusi.

Nella cartografia nazionale attuale i reticolati geografico e chilometrico Gauss-Boaga non vengono tracciati. Tuttavia, all'occorrenza, possono esserlo unendo in maniera diametralmente opposta i rispettivi riferimenti riportati sulla cornice della carta stessa. Questi riferimenti sono l'alternanza di rettangoli bianchi e tratteggiati, corrispondenti ai minuti primi d'arco di longitudine e di latitudine, per il reticolato geografico e i simboli (•-) e (>-) indicanti, rispettivamente, l'appartenenza al fuso ovest o al fuso est, per il reticolato chilometrico Gauss-Boaga. Il meridiano di riferimento italiano è quello passante per la torre trigonometrica posta nei pressi dell'Osservatorio Astronomico di Monte Mario in Roma e avente le seguenti coordinate geografiche rispetto al meridiano fondamentale internazionale di Greenwich:

Nel sistema UTM ED 50	Nel sistema Gauss-Boaga	Nel sistema WGS84
$\varphi=41^{\circ} 55' 31''.487$ N	$\varphi=41^{\circ} 55' 25''.510$ N	$\varphi=41^{\circ} 55' 27''.851$ N
$L=12^{\circ} 27' 10''.930$ E da Gw	$L=12^{\circ} 27' 08''.400$ E da Gw	$L=12^{\circ} 27' 07''.658$ E da Gw

Nel sistema internazionale UTM il globo terrestre è suddiviso in 60 fusi ognuno di 6° d'ampiezza e contraddistinto da un numero dall'1 al 60 procedendo da ovest verso est a partire dall'antimeridiano di Greenwich. I fusi sono attraversati trasversalmente da 20 fasce (10 nell'emisfero boreale e 10 nell'emisfero australe) a partire dall'equatore fino alle latitudini di 84° nord e 80° sud, ognuna di 8° d'ampiezza (con esclusione della fascia più vicina al polo nord che ha un'ampiezza di 12°) e contraddistinta da una lettera dell'alfabeto (dalla c alla x con esclusione della i e della o). L'incontro tra i fusi e le fasce determinano le 1200 zone (20 per ogni fuso) a loro volta ripartite in quadrati di 100 chilometri di lato contrassegnati da coppie di lettere. Ogni punto del globo terrestre viene inequivocabilmente designato da un codice alfanumerico come, per esempio:

32T QR 528036 4923654

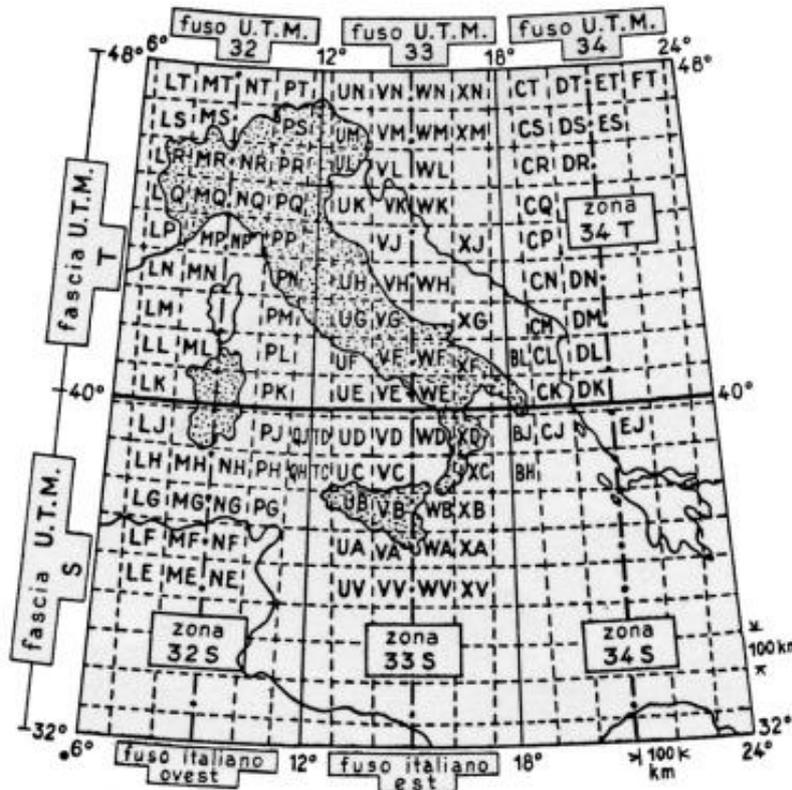
dal quale si rileva che il punto in questione si trova nella *zona 32T* (*fuso 32 e fascia T*), nel *quadrato QR* di 100 chilometri di lato (*colonna Q e riga R*) a 28036 metri (528036-500000, valore della *falsa origine*) a est del meridiano centrale del *fuso 32* ed a 4923654 metri a nord dell'equatore terrestre. Se la coordinata E (est) fosse minore di 500000 metri (valore della falsa origine) si esegue 500000-E, e il punto si troverebbe a ovest del meridiano centrale del fuso a cui appartiene.

Il sistema nazionale Gauss-Boaga, come quello internazionale UTM, è basato sulla rappresentazione cartografica analitica di tipo conforme (ossia che conserva gli angoli fra direzioni corrispondenti) sviluppata dal tedesco Carl Friedrich Gauss (1777-1885) nella seconda decade del XIX secolo mentre il geodeta italiano Giovanni Boaga (1902-1961) elaborò le formule originarie fornite da Gauss e preparò le tabelle numeriche un tempo necessarie per i calcoli delle coordinate e varianti a seconda dell'ellissoide sul quale si “proietta” il globo terrestre.



Carl Friedrich Gauss (1777-1885, autore della rappresentazione cartografica conforme eponima e Giovanni Boaga (1902-1961) che elaborò le formule per la cartografia nazionale italiana.

La rappresentazione cartografica del territorio italiano è contenuta entro due fusi, tra loro sovrapposti di 30', aventi ognuno un'ampiezza angolare di 6°. Il primo fuso (fuso ovest o fuso 32 UTM) è compreso tra i 6° e i 12° E da Gw mentre il secondo fuso (fuso est o fuso 33 UTM più una piccola parte del 34) è compreso tra i 12° e i 18° 30' E da Gw e aventi, rispettivamente, come meridiano centrale di tangenza quello di 9° e di 15° E da Gw (come si può vedere dalle immagini a corredo dello scritto).



Fusi, zone e quadrati di 100 chilometri di lato del territorio nazionale italiano nel sistema UTM.

Da quanto sopra si possono avere, come esempio, i quattro casi seguenti:

caso 1 (fuso 1 o ovest o 32 con punto a est dal meridiano centrale)

coordinate geografiche	coordinate UTM ED50	coordinate Gauss-Boaga
$\varphi = 42^\circ \text{ N}$	$E_{\text{UTM}} = 665646.393 \text{ m}$	$E_{\text{GB}} = 1665595.661 \text{ m}$
$L = 11^\circ \text{ E da Gw}$	$N_{\text{UTM}} = 4651793.530 \text{ m}$	$N_{\text{GB}} = 4651612.288 \text{ m}$

Il punto si trova a $665646.393 - 500\,000 = 165646.393$ metri (o $1665595.661 - 1500000 = 165595.661$ metri) a est del meridiano centrale (di 9° E da Gw) del fuso 32 UTM (o fuso ovest) al quale appartiene ed a 4651793.530 metri (o 4651612.288 metri) a nord dell'equatore terrestre.

caso 2 (fuso 1 o ovest o 32 con punto a ovest dal meridiano centrale)

coordinate geografiche	coordinate UTM ED50	coordinate Gauss-Boaga
$\varphi = 42^\circ \text{ N}$	$E_{\text{UTM}} = 334353.607 \text{ m}$	$E_{\text{GB}} = 1334304.590 \text{ m}$
$L = 7^\circ \text{ E da Gw}$	$N_{\text{UTM}} = 4651793.530 \text{ m}$	$N_{\text{GB}} = 4651610.308 \text{ m}$

Il punto si trova a $500000 - 334353.607 = 165646.393$ metri (o $1500000 - 1334304.590 = 165695.410$ metri) a ovest del meridiano centrale (di 9° E da Gw) del fuso 32 UTM (o fuso ovest) al quale appartiene ed a 4651793.530 metri (o 4651610.308 metri) a nord dell'equatore terrestre.

caso 3 (fuso 2 ° est ° 33 + piccola parte del 34 con punto a est dal meridiano centrale)

coordinate geografiche	coordinate UTM ED50	coordinate Gauss-Boaga
$\varphi = 42^\circ \text{ N}$	$E_{\text{UTM}} = 665646.393 \text{ m}$	$E_{\text{GB}} = 2685586.516 \text{ m}$
$L = 17^\circ \text{ E da Gw}$	$N_{\text{UTM}} = 4651793.530 \text{ m}$	$N_{\text{GB}} = 4651610.323 \text{ m}$

Il punto si trova a $665646.393 - 500000 = 165646.393$ metri (o $2685586.516 - 2520000 = 165586.516$ metri) a est del meridiano centrale (di 15° E da Gw) del fuso 33 UTM (o fuso est) al quale appartiene ed a 4651793.530 metri (o 4651610.323 metri) a nord dell'equatore terrestre.

caso 4 (fuso 2 ° est ° 33 con punto a ovest dal meridiano centrale)

coordinate geografiche	coordinate UTM ED50	coordinate Gauss-Boaga
$\varphi = 42^\circ \text{ N}$	$E_{\text{UTM}} = 334353.607 \text{ m}$	$E_{\text{GB}} = 2354291.093 \text{ m}$
$L = 13^\circ \text{ E da Gw}$	$N_{\text{UTM}} = 4651793.530 \text{ m}$	$N_{\text{GB}} = 4651611.200 \text{ m}$

Il punto si trova a $500000 - 334353.607 = 165646.393$ metri (o $2520000 - 2354291.093 = 165708.907$ metri) a ovest del meridiano centrale (di 15° E da Gw) del fuso 33 UTM (o fuso est) al quale appartiene ed a 4651793.530 metri (o 4651611.200 metri) a nord dell'equatore terrestre.

Limiti astronomici della repubblica italiana

NORD (Piccola Testa Gemella Occidentale - Predoi) Alpi Noriche, provincia di Bolzano	$47^\circ 05' 29.0'' \text{ N}$	$12^\circ 11' 09.7'' \text{ E da Gw}$
EST (Faro di Capo d'Otranto) provincia di Lecce	$40^\circ 26' 03.5'' \text{ N}$	$18^\circ 31' 13.7'' \text{ E da Gw}$
SUD (Punta Pesce Spada) Isola di Lampedusa, provincia di Agrigento	$35^\circ 29' 26.2'' \text{ N}$	$12^\circ 36' 10.0'' \text{ E da Gw}$
OVEST (Testata della Valle Stretta) Alpi Cozie, provincia di Torino	$45^\circ 06' 21.7'' \text{ N}$	$6^\circ 37' 32.1'' \text{ E da Gw}$
	latitudine φ	longitudine λ

Le coordinate gaussiane, per l'Italia, assumono i seguenti valori:

ordinate N (sono sempre positive)

$$4\,000\,000 \text{ m} \leq N \leq 5\,000\,000 \text{ m}$$

ascisse E

nel Sistema Nazionale GB 40

$$\text{per il } 1^\circ \text{ fuso } 1\,263\,000 \text{ m} \leq E_{\text{GB}} \leq 1\,737\,000 \text{ m}$$

$$\text{per il } 2^\circ \text{ fuso } 2\,283\,000 \text{ m} \leq E_{\text{GB}} \leq 2\,757\,000 \text{ m}$$

nel Sistema Internazionale UTM ED 50

$$263\,000 \text{ m} \leq E_{\text{UTM}} \leq 737\,000 \text{ m}$$

Prendendo in considerazione una carta topografica al 25000, dalla quale le coordinate gaussiane vengono misurate approssimate al decametro (sarebbe inutile ed errato scendere fino ai metri poiché la scala della carta non consente una tale approssimazione), la procedura grafico-analitica si sviluppa in due fasi:

1. si misurano direttamente sull'elemento cartografico, mediante l'uso di un coordinatometro o di un decimetro, le coordinate gaussiane E_{UTM} e N_{UTM} del punto;
2. si determinano analiticamente le coordinate geografiche, derivanti dai valori delle coordinate gaussiane ricavate in precedenza, mediante l'utilizzo di formule come quelle fornite dal geodeta Reino Antero Hirvonen (1970) qui di seguito riportate con valori numerici che tengono conto del coefficiente di contrazione 0.9996 (questo permette che il modulo di deformazione lineare assuma il massimo valore di 1.0004 e conseguentemente le deformazioni risultano inferiori o uguali agli errori di graficismo) e

validi per l'Ellissoide Internazionale di Hayford (1909) i cui parametri ellissoidici sono: a (raggio equatoriale) = 6 378 388.000 metri ed s (schiacciamento geometrico) = 0.003 367 003.

Problema diretto

dalle geografiche ($\varphi ; \lambda$) alle gaussiane ($E_{UTM} ; N_{UTM}$)

$$B = \lambda - \lambda_0$$

$$w = \sqrt{1 + 0.006\ 768\ 1702 \times \cos^2 \varphi}$$

con $\lambda_0 = 9^\circ$ oppure 15° (a seconda che il punto appartenga al fuso ovest o al fuso est)

$$A = \arctg \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos(w \times B)}$$

$$v = \sqrt{1 + 0.006\ 768\ 1702 \times \cos^2 A}$$

$$Y = 6\ 397\ 376.633 \times \operatorname{arcsinh} \frac{\cos A \times \operatorname{tg} B}{v}$$

$$N_{UTM} = 111\ 092.08210 \times A - 16\ 100.59187 \times \sin(2A) + \\ + 16.96942 \times \sin(4A) - 0.02226 \times \sin(6A)$$

$$E_{UTM} = y + 500\ 000$$



Il geodeta finlandese Reino Antero Hirvonen (1908-1989).

Problema inverso

dalle gaussiane ($E_{UTM} ; N_{UTM}$) alle geografiche ($\varphi ; \lambda$)

(le formule forniscono la latitudine e la longitudine con la precisione del decimo di secondo d'arco)

$$A = \frac{N_{UTM}}{111\ 092.08210} +$$

$$+ 0.144\ 930\ 0705 \times \sin 2 \frac{N_{UTM}}{111\ 092.08210} +$$

$$+ 0.000\ 213\ 8508 \times \sin 4 \frac{N_{UTM}}{111\ 092.08210} +$$

$$+ 0.000\ 000\ 4322 \times \sin 6 \frac{N_{\text{UTM}}}{111\ 092.08210}$$

$$v = \sqrt{1 + 0.006\ 768\ 1702 \times \cos^2 A}$$

$$y = E_{\text{UTM}} - 500\ 000$$

$$B = \arctg \frac{v \times \sinh \frac{y}{6\ 397\ 376.633}}{\cos A}$$

$$\varphi = \arctg[\text{tg} A \times \cos(v \times B)]$$

$$\lambda = B + \lambda_0$$

con $\lambda_0 = 9^\circ$ oppure 15° (a seconda che il punto appartenga al fuso ovest o al fuso est).

