194. Una semplice relazione tra i coefficienti di un'equazione

di Luigi Boscaino

Un problema che ricorre nell'esercizio della professione docente è senza dubbio quello delle verifiche in itinere. La divisione trimestrale dell'anno scolastico spesso mette in ansia discenti e docenti nel disperato tentativo di giungere a una valutazione oggettiva. In queste fasi concitate si avvicendano alla lavagna gli studenti dell'ultima ora, che raramente si ha il piacere di coinvolgere nel corso del trimestre.
La prassi prevede un intenso periodo di verifiche con domande che finiscono col somigliarsi sempre di più. I vecchi libri di testo, nei vaghi ricordi che ho da studente, fornivano un prezioso supporto alle esercitazioni in classe. I testi moderni, sebbene di ottima fattura, investono meno risorse in tecnicismi e nel calcolo che spesso è considerato fine a se stesso. Vista dunque la pochezza di esercizi presenti nelle pagine del testo, procedo in modo estemporaneo inventando di volta in volta le disequazioni da sottoporre agli studenti. Nella risoluzione delle disequazioni algebriche di grado non superiore al quinto chiedo spesso agli studenti di rappresentare nel piano cartesiano le curve coerenti con l'algebra loro assegnata. Per fare ciò è opportuno sottoporre alla loro attenzione polinomi aventi zeri razionali o comunque reali, tali da fornire più riferimenti per la rappresentazione della curva. Risolta la disequazione chiedo agli alunni di verificare, con l'ausilio di Wolfram Alpha, la coerenza della rappresentazione della curva e degli intervalli reali che soddisfano la disequazione. In uno di questi frangenti, stanco di far quadrare i conti (per quadratura dei conti intendo la dettatura di disequazioni di grado *n* con *n* radici reali, anzi, meglio se razionali), ho cominciato a fantasticare. Seguendo i dettami del pensiero divergente, soprattutto perché sopraffatto dalla stanchezza, ho osservato le strutture polinomiali con la superficialità di un profano, apprezzando l'estetica delle forme algebriche piuttosto che il contenuto, privilegiando l'aspetto puramente creativo a fronte di una ragionata valutazione matematica. Così, in una classe terza, trattando le disequazioni algebriche di grado superiore al secondo, ho rimuginato su metodi o processi che potessero sostituire il calcolo mentale del discriminante e condurre più rapidamente all'individuazione di disequazioni con radici razionali. Ho dettato, alla studentessa di turno, una disequazione di quarto grado composta da due fattori di secondo grado in forma trinomia, Osservando entrambi i trinomi, o meglio i coefficienti di ognuno, mi sono accorto che la somma dei due estremi (a, c) corrispondeva al valore del coefficiente intermedio (coefficiente del termine di primo grado b) nel primo trinomio, e che la stessa coincidenza si verificava anche nel secondo trinomio. Per non spezzare il ritmo serrato delle verifiche ho solo costruito, con successo misto a malriposta meraviglia, altre disequazioni con lo stesso algoritmo.
Tornato a casa non ho esitato nel prendere carta e penna. Seguendo un modello algebrico deduttivo e non più empirico ho constatato la veridicità della congettura formulata in classe. La strada seguita è stata praticamente dettata dagli eventi. Sono partito dal trinomio di secondo grado e ho sviluppato, mediante sostituzioni, la procedura risolutiva delle equazioni in forma completa. Purtroppo è proprio questo approccio entusiastico che la matematica, con profondo sadismo, condanna e punisce. Giacché vorrei che si apprezzasse appieno il susseguirsi cronologico degli eventi, faccio una premessa riguardo al metodo risolutivo delle equazione di secondo grado.
La forma trinomia o completa di un'equazione di secondo si presenta generalmente come segue:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

In essa sono presenti tre coefficienti genericamente indicati con *a, b* e *c*. Tale equazione, come molti lettori ricorderanno, si può risolvere grazie all'applicazione della formula risolutiva. Quest'ultima è il risultato di alcuni passaggi algebrici fatti sull'equazione di partenza. Moltiplicando ambo i membri dell'equazione di secondo grado per *4a,* nel rispetto del secondo principio di equivalenza, si ottiene

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

A questo punto trasferiamo *4ac* al secondo membro della nostra relazione

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Successivamente, sfruttando il primo principio, si aggiunge b^2 ad ambo i membri al fine di ottenere al primo membro un trinomio come quadrato di binomio,

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Riportiamo il trinomio al primo membro nella sua forma scomposta

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

e risolviamo, rispetto al quadrato di binomio, per abbassare di grado la *x*

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Da qui, trasportiamo il termine noto *b* al secondo membro al fine di isolare il termine in *x*

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

infine dividiamo per *2a*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ed ecco, in pochi passaggi, la formula risolutiva delle equazioni trinomie di secondo grado. In esse desta particolare interesse la quantità sotto radice quadrata. Altrimenti contrassegnata con la lettera greca Δ $(delta)$, la quantità $b^2 - 4ac,$ è detta discriminante in quanto assolve al prezioso compito di distinguere fra tre classi di soluzioni possibili. Infatti, appare evidente che il discriminante si presenta sotto una radice ad indice pari e quindi, come tutti sanno, esiste nel campo dei numeri reali solo se assume valore numerico positivo o nullo. Infatti, se il delta assume valore negativo risulta compromesso il calcolo della radice quadrata e si dice che l'equazione non ammette soluzioni reali. Schematizzando:

$$\Delta > 0 \;\Rightarrow\; due\ soluzioni\ reali\ e\ distinte \;\Rightarrow\; x_1, x_2 \in R\text{: } x_1 \neq x_2$$
$$\Delta = 0 \;\Rightarrow\; due\ soluzioni\ reali\ e\ coincidenti \;\Rightarrow\; x_1, x_2 \in R\text{: } x_1 = x_2$$
$$\Delta < 0 \;\Rightarrow\; nessuna\ soluzione\ reale \;\Rightarrow\; \nexists\, x \in R$$

Dopo questa breve premessa introduciamo, come già annunciato, l'elemento di novità finalizzato a costruire **equazioni con due soluzioni razionali e distinte**. Pertanto procediamo con la ricostruzione matematica della relazione tra coefficienti e discriminante delle equazioni di secondo grado.