Bibliografia

- AA.VV., Istruzione elementare sull'uso della quadrettatura UTM, IGMI Firenze 1952
 AA.VV., Tavole ausiliarie per i calcoli sulla proiezione di Gauss-Boaga, IGMI Firenze 1954
 Bezoari, G. - Monti, C. - Selvini, A., *Fondamenti di rilevamento generale*, Hoepli Milano 2 voll. 1984
 Boaga, G., Sulla rappresentazione conforme di Gauss, IGM Firenze 1942
 Boaga, G., Trattato di geodesia e topografia con elementi di fotogrammetria, CEDAM Padova 1948
 Gauss, C.F., Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird (Preisarbeit der Kopenhagener Akademie 1822), Schumacher Astronomische Abhandlungen, Altona, n. 3/1825, pp. 5-30
 Hirvonen, R. A., *The use of subroutines in geodetic computations*, Maanmittaus 45, Helsinki, Valtion painatuskeskus 1970, pp. 45-61
 Mazzucato, M.T., *Determinazione delle coordinate geografiche del sito osservativo*, Rivista del Dipartimento del Territorio, n. 3/1998, pp. 105-108
 Mazzucato, M.T., *Globo terrestre*, BIROMA Galliera V., Padova 1996
 Mazzucato, M.T., *La Figura della Terra*, CLUP Milano 2003

191. Proposta per un diverso sviluppo della geometria con l'uso strutturale delle isometrie

di Alfio Grasso
grassoalfino@yahoo.it

Premessa

Per chiarire la metodologia che sta alla base dell'esposizione, è opportuno prendere l'avvio dal resoconto del professore Villani relativo al Congresso internazionale di Cagliari sull'insegnamento della geometria del 1981; in esso si legge:

- «Di geometria ne va insegnata parecchia, a tutti i livelli di scolarità; più di quanto si usa attualmente (da allora la geometria è stata ancora di più trascurata!, il corsivo è mio).
- Occorre distinguere diversi stadi di apprendimento degli allievi e, in ogni stadio, si devono riprendere e rielaborare le nozioni dello stadio precedente e preparare il terreno agli sviluppi previsti nello stadio successivo.
- Nella fase intermedia fra l'insegnamento "sperimentale" della scuola elementare e media e l'insegnamento "razionale" degli ultimi anni di scuola secondaria superiore, occorre prevedere uno stadio di avvio al metodo di deduzione. Poiché l'assiomatica di Euclide-Hilbert è troppo complessa e quella vettoriale troppo astratta, ci si limiterà in questo stadio a familiarizzare gli allievi su parti circoscritte ma significative della geometria.
- In quest'ottica l'insegnante deve possedere un'assiomatica sottostante intuitiva, semplice, dagli assiomi forti – tali cioè da consentire sin dall'inizio un rapido accesso a teoremi interessanti e non immediati – ma intuitivi in quanto traducono proprietà dello spazio che ci circonda, facili a verificarsi (a esempio, l'Assiomatica a base metrica proposta da Choquet già nel 1959 e utilizzata nei testi di Prodi, Lombardo Radice e Mancini Proia, Belli e Lupo Perricone e Pagni e Pallini).
- La strutturazione delle conoscenze in teorie organiche deve essere l'obiettivo finale di tutta l'attività didattica, ma non ne può costituire in alcun modo il punto di partenza.

Gli Elementi di Euclide, summa della matematica fino al 300 a.C. circa, hanno costituito per due millenni il paradigma perfetto di sistema ipotetico-deduttivo, che ha influito fortemente sulla matematica e sulle scienze in genere (Spinoza lo usò addirittura per... provare l'esistenza di Dio).

Il trattato euclideo è in effetti la sintesi creativa del lavoro compiuto da parte dei matematici greci, a partire da Talete (VI secolo a.C.), i cui importanti risultati erano conseguenza più dello sforzo euristico che del rigore dimostrativo.

In essi, come in tutta la letteratura scientifica greca a eccezione de Il Metodo di Archimede (scoperto casualmente nel 1906), non v'è traccia di tutto il lavoro che ha portato a scoprire e congetturare le varie proprietà, che sono state poi tradotte in dimostrazioni. Queste sono svolte in modo razionalmente perfetto ma con costruzioni e procedimenti talora artificiosi - legati al caso specifico - senza l'indicazione di alcun metodo generale che possa servire da guida per la dimostrazione affrontata e per altre.

Gli Elementi non costituiscono quindi un testo scritto a scopo didattico.

Archimede, pur essendo l'ideatore di dimostrazioni che sono un modello di rigore malgrado la straordinaria complessità, chiarisce ne Il Metodo che **la matematica, non è solo rigore, è prima ancora e maggiormente intuizione, formulazione di congetture plausibili, ottenute anche mediante esperienze reali o ideali.**

Questo il pensiero del matematico tra i più grandi di sempre: sarebbe opportuno farne tesoro.

Leibniz, intorno al 1700, scoprì una crepa nella maestosa architettura del genio di Alessandria: neppure la prima proposizione degli Elementi si poteva dedurre dai cinque assiomi euclidei. E Schopenhauer,

più di un secolo dopo, notò che anche la quarta proposizione, **il cosiddetto primo criterio di congruenza dei triangoli, non era dimostrabile con gli assiomi degli Elementi.**

Il sistema assiomatico di Euclide non era completo, cioè non consentiva di dimostrare tutte le proposizioni vere della geometria.

Hilbert aveva come programma filosofico-scientifico quello di provare coerenza (consistenza), cioè non contraddittorietà, e completezza della matematica. Per ovviare alle lacune degli Elementi ne propose nel 1899 una edizione riveduta e corretta, i Fondamenti della Geometria, che contenevano ben ventuno (!) assiomi. Inoltre, per evitare che in futuro qualcuno facesse le pulci ai Fondamenti, dimostrò che il suo sistema assiomatico era completo.

Per quel che riguarda i Fondamenti, gli intenti di Hilbert erano, come si è detto:

- Rivedere, correggere e completare gli Elementi.
- Stimolare i matematici a cimentarsi nella ricerca della completezza e coerenza della matematica di cui era fermamente convinto.

Purtroppo per lui, nel 1930-31, **Gödel**, con i teoremi di incompletezza, **mise fine all'illusione razionalista che la matematica potesse dimostrare la propria coerenza.**

Anche i Fondamenti non sono quindi un libro di testo scolastico.

Intorno al 1830 Bolyai e Lobačevskij introdussero, indipendentemente l'uno dall'altro, la geometria non euclidea detta iperbolica (Gauss nei primi anni del 1800 era giunto a conclusioni simili, ma non le aveva pubblicate «per evitare le risa dei beoti», per dirlo con le sue stesse parole). Inoltre, nello stesso periodo, il precocissimo genio di Galois ideò la Teoria dei gruppi che ha assunto una straordinaria importanza sia in matematica sia nelle scienze applicate, in fisica delle particelle elementari dopo l'introduzione dei Gruppi continui di Sophus Lie. Nel 1854 Riemann propose un'altra geometria non euclidea, quella ellittica, che servirà da modello per la Relatività Generale.

Queste idee innovative culminarono nel Programma di Erlangen di **Klein** del 1872, nel quale Klein propose, e la comunità scientifica fece proprio, che:

“Una geometria è lo studio delle proprietà che rimangono invariate quando si sottopone il piano (lo spazio) a un gruppo di trasformazioni”.

Nel 1915 Emmy Noether fuse simmetrie, nel più ampio senso moderno di trasformazioni invarianti rispetto a determinate caratteristiche, e leggi di conservazione, e dimostrò che a ogni simmetria continua corrisponde una legge di conservazione e viceversa:

La simmetria per traslazione corrisponde alla conservazione della quantità di moto.

La simmetria rispetto al tempo corrisponde alla conservazione dell'energia.

La simmetria per rotazione corrisponde alla conservazione del momento angolare, cioè del momento della quantità di moto.

I nostri testi di geometria invece, hanno seguito e seguono il metodo di Euclide-Hilbert, con rarissime eccezioni, come quelle prima segnalate e il libro di Morin e Busulini (1960), tra i pochi citati anche nelle bibliografie di autori stranieri.

Nei libri di testo le trasformazioni sono presentate dopo avere svolto la geometria in modo tradizionale e diventano così un'incomprensibile, pesante e inutile sovrastruttura.

Uso strutturale delle trasformazioni

Presento a questo punto alcune considerazioni sull'opportunità dell'uso *strutturale* delle trasformazioni nello studio della geometria. Talune sono tratte dal citato resoconto del professore Villani, altre, più modestamente, sono frutto della mia personale esperienza e riflessione.

- L'impostazione tradizionale pone l'accento su situazioni “locali”, su singole figure delle quali studia alcune proprietà, con metodi ingegnosi ma legati a casi specifici, quindi non estensibili allo studio ed alla classificazione di altre figure di tipo più generale. Con le trasformazioni invece è coinvolto tutto l'ambiente in cui si opera (piano o spazio), e l'attenzione si sposta dalle “figure” alle loro “proprietà”. Ciò permette una maggiore generalità, sistematicità e unitarietà di metodi per lo studio e la classificazione delle figure.

- Il nuovo assetto logico-deduttivo, che utilizza *sistematicamente* le trasformazioni geometriche, propone un numero ridotto di assiomi (7) semplici, intuitivi e forti.
- Altro punto di forza delle trasformazioni risiede nella loro struttura di gruppo (non commutativo), che consente di fornire significativi esempi di gruppi non numerici e loro sottogruppi abeliani e non. La struttura di gruppo è ricca di conseguenze e favorirà, nel seguito degli studi, l'introduzione degli spazi vettoriali. Inoltre l'uso delle trasformazioni geometriche permette di svolgere dimostrazioni "algebriche" in geometria.
- Ancora, nelle trasformazioni geometriche è fondamentale la ricerca dell'*invariante* che è uno degli strumenti basilari dell'indagine scientifica. In Fisica a esempio leggi fondamentali sono quelle di conservazione, cioè d'invarianza. Inoltre la ricerca degli invarianti stimola i procedimenti euristici che sono fondamentali per l'apprendimento. E ancora lo studio delle proprietà che rimangono costanti permette di ampliare gli insiemi in cui si opera, passando dal gruppo I delle isometrie al gruppo S delle similitudini, $I \subset S$, al gruppo A delle affinità, $I \subset S \subset A$, al gruppo P delle proiezioni, $I \subset S \subset A \subset P$, così come in algebra $N \subset Z \subset Q \subset R$, evidenziando una maggiore unitarietà nello studio della matematica.
- Altro punto significativo dell'uso delle trasformazioni geometriche e della nuova impostazione assiomatica sta nella possibilità di utilizzare rapidamente i suggestivi e potenti metodi della geometria analitica la cui importanza è evidente e indiscutibile e trova immediata applicazione allo studio della Fisica che in certi istituti inizia già al primo anno.
- Infine, ma non per ultimo, nello spazio l'assioma di simmetria rispetto a un piano permette, in maniera immediata, l'introduzione della perpendicolare da un punto a un piano e le sue importanti conseguenze estese ai piani perpendicolari. Mentre nella trattazione tradizionale devono essere premessi vari teoremi, tra i quali quello "delle tre perpendicolari" è complesso già nell'enunciato. Anche la traslazione poi rende immediate alcune dimostrazioni.

Il percorso

Dopo queste premesse traccio il percorso che seguirò, prendendo le mosse dalla preistoria.

Già l'uomo primitivo, per spostarsi da un posto (punto) a un altro più rapidamente possibile, così da sfuggire a un predatore o giungere per primo a una fonte di cibo, *ha scelto "naturalmente" il tragitto di lunghezza minima* fra i percorsi che li congiungono: quello *rettilineo tra i due luoghi* (utilizzeremo impropriamente il termine lunghezza come sinonimo di misura, perché chiaramente intuitivo). Noi lo chiamiamo segmento che congiunge i due punti. L'umanità ha poi tradotto in termini matematici la molteplicità delle sue esperienze in tali situazioni nel concetto di distanza tra due punti, come la *misura del percorso rettilineo fra essi*: questa è la prima idea fondamentale nel "piano" della savana.

L'idea della lunghezza **segmento** è legata quindi all'attività umana primitiva. Un ramo lungo, solido e appuntito divenne uno strumento di difesa e offesa, un tronco d'albero di lunghezza conveniente, fatto cadere tra le due rive di un ruscello, consentì di superare quest'ostacolo, e ancora dei tronchi di opportune dimensioni divennero pilastri per le palafitte e pareti delle capanne, ecc.

Negli *Elementi* di Euclide, il *terzo* dei ventitré "termini" afferma: « Estremi di una linea sono punti». Poi i postulati 1 e 2 asseriscono:

- «Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto»
- «E che una *retta* si possa continuamente prolungare in linea retta».

Anche per Euclide quindi, concetto basilare è **il percorso rettilineo fra due punti**, cioè quello che noi chiamiamo *segmento*, non l'idea di retta che è una postulazione successiva. Ed è la "retta terminata" – il segmento – che utilizza nel resto degli *Elementi*. Il secondo postulato poi esprime il concetto aristotelico d'infinito in potenza che ha dominato in matematica fino alla seconda metà del XIX secolo, con *l'infinito in atto* di **Cantor**, e usato già, intuitivamente, da Galilei nel moto parabolico.

Importanza della simmetria speculare nella Natura

In principio fu la simmetria.

Secondo il *Modello standard* infatti, dopo circa 10^{-32} secondi dal Big Bang, comparvero *particelle e antiparticelle*.

Successivamente, circa 400.000 anni dopo il Big Bang, emerse la luce, che si comporta come se “*annusasse*” i percorsi e scegliesse quello in cui impiega il tempo minimo e fa il percorso più breve per andare da un punto a un altro: *la riflessione della luce* è infatti una legge di simmetria.

Poi, nel corso dell'evoluzione la Natura, circa 600 milioni di anni fa, escogitò la simmetria bilaterale e si accorse che essa era una strategia vincente perché “*economica*”: *due al prezzo di uno*.

E la simmetria *bilaterale* o *speculare* si manifesta in Natura sia nel campo *microscopico* – a esempio nelle strutture delle molecole delle sostanze cristalline - sia in quello *macroscopico* e nei mondi minerale, vegetale e animale, in quest'ultimo in particolare. Ciò non si può attribuire al caso. Infatti, gli animali sono aggregati di miliardi di miliardi di molecole, ed esistono certo modi infinitamente più numerosi di costruire con esse strutture asimmetriche piuttosto che simmetriche.

L'uomo, suggestionato dal senso di armonia di certe configurazioni presenti in natura, è stato indotto, fin dai tempi più antichi, a riversare l'osservazione delle figure con tali caratteristiche nelle creazioni artistiche. E invero molti esempi di *simmetrie* (e anche di *traslazioni* e *simmetrie centrali*), utilizzate in modo matematicamente non consapevole, si trovano già in *graffiti del paleolitico e del neolitico* e poi nei capolavori di tutti i tempi e di tutte le civiltà. Inoltre, stano ma vero, *simmetrie* e *traslazioni* sono utilizzate e associate a regole ben precise in musica, sì in musica! Esse sono chiamate, a seconda delle caratteristiche presentate: *ritardi o anticipazioni, trasposizioni, moto retrogrado, inversioni melodiche*, che costituiscono le solide basi delle maestose architetture delle opere dei grandi compositori del passato come Vivaldi, Bach, Mozart, Beethoven, Händel, Debussy, per citarne alcuni, e anche in quelle del presente, Battisti e Battiato ad esempio.

I concetti fondamentali sono allora distanza fra due punti e simmetria bilaterale.

Il sistema assiomatico utilizzato introduce da subito la continuità, che può essere presentata in maniera didatticamente semplice, basandosi sull'esperienza comune, come illustrato nell'appendice.

Introdotta la simmetria assiale proponendone significative immagini e presentando progetti con software dinamici, gli assiomi, sottintesi (meglio) o presentati sin dall'inizio, sono i seguenti.

ASSIOMA I (d'incidenza)

Per ogni coppia di punti distinti esiste una retta ed una sola cui appartengono. (Oppure, più solitamente) Per due punti distinti passa una ed una sola retta.

ASSIOMA II (di Euclide)

Per ogni retta r , e per ogni punto P esiste una ed una sola retta per P parallela ad r . (O anche)
Per un punto si può condurre una ed una sola retta parallela a una retta.

ASSIOMA III (di ordine)

Ogni retta è dotata di due relazioni d'ordine totale, una opposta all'altra.

ASSIOMA IV (di partizione)

Data nel piano π una retta r , l'insieme complementare di r rispetto a π è suddiviso in due sottoinsiemi, detti semipiani aperti, dotati di infiniti punti e tali che:

il segmento che congiunge due qualunque punti di uno stesso semipiano aperto non interseca r ;

il segmento che congiunge due qualsiasi punti di semipiani aperti opposti incontra r .

ASSIOMA V (della distanza)

A ogni coppia di punti (A,B) del piano è associato un numero reale $r \geq 0$, detto distanza tra A e B , che indichiamo con \overline{AB} , con le seguenti proprietà:

$\overline{AB} = 0$ se e solo se $A \equiv B$;

per ogni coppia di punti (A,B) , $\overline{AB} = \overline{BA}$ (proprietà simmetrica della distanza);

assegnati una semiretta s di origine O ed un numero reale $r \geq 0$, su s esiste *uno ed un solo* punto P tale che $\overline{OP} = r$ (continuità);

per ogni terna di punti $\{A, X$ e $B\}$ si ha:

$$\overline{AB} \leq \overline{AX} + \overline{XB} \text{ (disuguaglianza triangolare),}$$

dove l'uguaglianza vale *se e solo* se X appartiene al segmento AB che denoteremo con $[AB]$.

ASSIOMA VI (di simmetria)

Per ogni retta s di π esiste una ed una sola simmetria di asse s .

Introdotta l'angolo come rotazione, angolo di due semirette della stessa origine O , a e b nell'ordine, è la rotazione di centro O che trasforma a in b , si può rendere chiaro l'assioma successivo mediante l'esempio concreto del "giro vita", cioè "del filo avvolto attorno a una circonferenza".

ASSIOMA VII (della misura degli angoli)

A ogni numero reale $r \geq 0$ è associato un angolo, di cui r è detto la misura o ampiezza, tale che alla somma di due angoli consecutivi è associato il numero somma delle ampiezze dei due angoli.

Se $0 \leq r < 2\pi$, ($0^\circ \leq r^\circ < 360^\circ$) il numero è detto misura principale; ogni altra misura è un suo multiplo intero relativo di 2π (360°). Un angolo ha quindi infinite misure.

Se p (p°) è la misura principale di un angolo, ogni misura x è:

$$x = p + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}, \text{ o } x^\circ = p^\circ + k360^\circ, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \text{ (vedi risoluzioni delle equazioni goniometriche).}$$

Il percorso con le isometrie

Ecco il percorso che si potrebbe seguire prendendo le mosse dalle isometrie.

Partire da immagini della natura, dell'arte, esperienze comuni, software dinamici e attività pratiche, che ne chiariscano le proprietà fondamentali così che i giovani si rendano bene conto del "sorte" dei punti (La nozione astratta di corrispondenza biunivoca è chiara per i docenti, non per i giovani).

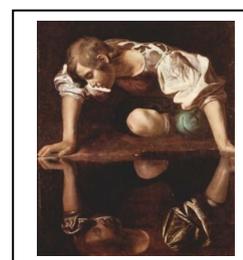
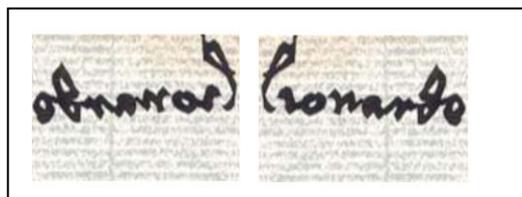
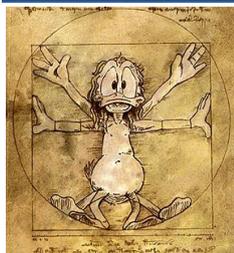
Proporre l'approccio razionale partendo dalla simmetria assiale – data intuitivamente o come assioma – (che consente di ottenere in modo semplice e immediato molte importanti proprietà, e successivamente di traslazione e rotazione - quindi simmetria centrale - che si ottengono dal "prodotto" di particolari simmetrie assiali).

Didatticamente è opportuno presentare diversi teoremi come problemi che porteranno all'enunciato.

È bene poi far notare che il piano non si riduce al foglio o alla lavagna: il piano è infinito. Inoltre ci sono contesti in cui gli "oggetti" geometrici non si possono rendere in grafico o in cui una proprietà dedotta dal disegno potrebbe **non** essere vera perché riferita solo a casi specifici. È necessario quindi controllare con la ragione ciò che abbiamo intuito (Cenni di logica e "comuni" regole di deduzione).

La domanda fondamentale che ci si deve porre affrontando un problema o una dimostrazione è se c'è un'isometria, all'inizio una simmetria assiale, o qualche teorema provato che ci può aiutare.

Simmetria assiale



La simmetria assiale: "madre" e regina di tutte le isometrie.

Riprendiamo la definizione di simmetria rispetto a una retta o simmetria assiale.

Data una retta a , diciamo simmetria di asse a , l'isometria tale che:

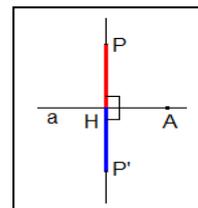
Tutti e soli i punti di a sono uniti.

Ogni punto di uno dei semipiani aperti determinati da a si trasforma in un punto del semipiano aperto opposto.

La prima caratteristica assicura che *l'asse è costituito di punti uniti*. Per la seconda è spontaneo chiedersi se la retta che passa per due punti associati distinti gode di qualche particolare proprietà.

Siano s_a la simmetria rispetto a una retta a , P un punto che non le appartiene e P' il suo simmetrico.

Poiché P e P' appartengono a semipiani aperti opposti, il segmento $[PP']$ interseca a in un punto, H (assioma IV), che è per ciò **punto unito** (figura).



Allora i punti P , P' e H stanno sulla stessa retta che possiamo indicare come PP' , PH o $P'H$; ma PH ha per simmetrica $P'H$, cioè se stessa, e da ciò la retta PP' è unita nella simmetria rispetto ad a . La proprietà dimostrata costituisce il

Teorema 1

In una simmetria assiale la retta che congiunge due punti corrispondenti distinti è unita.

Sotto la forma condizionale (alla quale è bene abituare i giovani):

Se s_a è la simmetria di asse a , allora la retta per due punti associati distinti è unita in s_a .

Osservazioni

I segmenti $[P'H]$ e $[PH]$ sono simmetrici, hanno allora la stessa lunghezza: $\overline{HP'} = \overline{HP}$.

Indicato con A (figura precedente) un punto di a diverso da H , \widehat{AHP} e $\widehat{AHP'}$ hanno la stessa ampiezza perché simmetrici e, poiché la loro somma è un angolo piatto, sono retti.

(Anche il termine ampiezza è *improprio* ma chiaro e intuitivo per i giovani in questo stadio).

N.B. L'asse di una simmetria è **luogo di punti uniti**, cioè ogni suo punto ha per associato se stesso (è fisso, sta fermo), per ciò si dice che è **“puntualmente” unito**. Invece la retta individuata da due punti simmetrici distinti è **unita** nel suo complesso. Ciò significa che i suoi punti, escluso quello comune con l'asse, immagini diverse da sé; tali punti si trasformano *riposizionandosi* però sulla retta stessa (si scambiano le semirette opposte rispetto ad H): tale retta si dice **“globalmente” unita**.

Faccio osservare a questo punto che l'esistenza e l'unicità della perpendicolare da un punto a una retta, nell'esposizione tradizionale sono molto complicate e artificiose.

Ecco come si può procedere nella nostra sistemazione. (A volte sarò un po' sintetico perché quanto scrivo è solo esemplificativo della metodologia seguita).

Il ruolo speciale della retta che congiunge due punti simmetrici distinti e l'Osservazione 2, suggeriscono la seguente:

Definizione

Una retta b si dice *perpendicolare* a una retta a , se b è *diversa* da a e *unita* nella simmetria di asse a .

Il secondo punto dell'osservazione precedente “salda” la nuova definizione di perpendicolarità con quella che i giovani conoscono dalla scuola media.

Il teorema e la definizione precedenti garantiscono la seguente proprietà:

Per un punto fuori di una retta passa una sola perpendicolare a una retta data.

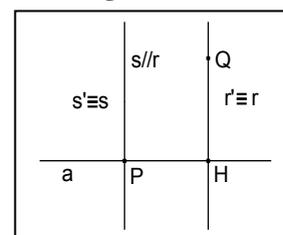
È la retta che passa per il punto dato e per il suo simmetrico rispetto alla retta assegnata.

È naturale chiedersi se questa proprietà è vera anche quando il punto appartiene alla retta.

Cioè: Se P è un punto di una retta a , esiste una e una sola perpendicolare per P ad a ? Scopriamolo.

Ci possiamo servire del teorema precedente e, come di frequente, della simmetria assiale.

Per il Teorema 1 da un punto Q fuori di a possiamo condurre una sola perpendicolare r ad a , unita in s_a ; chiediamoci se c'è qualche “speciale” retta per P di cui è facile trovare la simmetrica: l'unica retta *speciale* è la parallela s per P a r .



Nella s_a , s' , simmetrica di s , deve passare per P , punto unito, ed essere parallela

a r che è unita; allora s' è parallela a r perché *in un'isometria rette parallele si trasformano in rette parallele*. Per l'Assioma II, s' coincide con s ,

che quindi è unita in s_a e, in forza della definizione, perpendicolare ad a .

In conclusione:

Per un punto di una retta si può condurre una e una sola perpendicolare alla retta.

Le proprietà sotto segnate si possono sintetizzare nel

Teorema 3

Per ogni punto del piano esiste una e una sola perpendicolare a una retta data.

Se P è un punto del piano, allora per P passa una e una sola perpendicolare a una retta a .

Si dimostra poi facilmente il

Teorema 4

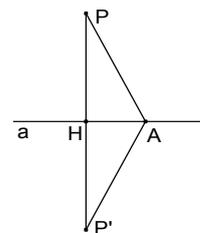
Se P è un punto fuori di una retta a , allora esiste su a un solo punto H la cui distanza da P è minima. (Simmetria e proprietà triangolare applicata al triangolo PAP' (figura).

Allora: il punto di una retta a con distanza minima da un punto dato P è il punto H comune ad a e alla perpendicolare per P ad a .

Il punto H è detto **proiezione ortogonale** o semplicemente **proiezione di P su a** .

Il precedente risultato è particolarmente importante perché esprime la

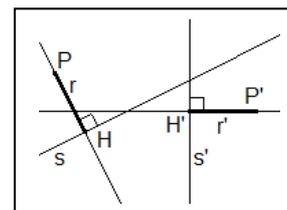
perpendicolarità in termini di **distanza minima** tra un punto e una retta: *la perpendicolare da un punto P a una retta a si può pensare come la retta per P e per il punto di a che possiede distanza minima da P* . La distanza minima fra P e i punti di a , cioè *la lunghezza del segmento di perpendicolare da P ad a* , \overline{PH} , si definisce *distanza di P da a* (Essa è quindi un numero $d \geq 0$, non un segmento come scrivono quasi tutti i libri di testo di geometria di primo anno).



Corollario 1

In un'isometria rette perpendicolari si trasformano in rette perpendicolari.

Il punto H di s (figura) è quello di r a distanza minima da P ; allora H' , associato di H nell'isometria, è il punto di s' , immagine di s , a distanza minima da P' su r' , poiché in un'isometria le distanze tra coppie di punti corrispondenti sono uguali.



È immediato anche il successivo (simmetria assiale e proprietà triangolare).

Teorema 5

Se una retta b è perpendicolare a una retta a , allora a è perpendicolare a b .

Allora la relazione di perpendicolarità fra rette gode della *proprietà simmetrica* e quindi si può parlare di rette perpendicolari senza indicarne l'ordine.

Proseguiamo nella scoperta di semplici ma significative proprietà delle simmetria assiale, esaminando come si trasformano, in una simmetria assiale, altri semplici "oggetti" del piano.

Teorema 6

Se una retta interseca l'asse in un punto, la retta simmetrica incontra l'asse nello stesso punto.

Il punto comune alla retta e all'asse è unito, quindi la retta corrispondente passa per lo stesso punto.

Teorema 7

In una simmetria assiale una retta parallela all'asse si trasforma in una retta parallela all'asse.

Se una retta è parallela all'asse di simmetria, allora la sua corrispondente è parallela all'asse.

Per assurdo. Se la simmetrica intersecasse l'asse, per il teorema precedente, anche la retta data dovrebbe incontrarlo, contro l'ipotesi, da cui la tesi.

Corollario 2 (Importante)

Se due rette corrispondenti in una simmetria assiale sono incidenti, allora il punto comune è unito.

Legame fra perpendicolarità e parallelismo tra rette.

Teorema 8

Se due rette sono perpendicolari a una stessa retta, allora sono parallele.

Si può dimostrare facilmente per assurdo.

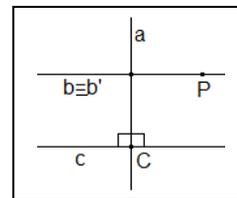
Si provano subito, senza le proprietà delle rette parallele tagliate da una trasversale, i teoremi:

Teorema 9 (Inverso del precedente)

Se due rette sono parallele, allora ogni retta perpendicolare a una è perpendicolare all'altra.

Siano b e c le rette parallele e a la perpendicolare a c in un suo punto C . Proviamo che b' , immagine di b nella simmetria di asse a , coincide con b .

Dal Teorema 3 per qualunque punto P di b esiste la perpendicolare p ad a . Usiamo ora la simmetria s_a ; in essa p è unita e, per il teorema precedente, è parallela a c : per l'assioma di Euclide p coincide con b che risulta così unita, cioè perpendicolare ad a .



I teoremi 8 e 9 stabiliscono una condizione sufficiente e necessaria perché due rette siano parallele.

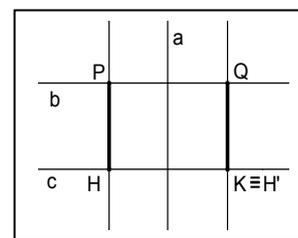
Teorema 10

Date due rette parallele la distanza di tutti i punti di una dall'altra è costante.

Se due rette sono parallele, allora la distanza di tutti i punti di una dall'altra è costante.

Siano b e c due rette parallele, P e Q due qualsiasi punti di una di esse, a esempio b , e H e K nell'ordine le proiezioni ortogonali di P e Q su c (figura).

Proviamo che $\overline{QK} = \overline{PH}$ servendoci della simmetria assiale. La più spontanea è quella relativa all'asse a del segmento PQ , chiamiamola s_a . In s_a , PQ è unita per costruzione e HK per il Corollario 1; poi a P corrisponde Q e l'associato di H punto di c a distanza minima da P , è il punto H' di c a distanza minima da Q ; ed esso è per ipotesi K : $K \equiv H'$, da cui la tesi.



Quanto provato permette di determinare subito le equazioni delle rette parallele agli assi; ciò è importante, dato che già al primo anno ci si serve spesso dei grafici in fisica.

Ritengo di avere chiarito sufficientemente l'uso della simmetria assiale nelle dimostrazioni.

Proseguo presentandone l'utilizzazione nelle applicazioni.

Nella trattazione, chiamiamola così *moderna*, le figure si classificano in base alle simmetrie (assiali o centrali) di cui godono. Per i triangoli si dà la seguente

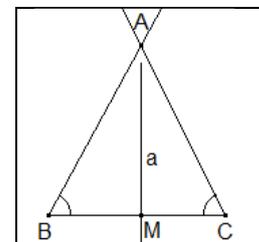
definizione: si dice *isoscele* un triangolo che ha un asse di simmetria.

L'asse allora passa per un vertice e scambia gli altri due (È opportuno mostrare con un *software* dinamico che è globalmente unito).

In virtù delle proprietà della simmetria assiale è immediato provare che:

- Se un triangolo ha due angoli della stessa ampiezza, allora è isoscele.

Sia ABC un triangolo con \hat{B} e \hat{C} di uguale ampiezza β e γ (figura). Nella simmetria s_a rispetto all'asse a del segmento $[BC]$, che lo interseca nel punto medio M , la semiretta BC ha per immagine la semiretta CB e la semiretta BA si trasforma nella semiretta di origine C – immagine di B - che forma con CB un angolo di uguale ampiezza: questa è la semiretta CA . Per il Corollario 2 le semirette BA e CA sono associate in s_a , ed essendo incidenti in A , questo è unito. Allora la retta AM è asse di simmetria e ABC è isoscele (o $\overline{AC} = \overline{AB}$ e così il ABC è isoscele).



Nell'esposizione tradizionale la dimostrazione è lunga e complessa.

In ogni triangolo isoscele:

- Le mediane che escono dai vertici della base hanno la stessa lunghezza.
- Le altezze che escono dai vertici della base hanno la stessa lunghezza.
- I segmenti di bisettrice degli angoli alla base hanno la stessa lunghezza.

Nella sistemazione tradizionale le dimostrazioni sono complicate perché i triangoli che si devono considerare sono “incastrati” uno nell’altro e inoltre bisogna ogni volta esaminarli alla luce di criteri di congruenza diversi. Noi invece utilizziamo la simmetria rispetto all’asse del triangolo.

Le mediane relative ai lati isometrici hanno la stessa lunghezza.

Nella simmetria s rispetto all’asse CH del triangolo, C è unito e ad A corrisponde B .

L’immagine di M punto medio di AC deve avere stare su CB e avere da C – che è unito in s – distanza uguale alla metà di \overline{AC} : essa è allora il punto M' : $\overline{AM'} = \overline{BM}$.

Le altezze relative agli lati isometrici hanno la stessa lunghezza.

Ancora nella simmetria s l’associato di L , punto del segmento AC a distanza minima da B , è il punto di BC – immagine di AC – a distanza minima da A corrispondente di B in s , cioè L' : quindi $\overline{AL'} = \overline{BL}$.

Le bisettrici degli angoli alla base hanno la stessa lunghezza.

Sempre in s , $\hat{A}BN$ ha per associato l’angolo di vertice A – simmetrico di B – che forma

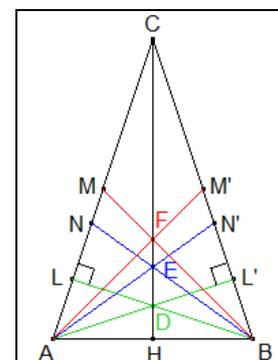
con la semiretta AB – immagine della semiretta BA – un angolo di ampiezza uguale a quella di $\hat{H}BN$:

tale angolo è per ipotesi $\hat{B}AN'$, quindi la tesi.

Un’osservazione interessante.

Poiché i segmenti AM' e AM sono corrispondenti e incidenti, essi, per il Corollario 2, s’intersecano in un punto dell’asse CH . Analoghe considerazioni per altezze e bisettrici.

Per dimostrare queste proprietà con la sistemazione tradizionale, si deve faticare non poco.



Presento infine due esempi che si riferiscono all’uso della simmetria nello spazio. In esso, oltre ai consueti assiomi, si dà l’assioma di simmetria rispetto a un piano che è, come osservato, “naturale”.

Per ogni piano esiste una isometria e una sola, detta simmetria rispetto al piano, nella quale:

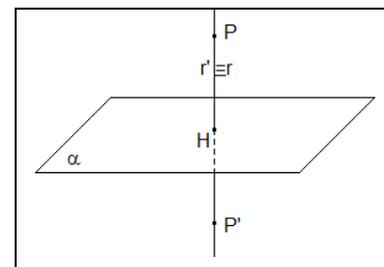
tutti e soli i punti del piano sono uniti;

a un qualunque punto di un semispazio aperto è associato un punto del semispazio aperto opposto.

Perpendicolarità fra retta e piano

In analogia a quanto fatto nel piano, rendiamo “costruttiva” la definizione di retta per un punto perpendicolare a un piano.

Dati un piano α e un punto P non appartenente ad α , diciamo P' il suo associato nella simmetria rispetto ad α s_α . ed r la retta PP' . Poiché P e P' stanno in semipiani aperti opposti, il segmento $[PP']$ interseca il piano nel punto H , unito in s_α ; le rette PP' , PH e $P'H$ coincidono, ed essendo $P'H$ corrispondente di PH , la retta PP' è unita in s_α .



Poniamo allora la seguente *definizione*:

Una retta si dice perpendicolare a un piano se *non* giace su questo ed è unita nella simmetria rispetto a esso.

Poiché è unica la retta per due punti distinti, dalla costruzione fatta e dalla definizione precedente otteniamo immediatamente il

Teorema 1

Tutte e sole le rette che passano per coppie di punti corrispondenti distinti nella simmetria rispetto a un piano sono perpendicolari al piano.

Corollario

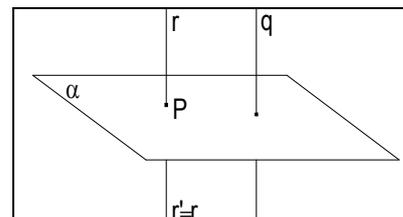
Per ogni punto non appartenente a un piano si può tracciare una ed una sola perpendicolare al piano (quella che passa per il punto e per il suo corrispondente nella simmetria rispetto al piano).

Ci proponiamo ora di provare che vale, come suggerisce l’intuizione, il

Teorema 2

Per ogni punto appartenente a un piano si può tracciare una e una sola perpendicolare al piano.

Siano α un piano e P un punto su α (figura). Indicata con q una retta perpendicolare ad α , in analogia a come fatto nel piano, consideriamo la retta r per P parallela a q: nella simmetria rispetto ad α , s_α , r' associata di r, passa per P che è punto unito, ed è parallela a q, poiché una isometria conserva il parallelismo; ma q è unita in s_α , quindi $r' \equiv r$ per l'assioma di Euclide: allora r perpendicolare ad α .



I due teoremi precedenti si possono sintetizzare nel

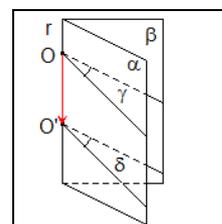
Teorema 3

Per ogni punto dello spazio si può condurre una ed una sola perpendicolare ad un piano.

Teorema

Sezioni parallele di uno stesso diedro sono angoli della stessa ampiezza.

Siano a e β due piani del fascio di asse una retta r e γ e δ gli angoli intersezione di due piani paralleli che intersecano il diedro rispettivamente in due semirette di vertici O e O'. La traslazione τ di vettore $\overline{OO'}$ muta l'angolo γ nell'angolo δ perché in una traslazione a semirette corrispondono semirette parallele ed equiverse. I due angoli hanno allora la stessa ampiezza poiché associati in una traslazione.



In particolare, tutte le sezioni normali di un diedro hanno la stessa ampiezza.

Spero di avere esposto in modo comprensibile il mio pensiero e mi scuso per le imprecisioni.

Se qualche collega per (s)ventura volesse scambiare con me qualche idea in relazione a quanto ho scritto o ad altro, può contattarmi al seguente indirizzo: grassoalfino@yahoo.it.

Appendice

Già presso i popoli antichi, dati due luoghi, due punti, la loro distanza era indicata da un *numero positivo* che quantificava, misurava il rapporto fra *il tragitto rettilineo* che li legava e un tragitto rettilineo prefissato, quello che chiamiamo unità di misura.

Questa era legata, a seconda delle situazioni, a parti del corpo o a oggetti concreti o situazioni reali.

Così troviamo:

dito (2 cm circa), *palm* (7-8 cm), *spanna* (25 cm circa), *pie* (30 cm circa), *cu* (50 cm circa) *passo* (75 cm circa), *per* (3 m circa), *asta* (52 m circa), *stadio* (180 m circa), fiume (20 Km circa).

Autostrade di Roma antica (un'introduzione "soft" dei numeri reali non negativi)

A partire dalla fine del IV secolo a.C. i romani costruirono strade di grande comunicazione per collegare le città più importanti e consentire agli eserciti, alle merci e ai cittadini di viaggiare rapidamente. L'imperatore **Augusto**, nel 20 a.C. piazzò il *Miliarum aureum* (la pietra miliare aurea) nel foro a Roma. Si voleva così evidenziare ancora di più che Roma era il centro del mondo.

Lungo le strade, i cippi delle **pietre miliari**, in cui erano incise le distanze dal cuore dell'impero permettevano di conoscere esattamente i luoghi e le loro distanze (la parola *miliari* deriva dal latino *milia*, cioè **miglia**; 1 miglio = 1480 m circa). Ancora oggi, lungo le strade e le autostrade si trovano cippi o cartelli che indicano le distanze in chilometri da una città.

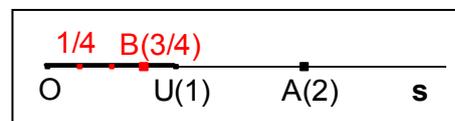
Chiaramente se uno abita in una piccola frazione o in una casa singola fuori città, si devono usare unità di misura più piccole. E, man mano che le distanze diminuiscono, si devono usare unità sempre più piccole (il diametro di un elettrone è dell'ordine di 10^{-13} cm, cioè 0,0000000000001 un decimillesimo di miliardesimo di centimetro!).

Usiamo allora la matematica e vediamo come esprimere in tutti i casi la distanza fra due punti. Per ottenere ciò stabiliremo uno stretto legame fra i numeri $r \geq 0$ e i punti di una semiretta s , che possiamo

pensare come la rappresentazione geometrica di una strada a senso unico e la cui origine coincide con l'inizio del senso unico stesso.

Assegnata una semiretta s di origine O , fissiamo su essa un punto U e assumiamo il segmento OU come unità di misura dei segmenti, cioè poniamo la distanza tra O e U - che s'indica con \overline{OU} - uguale a uno: $\overline{OU} = 1$.

Consideriamo ora un numero naturale, per esempio 2; riportando due volte su s a partire da O il segmento OU s'individua un solo punto, sia A , tale che $\overline{OA} = 2$:



chiamiamo *immagine, associato o corrispondente* di 2 mediante il procedimento descritto e lo indichiamo con $A(2)$.

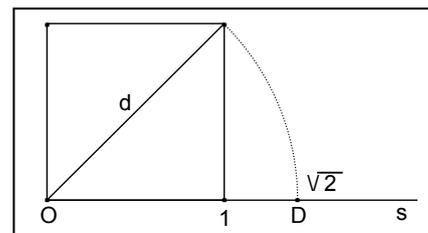
Analogamente, preso un numero razionale, a esempio quello rappresentato dalla frazione $3/4$, dividiamo l'unità in quattro parti e troviamo il punto B riportando su s , a partire da O , tre volte la quarta parte ottenuta (figura): anche in questo caso il procedimento utilizzato ci fa pervenire a un solo punto B di s ; scriviamo allora $B(3/4)$. È il punto B ora *l'immagine, l'associato o il corrispondente* su s di $3/4$.

In generale, assegnato il numero razionale individuato dalla frazione n/d - con n e d naturali e d diverso da zero (perché?) - dividiamo il segmento unitario d parti, uguali a $1/d$ e riportiamo su s a partire da O n volte il segmento $1/d$: consideriamo il punto P così ottenuto l'immagine di n/d su s , e scriviamo $P=(n/d)$.

Con questo procedimento possiamo disporre tutti i numeri razionali $q \geq 0$ su una semiretta s , trovando a ciascuno un posto su un unico punto (all'origine O di s associamo chiaramente lo 0).

Pensate che abbiamo esaurito i punti della semiretta? Che l'abbiamo "riempita"? Per accertarcene eseguiamo una semplice costruzione.

Realizziamo il quadrato che ha per lato 1 a partire dall'origine O della semiretta s . La misura della diagonale, in forza del teorema di Pitagora, che avete già studiato alla scuola media, è: $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.



Riportiamo ora d su s , sempre da O , otteniamo il punto D tale che $\overline{OD} = \sqrt{2}$. La costruzione suggerisce che $\sqrt{2}$ è compreso fra 1 e 2, ma non sappiamo che "razza" di numero è. Imparerete a conoscerlo bene in seguito assieme ad altri infiniti della stessa stirpe, per ora vi è sufficiente sapere che:

$\sqrt{2}$ non è un numero razionale, non si può esprimere come una frazione e quindi come numero decimale finito o periodico. Esso appartiene a un nuovo *club esclusivo*, quello dei numeri irrazionali. Essi, nella scrittura decimale, presentano la caratteristica che sono numeri decimali con infinite cifre dopo la virgola, ma senza periodo.

Allora su s esistono punti che non rappresentano numeri razionali; questi lasciano sulla semiretta infiniti "buchi". Se però consideriamo numeri come $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{10}, \sqrt[3]{2}$, ecc, che avete già incontrato alla scuola media, essi permettono di "riempire" le infinite lacune lasciate dai numeri razionali: anche il famigerato numero π , che si trova nella lunghezza della circonferenza, $2\pi r$, nell'area del cerchio, πr^2 , nel volume della sfera, $(4/3)\pi r^3$, è un numero irrazionale; lo avete usato con l'approssimazione alla cifra dei centesimi: 3,14.

L'insieme formato dai numeri razionali maggiori o uguali a 0 e dagli irrazionali maggiori di 0 si chiama insieme dei *numeri reali* $r \geq 0$. Esso s'indica con R^+ .

Con l'introduzione dei numeri irrazionali maggiori o uguali a 0 possiamo allora affermare che, data una semiretta s di origine O :

- a ogni numero reale $r \geq 0$ corrisponde *un solo punto* P su s , quello per cui $\overline{OP} = r$;
- a ciascun punto P di s è associato *l'unico numero reale* $r \geq 0$ tale che $r = \overline{OP}$.

Questo procedimento determina un legame 1 a 1 fra *tutti* i numeri reali $r \geq 0$ e *tutti* i punti di una semiretta s e *viceversa*. Ciò si esprime dicendo che:

si è stabilita una corrispondenza biunivoca fra punti di una semiretta e numeri reali non negativi, cioè maggiori o uguali a 0.

(Non ho insistito oltre sui numeri irrazionali perché, per tutto il primo anno, si utilizza solo un piccolo numero di proprietà dell'addizione e della moltiplicazione, già consolidate, anche se non assiomatizzate, cioè quelle di *campo totalmente ordinato* dei numeri razionali \mathbb{Q}).

Alfio Grasso

Giarre 24 Settembre 2013

192. De minimis magnitudinibus, analisi infinitesimale in epoca ellenistica e cenni sull'opera di Newton

di Matteo Veglianti

Per capire il pensiero che si aveva in età ellenistica riguardo al concetto di infinitesimo bisogna innanzitutto capire quale era la concezione di numero reale. I greci non avevano una parola per indicare i numeri reali per il semplice fatto che il concetto fondamentale della matematica per loro non era il numero, concetto piuttosto astratto, ma era la grandezza!

Quello di grandezza è un concetto che oggi è usato soprattutto in fisica, ma in età ellenistica con questo termine si indicavano sia gli enti che noi chiameremmo fisici (lunghezza, massa, tempo) sia quelli che noi oggi chiameremmo matematici (numeri o figure geometriche), questo perché all'epoca non c'era la distinzione tra queste due discipline.

Chiaramente con queste grandezze si possono fare tutte le operazioni che noi facciamo con i numeri, in particolare quella che più ci interessa è la divisione. Il rapporto tra due grandezze è l'analogo, infatti, del nostro "numero reale".

Per prima cosa, quindi, bisogna decidere quando due grandezze hanno un rapporto e questo compito è spettato al grande Euclide di Alessandria.

La quarta definizione del quinto libro degli Elementi, infatti, dice: "due grandezze hanno rapporto quando esiste un multiplo dell'una che supera l'altra e un multiplo dell'altra che supera l'una" (L'edizione italiana curata da Nicolò Tartaglia riporta: "Le magnitudine sono dette hauer proportione fra loro lequali moltiplicate se possono l'una e l'altra eccedere").

Questa proposizione definisce subito coppie di grandezze con rapporto e coppie di grandezze senza rapporto, facciamo alcuni esempi.

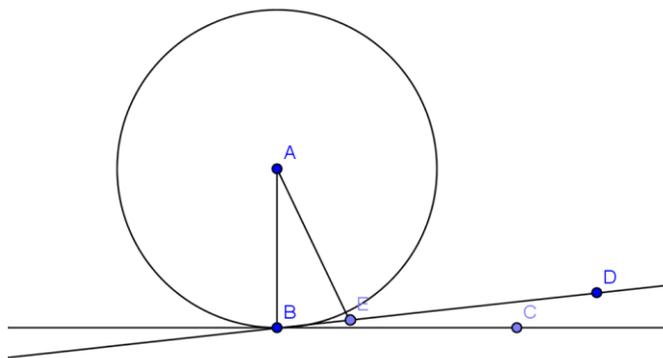
Un segmento ed una figura piana, ad esempio un rettangolo, non hanno rapporto, infatti non esiste alcun multiplo del segmento che sia più grande del rettangolo ed in generale non hanno rapporto qualsiasi coppia di grandezze non omogenee (cioè grandezze di dimensioni differenti).

Viceversa la diagonale e il lato del quadrato hanno rapporto in quanto la diagonale è più grande del lato e il doppio del lato è più grande della diagonale, infatti esso può essere considerato come la diagonale di un altro quadrato avente come lato la diagonale del quadrato di partenza. Un'altra coppia di grandezze che hanno rapporto sono la circonferenza e il diametro di un cerchio.

Considerando la definizione di Euclide, quindi, si supera il famoso problema di incommensurabilità tra il lato e la diagonale del quadrato che aveva suscitato tanto imbarazzo tra i pitagorici.

Euclide quindi con questa definizione sottintende che due grandezze non omogenee non possono avere rapporto; ma non afferma che due grandezze omogenee possono sempre averlo, perché questa mancanza? Risulta difficile credere che Euclide si sia dimenticato di fare tale affermazione, è più semplice credere che egli non abbia inserito questa proposizione nella sua opera poiché voleva lasciare aperta la strada a teorie che non prevedono rapporti tra grandezze omogenee. Questa congettura non è del tutto campata in aria perché ci sono alcuni esempi che fanno propendere per questa idea. Vediamone tre.

Il primo esempio è tratto proprio dagli Elementi, in particolare dalla proposizione 16 del terzo libro. Si afferma: "Condotta una linea retta per un estremo del diametro di un cerchio e giacente al di fuori del cerchio, tra essa e il cerchio non si può inserire nessun'altra linea retta. E l'angolo mistilineo formato da tale retta e dalla circonferenza è più piccolo di qualsiasi angolo rettilineo formato dalla stessa retta con un'altra retta generica".



Con riferimento alla figura, si vuole dimostrare che tra la circonferenza e la retta BC non si può inserire nessun'altra retta.

Supponiamo dunque, per assurdo, che si possa tracciare una retta tra la circonferenza e la retta BC, per esempio la retta BD. Tracciamo ora il segmento di perpendicolare condotto dal centro del cerchio (il punto A) alla retta BD. Detto E il piede della perpendicolare, si ha che gli angoli AEB e AED sono retti. L'angolo ABE, dunque è minore di un angolo retto (poiché il triangolo ABE è retto in E) e di conseguenza il lato AB sarà maggiore di AE in quanto opposto ad angolo maggiore. Ma questo è assurdo dal momento che AE, congiungendo il centro del cerchio con un punto esterno ad esso, è maggiore del raggio, e dunque di AB. Da ciò si deduce la verità della tesi, ovvero che non si può inserire alcuna retta tra la circonferenza e la retta BC. Da questo si ricava immediatamente che l'angolo mistilineo formato dalla circonferenza e dalla retta BC è più piccolo dell'angolo CBD, poiché se fosse più grande, allora lo si potrebbe dividere in due parti e quindi si potrebbe inserire una retta tra la circonferenza e la retta BC, ma abbiamo appena dimostrato che ciò è impossibile!

Da questo esempio si capisce come Euclide non ammetteva un rapporto tra angoli, o per lo meno in questo caso particolare; due grandezze omogenee, dunque, almeno in un caso (quello appena visto), non hanno rapporto.

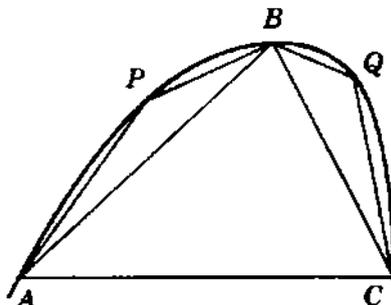
Un altro esempio viene dall'astronomia e la testimonianza ci è data dall'Arenario di Archimede. Tra le critiche alla teoria eliocentrica proposta da Aristarco di Samo (III sec. a.C.), infatti, in particolare c'è la seguente: se la Terra veramente si muove intorno al Sole, come mai non si vedono effetti di parallasse guardando le stelle fisse? Aristarco rispondeva dicendo che la distanza Sole-stelle fisse e la distanza Sole-Terra hanno lo stesso rapporto che c'è tra una superficie sferica e il suo centro (o, se vogliamo, tra un segmento e un punto). Quindi anche questa coppia di grandezze omogenee (distanza Sole-Terra e distanza Sole-stelle fisse) non ha rapporto.

L'ultimo esempio è preso dall'opera attribuita ad Aristotele, i "Problemi meccanici". Quando Aristotele descrive il moto circolare, infatti, afferma che il punto che si muove di tale moto è animato da due spostamenti, uno tangenziale e uno centripeto, che non hanno rapporto (noi oggi diremo che lo spostamento tangenziale è infinitesimo e quello centripeto è infinitesimo di ordine superiore). Questi tre esempi mostrano che l'idea di grandezze omogenee senza rapporto non era assente in epoca ellenistica ed in particolare non hanno rapporto quelle grandezze che noi oggi diremo infinitesime. Ammettendo però grandezze senza rapporto si concepisce l'infinitesimo come qualcosa in atto; concetto ripreso da Leibniz nel 1600 e da Abraham Robinson negli anni '60 ed è alla base dell'analisi non standard. L'analisi standard invece concepisce gli infinitesimi come grandezze potenziali, non attuali e questo deriva dal fatto che si assume come postulato che due grandezze omogenee hanno sempre un rapporto (rapporto che a volte può essere minore di qualsiasi quantità si voglia).

Questo assioma è noto come assioma di Archimede e lo troviamo citato in alcune sue opere, tra cui l'opera sulla quadratura della parabola. In quest'opera Archimede dimostra, tra le altre cose, che l'area del segmento parabolico è $\frac{4}{3}$ di quella del massimo triangolo inscritto in esso. Per dimostrare ciò ricopre la superficie del segmento con dei triangoli e poi fa la somma delle aree di tutti i triangoli in un processo che ricorda vagamente l'integrazione di Riemann. Il rigore di Archimede è talmente elevato che egli si pone un problema: se si considera il segmento parabolico come la figura geometrica chiusa delimitata dal segmento e dall'arco di parabola, questa non coincide con l'unione di tutti i triangoli, poiché l'unione di tutti i triangoli non contiene la frontiera del segmento parabolico; chiaramente nel calcolare la misura della

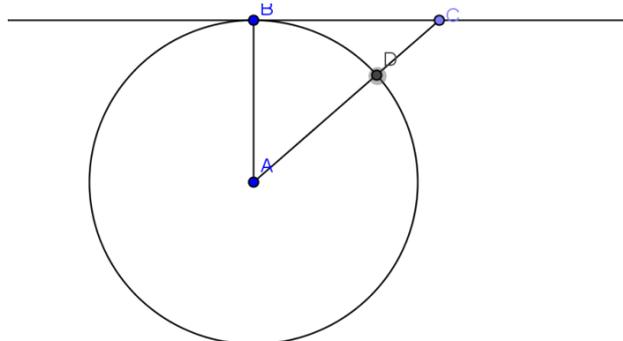
superficie questo non genera problemi, però concettualmente questo fatto è scomodo. Per superarlo Archimede introduce un assioma: “*Se due superfici sono diverse, allora esiste un multiplo della differenza che supera qualsiasi superficie prefissata*”.

Questo elimina il problema accennato in quanto, detto in termini Euclidei, due superfici hanno sempre rapporto. E generalizzando, due grandezze omogenee hanno sempre rapporto!



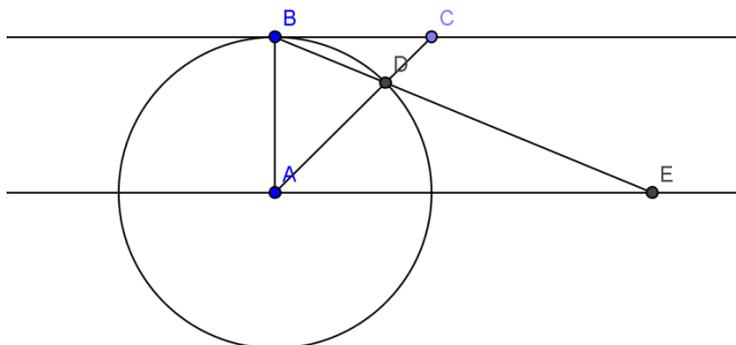
La ricerca di Archimede però non si ferma alla formulazione di questo importante assioma: vanno citati almeno altri due suoi risultati.

Il primo è quello di aver individuato due infinitesimi di ordine diverso. Un suo teorema afferma infatti che data una circonferenza di centro A ed una retta ad essa tangente nel punto B, è sempre possibile individuare un punto C sulla retta tale che il rapporto $\frac{CD}{BC}$ è minore di qualsiasi quantità prefissata.



Per dimostrarlo, Archimede traccia la retta parallela alla retta BC passante per il centro A della circonferenza e congiunge il punto B col punto D e prolunga tale segmento dalla parte di D fino ad incontrare la suddetta retta e chiama E il punto di intersezione. Ora, i due triangoli BCD e ADE sono simili in quanto gli angoli BDC e ADE sono uguali perché opposti al vertice, gli angoli DBC e DEA sono uguali perché angoli alterni interni individuati dalle due rette parallele BC e AE tagliate dalla trasversale BE e infine, per lo stesso motivo, sono uguali gli angoli BCD e DAE. Dalla similitudine dei due triangoli si ricava: $\frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AE} = \frac{\text{costante}}{\text{variabile}} = \frac{1}{k}$ e quindi per K sufficientemente grande il rapporto

$\frac{CD}{BC}$ diventa arbitrariamente piccolo, questo avviene nel limite di C che tende a B.

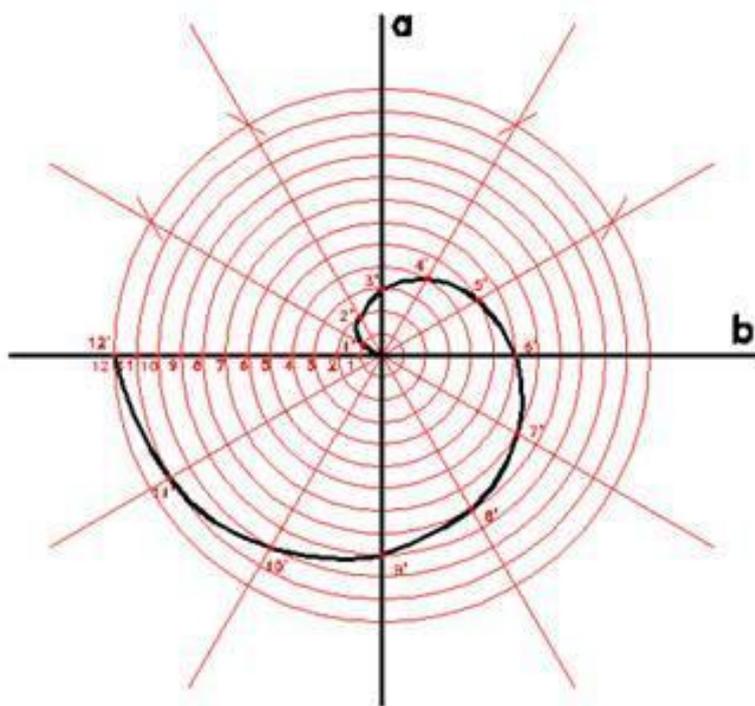


Noi oggi diremo che quando C tende a B , ovvero quando BC tende a zero, chiaramente BC è infinitesimo e CD è infinitesimo di ordine superiore a BC . È interessante vedere come l'infinitesimo è qui considerato come qualcosa di potenziale, ovvero il rapporto $\frac{CD}{BC}$ esiste sempre, ma per BC che tende a 0 entrambi le quantità diventano infinitesime ma una risulta infinitamente più piccola dell'altra; cioè il rapporto viene a mancare quando si passa al limite e questo è quello che si studia ancora oggi nelle nostre scuole!

Il secondo risultato è tratto dall'opera sulle spirali, che è l'opera di Archimede con il contenuto matematico più avanzato che ci è rimasta. Archimede considera una spirale descritta da un punto che si muove di moto rettilineo uniforme su una semiretta che ruota di moto circolare uniforme intorno alla propria origine, tale curva è chiamata oggi "spirale di Archimede" (la sua equazione in coordinate polari è $\rho=k\theta$). Archimede affronta due problemi: quello di trovare la direzione della retta tangente alla spirale in ogni punto e quello di calcolare l'area racchiusa dalla spirale ogni giro.

Questi due problemi sono alla base del calcolo differenziale e del calcolo integrale rispettivamente.

Tralasciamo il primo problema, che è abbastanza complicato e vediamo invece il procedimento adottato per ottenere la quadratura del primo giro della spirale.



Innanzitutto si divide la spirale in N settori (dalla figura $N=12$) e si approssima ogni settore di spirale con i settori circolari inscritto e circoscritto; in questo modo l'intera superficie S delimitata dalla spirale sarà approssimata per difetto dalla somma di tutti i settori circolari interni (chiamiamo tale somma I_N) e per eccesso dalla somma di tutti i settori circolari esterni (chiamiamo tale somma C_N). Chiaramente più N è grande e più queste somme saranno vicine al valore vero.

A questo punto Archimede dimostra che la differenza tra C_N e I_N può essere arbitrariamente piccola, cioè preso un N sufficientemente grande, tale differenza risulterà minore di una quantità prefissata. Infatti, come si vede subito dalla figura questa differenza coincide con il settore circolare circoscritto all'ultimo settore di spirale, difatti per ogni settore di spirale, il settore circolare inscritto corrisponde allo stesso settore circolare che circoscrive il settore di spirale precedente mentre il settore circolare circoscritto corrisponde a quello che è inscritto nel settore di spirale successivo, cioè:

$$C_N = \sum_{k=1}^N S_k \quad \text{e} \quad I_N = \sum_{k=1}^{N-1} S_k$$

A questo punto possiamo vedere qual è la superficie del k -esimo settore di spirale S_k . Chiaramente la coordinata lineare ρ aumenta linearmente con k , cioè è proporzionale a k e poiché i settori circolari sono

tutti simili, hanno cioè, tutti lo stesso angolo, la loro superficie è proporzionale al quadrato della coordinata lineare e quindi al quadrato di k ; possiamo perciò scrivere: $S_k = ak^2$. La superficie del settore circolare circoscritto all'ultimo settore di spirale è $S_N = \frac{1}{N}C$, da cui $C = N \cdot S_N = aN^3$ ($C = \pi R^2$ è la superficie del cerchio di raggio $R = 2\pi k$, quello che Archimede chiama "primo cerchio"). Detto ciò Archimede afferma che la superficie racchiusa dalla spirale dopo il primo giro è un terzo del primo cerchio: $S = \frac{1}{3}C$; come è suo solito è ignoto il procedimento usato per arrivare a questa conclusione, ma dimostra per assurdo la sua affermazione mostrando che S non può essere né minore, né maggiore di $\frac{1}{3}C$.

Supponiamo infatti $S < \frac{1}{3}C$, siccome la differenza tra C_N e I_N può essere resa arbitrariamente piccola, esiste un N tale che $C_N < \frac{1}{3}C$.

Ma $C_N = \sum_{k=1}^N S_k = a \sum_{k=1}^N k^2 = a \frac{1}{3}N \left(N + \frac{1}{2} \right) (N + 1) > \frac{1}{3}aN^2 > \frac{1}{3}C$. Che è contraddittorio.

Analogamente supponendo $S > \frac{1}{3}C$, esisterà un N tale che $I_N > \frac{1}{3}C$.

Ma $I_N = \sum_{k=1}^{N-1} S_k = a \sum_{k=1}^{N-1} k^2 = a \frac{1}{3}N \left(N - \frac{1}{2} \right) (N - 1) < \frac{1}{3}aN^3 < \frac{1}{3}C$. Che è contraddittorio.

Risulta perciò dimostrata l'affermazione di Archimede $S = \frac{1}{3}C$: la superficie delimitata dalla spirale è un terzo del primo cerchio!

Questo procedimento, a differenza di quello usato per calcolare l'area del segmento parabolico, è del tutto analogo al metodo di integrazione di Riemann, anzi l'integrazione di Riemann è la generalizzazione di questo.

Al livello del rigore, inoltre, Archimede ha superato di gran lunga tutti i suoi successori almeno fino alla seconda metà del XIX secolo, cioè per oltre due millenni. Per esempio anche la necessità di introdurre un postulato è simbolo di un livello di rigore elevatissimo che non ha nulla da invidiare alle opere di analisi del XX secolo, anzi è proprio lo studio attento di Archimede e di Euclide che ha permesso agli analisti del XIX secolo di recuperare la metodologia ellenistica e quindi di riuscire a ricavare, in pochi anni, moltissimi risultati interessanti in un processo analogo a quello che portò Euclide, in una vita, ad ottenere una quantità immensa di risultati che si continuano a studiare ancora oggi, cioè dopo 23 secoli.

Ma vediamo ora brevemente alcuni risultati successivi, contenuti nei *"Philosophiae Naturalis Principia Mathematica"* di Newton (1687).

Nella sezione I Newton scrive come "titolo": "Metodo delle prime e delle ultime ragioni, col cui aiuto si dimostrano le cose che seguono". (Nel testo originale è *"De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur"*).

Col termine "ultima ragione" Newton intende quindi l'ultimo rapporto tra due grandezze ("ragione" è la traduzione dal latino di "ratio", la quale è l'analogo della parola greca "logos", cioè "rapporto"). Quest'ultimo rapporto oggi è chiamato limite del rapporto, ovvero derivata, cioè è il rapporto quando le due quantità diventano infinitesime. Newton ha quindi l'idea che quando due grandezze diventano "evanescenti" (per usare la sua terminologia), cioè infinitesime, hanno comunque un rapporto: quello che chiama "ultimo rapporto".

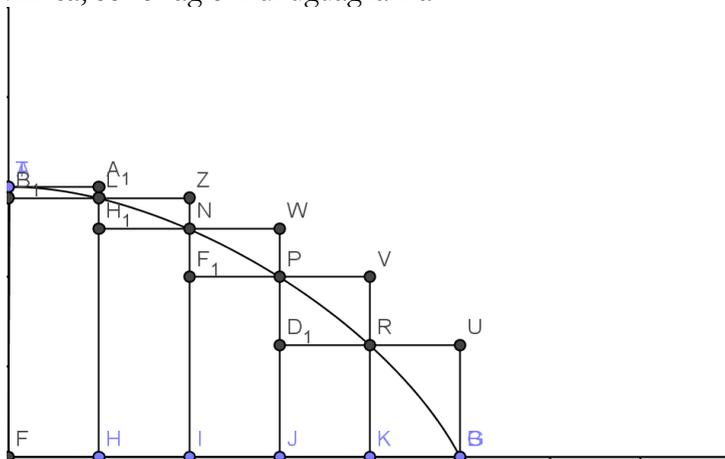
Newton in pratica vuole estendere ad una curva qualsiasi il metodo usato da Archimede per calcolare l'area della spirale, ci riesce solo in parte poiché, se da una parte acquisisce generalità, dall'altra subisce una drastica perdita di rigore.

Il lemma I, per esempio, asserisce: “Le quantità, come anche i rapporti fra quantità, che costantemente tendono all’eguaglianza in un qualsiasi tempo finito, e prima della fine di quel tempo si accostano l’una all’altra più di una qualsiasi differenza data, divengono infine uguali”.

In pratica con questo lemma, Newton sta considerando grandezze continue, ma lo fa senza dare una definizione di continuità; inoltre asserisce che queste grandezze variano, ma non dice mai rispetto a cosa variano, cioè non considera funzioni matematiche, sembra che esse varino nel tempo realmente; l’opera di Newton, da questo punto di vista, non può essere considerata matematica, ma è da classificare nelle opere di filosofia naturale.

Ma veniamo all’esempio che ci interessa: il lemma II. Senza enunciarlo diremo brevemente di cosa parla.

Newton vuole ora generalizzare il procedimento di Archimede visto sopra e lo fa in questo modo: considera una generica curva e approssima la sua superficie con N rettangoli contenuti e contenenti la curva e mostra che la somma delle differenze tra i rettangoli esterni e quelli interni è uguale al più grande di tutti questi rettangoli, il quale, dipendendo da N , può essere reso piccolo a piacere (per N sufficientemente grande). Afferma quindi che “Se la larghezza di questi rettangoli diminuirà e il loro numero aumenterà all’infinito, dico che le ultime ragioni che hanno fra di loro la figura inscritta, quella circoscritta e quella curvilinea, sono ragioni di uguaglianza”.



Come si vede dalla figura questo funziona solo se la funzione è monotona decrescente, altrimenti non è vero che la somma di tutti gli scarti è pari al rettangolo maggiore; inoltre Newton non definisce cos’è una curva (dice semplicemente: “data una curva qualsiasi”), ne tanto meno cosa è una curva integrabile.

Analogamente, nel lemma VI egli cerca di introdurre il concetto di derivata; anche qui parla di una curva generica senza assicurarsi che sia differenziabile e il livello di rigore è piuttosto basso.

Chiaramente la grandezza di Newton sta nel cercare di generalizzare il procedimento di Archimede, la figura che troviamo nella sua opera, infatti è familiare a noi tutti, la troviamo infatti in ogni manuale di analisi. Newton però è ancora lontano dal recupero del metodo ellenistico, metodo che si riacquisterà timidamente nella seconda metà del XIX secolo. Il recupero del metodo e del rigore ellenistico è fondamentale per la nascita da una parte del calcolo integrale di Riemann, che altro non è che la generalizzazione del procedimento di Archimede, sia a livello concettuale che al livello formale (e questa seconda caratteristica, ripeto, è quella che manca nell’opera di Newton); dall’altra parte del calcolo differenziale di Cauchy; alla luce di questo, non stupisce il fatto che il recupero della metodologia ellenistica porta, nel giro di pochi anni, ad una quantità sorprendente di risultati!

193. Lo scaffale dei libri

“La misura del mondo” di Daniel Kehlmann

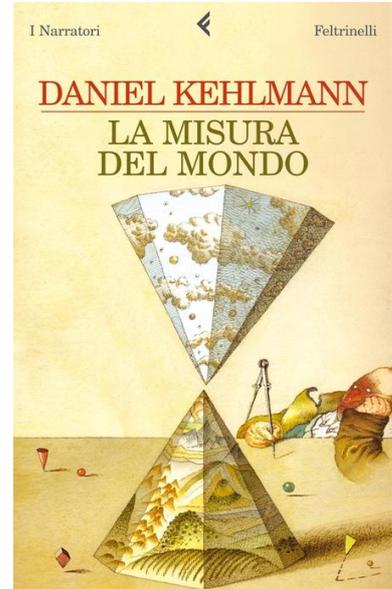
Il libro parla della vita di due importanti scienziati dell'Ottocento: Alexander von Humboldt e Carl Friedrich Gauss. Le loro vite, presentate in parallelo, hanno modo di incrociarsi solo nel 1828. Alexander von Humboldt è un ispettore minerario, che, all'indomani della morte della madre, decide di organizzare una spedizione in Sudamerica. È accompagnato da Aimé Bonpland, medico, naturalista e botanico francese: i due personaggi scoprono di avere un passato molto simile e gli stessi progetti per il futuro. Decidono di andare in Spagna e, a Madrid, ottengono udienza con Manuel de Urquijo, un ministro che prepara loro dei documenti in base ai quali deve essere garantito loro ogni tipo di sostegno. A La Coruna si imbarcano sulla prima fregata che prende la via dei Tropici e giungono a Trinidad. Durante i sei mesi in Nuova Andalusia, esaminano e misurano tutto ciò che si può misurare.

A Caracas hanno modo di compiere l'ascesa della Silla e poi, a dorso di muli, partono alla volta dell'Orinoco. Venduti i loro muli nella città di San Fernando, comprano una lunga barca a vela con un tettuccio di legno, per esplorare il canale fra l'Orinoco e il Rio delle Amazzoni. Man mano procedono, la vegetazione diventa sempre più fitta e il letto del fiume è così ampio da lasciar pensare che si stiano dirigendo verso il mare aperto. Raggiunte le famigerate cateratte, il fiume ridiventa molto stretto e le vorticose rapide fanno roteare la barca, mettendo in pericolo i suoi occupanti. Si inoltrano sul Rio Negro e a San Carlos raggiungono l'equatore magnetico. Grazie all'angolazione dell'orbita lunare dalla Croce del Sud – che verifica per ore con il telescopio – Humboldt si rende conto che quella zona non è mai stata cartografata: la missione Esmeralda costituisce l'ultimo insediamento cristiano, prima di uno sconosciuto mondo selvaggio e decidono quindi di ritirarsi.

Humboldt e Bonpland tentano la salita sul Chimborazo, ma la neve sempre più alta causa la caduta di entrambi. Avvolti nella nebbia, preda del mal di montagna e, senza aver mai raggiunto la cima, ridiscendono con fatica. Nella notte, Humboldt scrive più di venti lettere, con le quali comunica all'Europa di essere giunto più in alto di quanto avesse fatto qualsiasi altro uomo fino ad allora.

Spinti alla deriva da un'eruzione del vulcano Cotopaxi, i due proseguono il loro viaggio verso la Nuova Spagna. Bonpland, smagrito per la febbre e molto invecchiato e Humboldt, che sembra sempre lo stesso nonostante il passare degli anni, salgono sul Popocatepeti e visitano le rovine di Teotihuacan. Sul vulcano Jorullo, Humboldt si cala nel cratere e ha modo di sconfessare la teoria del nettunismo. A Veracruz salgono infine su una nave per tornare all'Avana, da dove raggiungono Philadelphia. A Washington partecipano a una cena di gala indetta dal presidente e, tornato in Europa, Humboldt decide di fermarsi a Parigi.

Gauss è un vero enfant prodige, come dimostra il celeberrimo aneddoto secondo il quale svolse in tre minuti il compito, assegnato dal maestro, di addizionare tutti i numeri naturali da uno a cento. Più avanti, il maestro



convince il padre di Gauss a non mandare il figlio a lavorare nella filanda ma a studiare al liceo. Quando ha l'occasione di incontrare il duca di Brunswick, Gauss riesce a impressionarlo con la sua conoscenza e le sue prestazioni in matematica e questi ordina che gli venga assegnato un sussidio.

La scelta di Gauss di dedicarsi alla matematica non è scontata e nemmeno immediata: la sua decisione avviene il giorno in cui riesce a costruire un poligono di diciassette lati, con una dimostrazione impeccabile. Ha solo diciannove anni. Dopo la laurea, avendo perso il sussidio del duca che non aveva mai approvato la sua partenza per Gottinga, trova lavoro come aiuto agrimensore, ma ha anche il tempo per lavorare alle *Disquisitiones Arithmeticae*, il capolavoro della sua vita, pubblicato appena ventenne. La sua predizione sul luogo in cui sarebbe riapparso il piccolo pianeta Cerere lo rende famoso e il duca gli propone di diventare il direttore dell'osservatorio. Non avendo ottenuto ciò che chiedeva – non si accontentava infatti di fare il direttore dell'osservatorio – Gauss decide di trasferirsi a Gottinga.

L'incontro tra i due scienziati avviene nel 1828 a Berlino, in occasione del Congresso degli scienziati tedeschi. All'epoca, Gauss si sta occupando di calcolo delle probabilità, mentre Humboldt è ciambellano. Vagando per le strade di Berlino, il figlio di Gauss, Eugen – da lui disprezzato perché considerato un fallito e un incapace – finisce con il ritrovarsi coinvolto in alcuni disordini, a causa dei quali viene catturato dalla gendarmeria. Informato di quanto successo, Gauss, insieme a Humboldt, si impegna per salvare il figlio, mettendosi in contatto con Vogt, comandante dei gendarmi. Il risultato è l'esilio in America, dove, senza la forte invadenza del padre, Eugen forse riuscirà a rifarsi una vita.

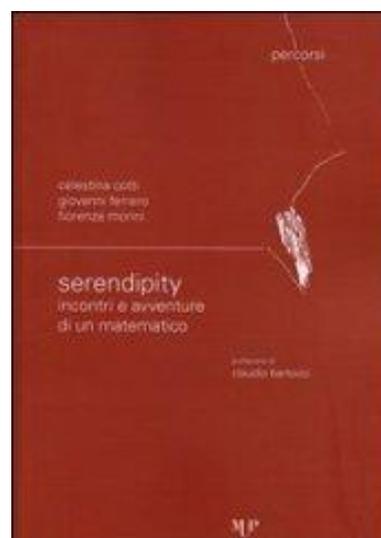
Al termine del Congresso, Humboldt parte per la Russia, affrontando una deludente spedizione, e Gauss comincia la sua collaborazione con Weber, per i suoi studi sul magnetismo.

Daniela Molinari

“Serendipity, incontri e avventure di un matematico” di Cotti, Ferrero, Morin

Il libro in oggetto è il primo della collana “Percorsi”, dedicata alla divulgazione scientifica, della Casa Editrice Monte Università Parma Editore. Gli autori sono tre docenti universitari di Algebra e Geometria: Celestina Cotti, Giovanni Ferrero e Fiorenza Morini, autori anche di numerose pubblicazioni scientifiche.

Cominciamo dal titolo: “Serendipity”, il cui significato ci viene spiegato, con dovizia di particolari, dal prof. Claudio Bartocci, nell'interessante prefazione. «Il concetto di serendipity [...] si rivela particolarmente appropriato a descrivere quell'imponderabile fattore di “caso e sagacia” che è caratteristico del processo di scoperta scientifica [...] Gli esempi a questo riguardo certamente non fanno difetto: la scoperta dei raggi X da parte di Röntgen o quella della radioattività da parte di Becquerel sono entrambe “serendipitous”, cioè dovute ad avvenimenti accidentali e ad osservazioni fortuite, così come il rilevamento dell'inaspettato “potere selettivo dei neutroni lenti” che



vale a Fermi il premio Nobel per la Fisica nel 1938 o l'individuazione della "penicillina" a opera di Fleming.»

E il nostro protagonista, il docente universitario FU, ci dà numerosi esempi di serendipità, a dimostrazione del fatto che anche in matematica le scoperte avvengono non solo grazie al talento e all'abilità, ma anche per caso e il caso si esprime a volte attraverso gli incontri di ogni giorno, gli stessi incontri che caratterizzano l'anno accademico oggetto di questo romanzo. Gli argomenti trattati sono di facile lettura, proprio perché si tratta delle spiegazioni che FU dà ai non matematici che incontra: si comincia con il pranzo con un gruppo di idraulici, durante il quale il protagonista demolisce alcuni luoghi comuni sui matematici e descrive il proprio lavoro. Si prosegue con le spiegazioni a Carola, studentessa liceale e a Irina, docente di storia, ma le occasioni non mancano nemmeno quando FU incontra i colleghi di altre discipline, forse proprio perché la matematica permea la nostra quotidianità: i parametri medici possono essere interpretati matematicamente per ottenerne una prognosi e l'elenco delle partite di un torneo di doppio misto di tennis corrispondono alla compilazione di un quadrato latino.

Il libro offre l'opportunità di una lettura a due diversi livelli: lo si può leggere come un romanzo, ignorando le note a piè pagina – ce ne sono una cinquantina per ogni capitolo – oppure si può approfittare degli approfondimenti matematici che gli autori offrono nelle note. Nel secondo caso, la lettura è più impegnativa e si corre il rischio di perdere il filo del discorso per seguire le note, ma ne vale certamente la pena. Gli autori hanno proprio la speranza di "avvicinare il lettore all'idea attuale di Matematica", facendo dimenticare le immagini spesso esagerate che vengono date dai matematici, così, per essere il più possibile comprensibili, hanno spesso rinunciato alla precisione, evidenziando tali scelte con l'uso del corsivo, mentre il grassetto segnala le frasi più importanti, quelle che, con il loro carattere generale, ci descrivono la matematica, ad esempio: "si può imparare la matematica soltanto facendo matematica".

Gli autori descrivono in modo esauriente il ragionamento matematico e la nascita di una scoperta: FU è impegnato con lo studio del lavoro di un collega australiano e ha la sensazione che, a partire da questo, potrebbe costruire interessanti approfondimenti, "era più che altro guidato da una sensazione di simmetria e bellezza delle strutture". Per un lungo periodo "anche mentre svolgeva i soliti compiti, il suo cervello continuava a inventare strategie per elaborare le strutture che stava ricercando" e così, una notte, decide di mettersi all'opera e, procedendo nei calcoli, perde la nozione del tempo, con il risultato che arriva in ritardo alla lezione del mattino dopo. Lo stesso FU riconosce che la buona idea della notte è forse conseguenza del distacco forzato impostogli da Irina, con l'invito per una breve vacanza: ricorda un po' l'omnibus di Poincaré, "Nel momento in cui mettevo piede sul predellino, mi venne in mente, senza che nulla nei miei pensieri precedenti sembrava avermi preparato...".

Daniela Molinari

“Sul limitare della fisica” di Fieschi Roberto

Il libro in oggetto è il secondo della collana “Percorsi”, dedicata alla divulgazione scientifica, della Casa Editrice Monte Università Parma Editore. L’autore, Roberto Fieschi, laureato in fisica nel 1950, ha conseguito il dottorato all’Università di Leida nel 1955 e dopo vari incarichi di insegnamento è stato professore all’Università di Parma dal 1965 al 2005. Ora è professore emerito.

Sul limitare della fisica è un libro alla portata di tutti: aiuta molto la chiarezza espositiva dell’autore, ma un ruolo non secondario ce l’ha la scrittura in prima persona, nel senso che la fisica narrata è stata vissuta in prima persona dall’autore, in tanti anni di onorata carriera nella ricerca e nell’insegnamento.

Partendo dalle finalità della fisica, Roberto Fieschi ci descrive una scienza che cerca “spiegazioni causali a fenomeni naturali”, una scienza sempre in divenire, caratterizzata dalla bellezza che spesso ispira e guida la ricerca, una bellezza che non tutti possono cogliere, perché bisogna averne acquisito il linguaggio.

Il primo binomio esplorato dall’autore è quello della fisica nel suo rapporto con la tecnologia: la tecnologia ha permesso di realizzare grandi passi avanti in fisica, come la scoperta della radiazione cosmica di fondo, del comportamento anomalo dell’elio da parte di Kapitsa una volta raggiunte basse temperature e quella dell’elettrone grazie all’applicazione della tecnica del vuoto. Per contro, le scoperte della fisica hanno portato a notevoli applicazioni tecnologiche: basti pensare all’ambito della medicina, dove la fisica, sia per la diagnosi che per la terapia, ha fornito numerose tecniche, come i raggi X, la TAC o la PET. Prima che la fisica raggiungesse il grado di complessità attuale, spesso era preceduta dalla tecnica, come dimostrato dall’industria tessile o dagli sviluppi della macchina a vapore durante la rivoluzione industriale; solo dalla seconda metà dell’Ottocento, con lo studio dei fenomeni elettrici, le cose cambiarono: senza una solida base teorica non fu più possibile un progresso della tecnica.

Nei capitoli centrali, l’autore esplora il legame della fisica con le altre scienze: dall’unione con l’astronomia è nata l’astrofisica, che studia le proprietà della materia e dell’energia dell’Universo, grazie a nuovi strumenti di indagine; dall’unione con la geologia è nata la geofisica, che grazie all’utilizzo di satelliti e sonde interplanetarie ha notevolmente incrementato le informazioni sul nostro pianeta; dall’unione con la biologia è nata la biofisica, cui numerosi fisici – tra cui Mendel e Schrödinger – hanno dato contributi essenziali. Oltre alle applicazioni alla medicina, la fisica ha avuto un ruolo di primo piano anche nel nuovo studio della scienza dei materiali, che ha permesso la scoperta di nuovi composti, come le forme cristalline dei fullereni e del grafene; ulteriore campo di applicazione della fisica è l’economia, da cui è nata l’econofisica: la capacità di elaborare modelli, l’attitudine a manipolare grandi quantità di dati e l’abilità nella gestione degli strumenti informatici hanno reso i fisici una grande risorsa per l’economia; infine, è un fisico Berners-Lee, colui che ha coniato il termine di World Wide Web, previsto in un protocollo redatto nel 1989 al CERN di Ginevra con il collega Cailliau.

Uno dei concetti ribaditi più frequentemente da Fieschi riguarda la neutralità della ricerca scientifica, una neutralità che è tale, però, solo a livello teorico: come dimostrano il razzismo della Germania nazista e la biologia del sovietico Lysenko, lo scienziato è in qualche modo influenzato dal momento storico nel quale vive. Inoltre, la ricerca scientifica non avviene solo per amore della verità



e le polemiche per la priorità delle scoperte accese in passato ne sono una dimostrazione: Newton e Leibniz, Galileo e Huygens, Röntgen e Lenard non sono che alcuni degli esempi che ci vengono forniti dalla storia della scienza. In mezzo a queste riflessioni, non dimentichiamo che parte della storia della fisica è occupata dal capitolo riguardante il rapporto tra la fisica e gli armamenti: spesso la stessa ricerca scientifica è stata incentivata dalla collaborazione con il governo, basti pensare al radar durante la seconda guerra mondiale, ora utilizzato nell'ambito delle ricerche di astronomia. Paradossalmente, gli scienziati hanno spesso scelto di contribuire alla realizzazione di armi per allontanare il rischio di una guerra, come dimostrato dal Progetto Manhattan. Tra i fisici coinvolti, solo Rotblat, fisico polacco, decise di abbandonare la ricerca, quando fu chiaro che la Germania nazista non rappresentava più una minaccia.

Daniela Molinari

“Abbi il coraggio di conoscere” di Rita Levi-Montalcini

«La conoscenza è per definizione un bene, forse il bene supremo dell'uomo, perché senza di essa non possono esistere gli altri valori fondamentali ai quali ci si appella di continuo»: queste le parole con le quali Rita Levi Montalcini introduce la propria opera con il prologo.

Abbi il coraggio di conoscere è una raccolta di quaranta saggi, suddivisi in tre gruppi: “L'universo cerebrale” (15 saggi), “Rivoluzioni socioculturali” (17 saggi) e “Sistemi di valori” (8 saggi). Con queste dissertazioni, la scienziata ci invita a riflettere sul divario esistente tra le facoltà cognitive e le capacità emotive dell'uomo moderno: se da un lato, l'uomo sente di avere il potere quasi assoluto del globo terrestre, dall'altro non è in grado di gestire le proprie emozioni, che sono rimaste «al livello di quelle dell'uomo preistorico». Così, la Montalcini fa suo il motto di Kant «Sapere Aude», un monito indirizzato ad ognuno di noi e valido ancora oggi: «Deve essere considerato come obbligo morale di tutti gli individui, sia come esseri umani e ancor più in qualità di scienziati ed educatori, il compito di affrontare le problematiche che affliggono l'intero genere umano usando al massimo grado le capacità raziocinanti in loro possesso, anche quando questo dovesse significare lottare contro interessi prestabiliti dalle sfere di influenza vincolate a quelle del potere».

Nel primo gruppo di saggi, Rita Levi Montalcini ci parla del cervello e del suo processo evolutivo durato quattro milioni di anni. Conoscere il cervello è necessario per guidare al meglio le nostre potenzialità e per gestire le nostre emozioni. Gli studi neuroanatomici, l'Intelligenza Artificiale, il linguaggio, l'apprendimento, la memoria, il legame tra scienza e arte sono tra gli argomenti trattati.

Nel secondo gruppo di saggi, la trattazione è sicuramente meno tecnica rispetto al precedente, ma molto coinvolgente, visto gli argomenti trattati: il commento che la scienziata ci fornisce è serio e pacato, ma con forti basi scientifiche. Ci viene offerto un antidoto alla vecchiaia, con l'invito ad essere consapevoli delle capacità cerebrali in nostro possesso e a farne buon uso, ci viene descritto il ruolo attivo della donna nel successo delle iniziative di microcredito nel mondo non sviluppato, sottolineando l'importanza dell'istruzione che da sola può far migliorare le condizioni di vita, ci viene spiegato che la maggiore conoscenza del funzionamento del cervello può modificare i sistemi pedagogici, per plasmare al meglio il carattere e il comportamento... e poi ancora l'importanza



dell'acqua, la tragedia della fame nel mondo, le guerre, il razzismo sono gli argomenti principali.

Nell'ultima parte, vengono affrontati i temi più attuali, come l'eutanasia, la clonazione, il rapporto tra scienza e etica. L'idea di fondo è che la conoscenza sia per definizione un bene – come sostenuto anche negli altri saggi – ma questo non significa che gli scienziati utilizzino sempre al meglio questa conoscenza, visto che anche tra di essi «esistono individui ambigui o senza scrupoli esattamente come nelle altre professioni». Se da un lato la società moderna ha il dovere di prefiggersi la conoscenza del mondo circostante, dall'altro deve anche controllare tutti coloro che hanno la possibilità di utilizzare queste conoscenze, anche gli scienziati.

Daniela Molinari

“Le domandone di Zio Pippuzzo” di Leonardo Tortorelli

Leonardo Tortorelli ci presenta una matematica inedita, per lo studente medio, con il divertente libro “Le domandone di Zio Pippuzzo”: Zio Pippuzzo è un cinquantenne in sovrappeso, con una grande passione per il vino, che non smette di farsi e fare domande inerenti la matematica e il compito di rispondere spetta a Torto-Prof., insegnante di matematica e fisica in un liceo scientifico (alter-ego dell'autore). L'epoca è quella degli anni Trenta del secolo scorso, il luogo è Casamassella, un piccolo borgo in provincia di Otranto e i personaggi, Nonna Astolfa, il caprone Ugo, Gianni Puticaro e tanti altri sono in parte realmente vissuti. In ogni caso, la presentazione del luogo e dei personaggi avviene nei primi capitoli, ma prosegue nel corso del libro con bellissime immagini nelle quali i protagonisti vengono rappresentati nel loro ambiente e sotto forma di statue di terracotta lavorata e decorata a mano da Antonella Merico (moglie dell'autore... tutto in famiglia, insomma!).



I temi proposti da Zio Pippuzzo sono solo apparentemente semplici: zero è un numero pari? Si può trasformare un debito in un credito? Uno è un numero primo? Perché non si può dividere per zero? Perché una potenza con base diversa da zero e esponente nullo è uguale a uno? Sono le domande che Zio Pippuzzo si pone un po' per passione e un po' per riuscire a scroccare un po' di vino, oppure per convincere il paziente oste Gianni Puticaro che il suo debito di 4096 bottiglie (calcolato grazie ai logaritmi!) è in realtà un credito.

La lettura procede scorrevolmente, accompagnata dalle immagini, dalle scene cariche di umorismo che coinvolgono il protagonista e dai quesiti matematici, la cui soluzione, non temete, vi attende al termine del libro, con un'esauriente spiegazione.

Il libro è consigliato a tutti: a coloro che amano mettersi alla prova con quesiti matematici, a coloro cui piace farsi una bella risata... e a coloro che, nonostante alcuni pregiudizi, hanno ancora voglia di guardare al di là della propria visione parziale della matematica, come di una materia difficile e noiosa, per scoprirne il lato giocoso e divertente.

Daniela Molinari

“Il matematico continua a curiosare” di Giovanni Filocamo

“Il matematico continua a curiosare” è l'ultimo libro di Giovanni Filocamo, il divulgatore scientifico genovese animatore del centro MateFitness. Il testo propone numerosissimi spunti di riflessione ed è accessibile ad un vasto pubblico: giovani e meno giovani, studenti e insegnanti, ma anche semplici appassionati di matematica.

Ogni capitolo viene contestualizzato in una situazione reale - come una passeggiata all'interno di un mercato o una visita in un appartamento- e sviluppato appropriatamente senza annoiare il lettore.

Gli ambiti toccati sono molteplici, rimarchevole è la capacità di cogliere risvolti matematici negli oggetti che normalmente ci circondano. Per questo motivo il libro risulterà molto utile a quegli insegnanti che intendono seguire i più moderni orientamenti della didattica, volta a sviluppare delle competenze e non al mero apprendimento di formule da applicare acriticamente.

Il lettore poi viene piacevolmente coinvolto dalla proposta di quiz che si trovano all'interno dei vari paragrafi, evidenziati da un fondo più scuro che permette di individuarli rapidamente e raccogliere le sfide che l'autore ci propone. Se non riuscite a risolverli tutti non temete: le soluzioni si trovano alla fine del libro!

A dare ritmo alla lettura, inoltre, sono inseriti box che riportano brevemente fatti bizzarri e paradossali, anch'essi evidenziati da un fondo più scuro, atti a stimolare la curiosità e la sorpresa verso una disciplina spesso non amata.

La scelta di evitare il più possibile il linguaggio specifico e l'uso delle formule in favore di spiegazioni e disegni, realizzati per lo più dall'autore stesso, evita la repulsione provata da molti di fronte ai manuali di matematica.

Lo stile semplice e chiaro non rinuncia all'uso dell'ironia e dei calembour che rendono lieve e godibile la lettura.

Giovanna Puppò

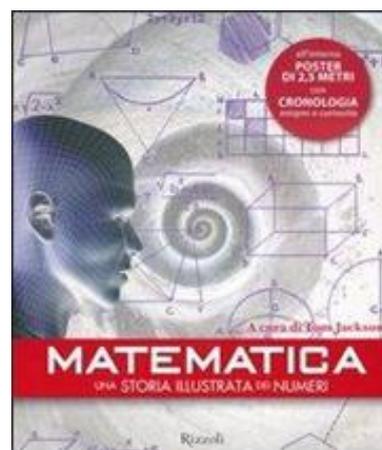


“Matematica, una storia illustrata dei numeri” di Tom Jakson

Appena uscito un elegante libro illustrato sulla storia dei numeri, con oltre 300 raffinate illustrazioni e un poster di 2,5 metri con una cronologia della matematica in parallelo con i grandi avvenimenti della storia mondiale. Una storia dei numeri, della matematica e delle idee, la vita e le opere dei matematici che hanno cambiato il nostro mondo.

Il libro presenta con una veste elegante, riccamente illustrata, i 100 enigmi che hanno fatto la storia della matematica e di come siamo giunti a risolverli, quali sono state le idee e quali sono stati i matematici che li hanno risolti.

Tra gli argomenti: imparare a contare, l'abaco, il teorema di Pitagora, il papiro di Rhind, musica e matematica, il rapporto aureo, la logica, i quadrati magici, pi greco, la misura della Terra, il calendario moderno, gli algoritmi, la crittografia, la sequenza di Fibonacci, la prospettiva, il pendolo, i logaritmi, i numeri complessi, i calcolatori, i numeri binari, la teoria dei grafi, il problema dei tre corpi, il teorema di Bayes, le perturbazioni, la geometria non euclidea, l'algebra booleana, l'infinito, la topologia, la genetica, la matematica dei quanti, il teorema di Goedel, la macchina di Turing, la teoria dei giochi, il caos, le catastrofi, il teorema dei quattro colori, la crittografia, i frattali.



L'autore è Tom Jakson autore di oltre 80 libri sulla scienza. Il libro è edito da Rizzoli. Una buona idea per un regalo, per incuriosire e soddisfare le curiosità sui perché della matematica.

Antonio Bernardo

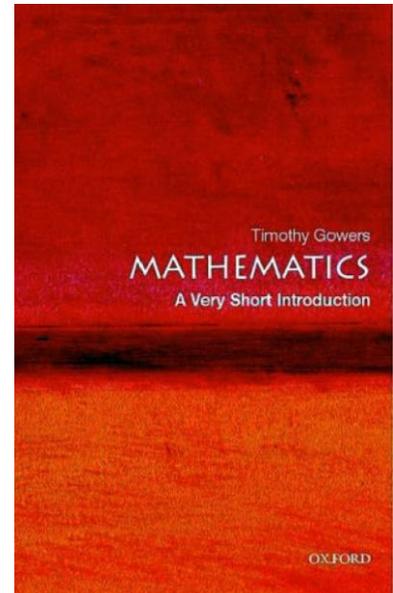
“Mathematics: A Very Short Introduction” di Timothy Gowers

One of Oxford University Press's series of ‘Short Introductions’, Mathematics: A Very Short Introduction is a rigorous and challenging description of what mathematics is, and also a marvellously lucid guide and learning experience in various (even advanced) mathematical topics, by one of the greatest pure mathematicians alive (Timothy Gowers is Rouse Ball Professor of Mathematics at the University of Cambridge, and a Fields Medal recipient). Clearly, as belonging to a highly intellectual series, the book is intended to stretch its readers' abilities to the utmost.

The preface sets the stage: “Very little prior knowledge is needed to read this book [...] but I do presuppose some interest on the part of the reader rather than trying to drum it up myself. For this reason I have done without anecdotes, cartoons, exclamation marks, jokey chapter titles, or pictures of the Mandelbrot set. I have also avoided topics such as chaos theory and Gödel’s theorem, which have a hold on the public imagination out of proportion to their impact on current mathematical research, and which are in any case well treated in many other books”. In 160 pages, there is no space to explain large amounts of mathematics. Nevertheless, Gowers gives a captivating, interesting, and quite personal introduction into some mathematical questions, which get surprisingly close to the “heart of mathematics” in an extraordinarily brief period.

This book mainly aims to convey a sense of what mathematical reasoning is like: “if this book can be said to have a message, it is that one should learn to think abstractly, because by doing so many philosophical difficulties simply disappear”, claims Gowers in his preface. He speaks clearly and concretely about the role of models and about abstractions, concluding “Once one has learned to think abstractly, it can be exhilarating, a bit like suddenly being able to ride a bicycle without having to worry about keeping one’s balance”. The declared purpose of this book is to explain – carefully yet not technically – the differences between research-level mathematics and the sort of mathematics learnt at school and such differences are mostly philosophical. However, although it touches on several advanced mathematical topics, Professor Timothy Gowers definitely manages to do a very effective job explaining them as simply as possible: the various chapters are spiked with a great deal of examples, images and proofs, which help one to have a better grasp of the various concepts.

The book starts with the explanation of some general aspects of mathematical thought (how abstraction can be used to build mathematical models of existing systems), and then presents the reader with chapters covering more specific topics such as numbers, proofs, limits and infinity, dimension, geometry, estimates and approximates (the readers of this book will surely emerge with a clearer understanding of ‘paradoxical-sounding’ concepts such as infinity, curved space, and imaginary numbers), and ends with some attention-grabbing frequently asked questions about the mathematical community. He certainly does not give “the only possible correct answers” to such questions, but rather does give convincing, modest, and thoughtful ones.



Even though the book is exquisitely written – and a clearer exposition could not be ever imagined – I hesitate to recommend it to anyone who does not already know a substantial amount of mathematics (otherwise, it would be simply too difficult). Even though mathematics students and professional mathematicians will certainly know all the results offered, they should enjoy the path taken through them. However, the people most likely to benefit from this book are intelligent, well-educated students who are seriously considering doing a mathematics degree.

This book is certainly very stimulating to read. It will not help students with school problems, nor will it give a hand with daily life; but it is unquestionably deep, inspiring and unveils the mystery of mathematics and mathematicians: whoever reads it will no doubt enjoy a light, swift, yet intriguing introduction to some of the greatest ideas of mathematics and realise the splendour and elegance of the discipline which the author considers “the key to the universe”.

Nicola De Nitti

MAGAZINE
MATEMATICAMENTE.IT *Rivista trimestrale di matematica,
per curiosi e appassionati
distribuita gratuitamente sul sito*

Anno 7 Numero 20 SETTEMBRE 2013

Registrazione n. 953 del 19.12.2006 – Tribunale di Lecce

ISIN ISSN 2035-0449

Direttore responsabile Antonio Bernardo
antoniobernardo@matematicamente.it