RELAZIONE:

Data l'equazione di secondo grado in forma trinomia:

Se si verifica che $a + c = \pm b\ \ allora\ \ b^2 - 4ac = (a - c)^2\ da\ cui\ deriva\text{: } x_1 = \pm 1;\ x_2 = \pm\frac{c}{a}$.

Dimostrazione:

Sulla base delle ipotesi formulate $(a + c = \pm b)$ è possibile operare opportune sostituzioni nel discriminante. Infatti, giacché

$$b^2 = (a + c)^2$$

il delta, dopo aver effettuato la sostituzione, avrà come forma equivalente $(a + c)^2 - 4ac$, pertanto

$$b^2 - 4ac = (a + c)^2 - 4ac$$

da qui, sviluppando il quadrato del binomio presente al secondo membro

$$b^2 - 4ac = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac,$$

sommando i monomi simili $2ac - 4ac$, presenti al secondo membro, si ha

$$b^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2$$

Infine, dato che il trinomio ottenuto al secondo membro, esprime il quadrato di un binomio si può scrivere

$$b^2 - 4ac = (a - c)^2$$

che soddisfa quanto dichiarato nella relazione iniziale. Dunque, sulla base di questo asserto, la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado diventa:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm |a - c|}{2a}$$

Sostituendo ancora alla lettera b il valore equivalente $\pm(a\ +\ c)$ si ha $x_{1,2} = \frac{\mp(a+c) \pm |a-c|}{2a}$ da cui

$$x_1 = \pm\frac{2a}{2a};\ \ e\ x_2 = \pm\frac{2c}{2a}$$

ovvero

$$x_1 = \pm 1;\ \ e\ x_2 = \pm\frac{c}{a}$$

Il segno della soluzione unitaria è positivo se i primi due coefficienti (a, b) sono discordi, negativo in caso contrario. Per quanto concerne la seconda radice si confrontano i segni del secondo e terzo coefficiente (b, c). Se essi hanno segni concordi x_2 assume valore negativo, sarà positivo in caso contrario (regola di Cartesio).
N.B. il valore assoluto del binomio "a-c" ricopre un ruolo formale in quanto risultante dall'estrazione di radice, tuttavia non cambia la sostanza delle soluzioni.

Vediamo degli esempi:

- $9x^2 + 13x + 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm |9-4|}{18}$$

$$x_1 = -1;\ x_2 = -\frac{4}{9}$$

- $\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{10}x + \frac{1}{5} = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{7}{10} \pm \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right|}{\frac{2}{2}}$$

$$x_1 = -1;\ x_2 = -\frac{2}{5}$$

- $171x^2 - 100x - 71 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{100 \pm |171+71|}{342}$$

$$x_1 = 1;\ x_2 = -\frac{71}{171}$$

A questo punto il cerchio sembra chiudersi e ad eccezione di chi ha già compreso la semplicità che si nasconde dietro alla relazione da cui tutto il processo ha avuto origine, altri hanno apprezzato, come d'altronde è accaduto nel mio caso, la precedente dimostrazione che appare di indubbia efficacia e attendibilità. Ebbene, qualche giorno dopo aver concepito il lavoro che avete letto sinora, ho fatto altre riflessioni. Mi sono messo a pensare: se la somma algebrica dei due coefficienti estremi è uguale a più o meno il coefficiente del termine di primo grado, vale a dire $a + c = \pm b$, allora l'equazione trinomia $ax^2 + bx + c = 0$, potrà essere anche rappresentata nel modo seguente:

$$ax^2 \mp (a+c)x + c = 0$$

Da cui, moltiplicando si ha

$$ax^2 \mp ax \mp cx + c = 0$$

A questo punto applichiamo la semplice regola del raccoglimento a fattor comune per parti e il gioco è fatto.

$$ax(x \mp 1) \mp c(x \mp 1) = 0$$

$$(ax \mp c)(x \mp 1) = 0$$

Applicando la legge di annullamento del prodotto si ottengono le due soluzioni

$$x_1 = \pm 1;\ \ e\ x_2 = \pm\frac{c}{a}$$

Vediamo uno degli esempi precedenti:

- $9x^2 + 13x + 4 = 0$

$$9x^2 + (9+4)x + 4 = 0$$

$9x^2 + 9x + 4x + 4 = 0$
$9x(x+1) + 4(x+1) = 0$

$$(9x+4)(x+1) = 0 \quad \begin{array}{c} 9x+4=0 \Rightarrow x = -\frac{4}{9} \\ x+1=0 \Rightarrow x = -1 \end{array}$$

… più facile di così?
Inoltre, indicato con P il polinomio di secondo grado e sapendo che una delle soluzioni è uguale a 1 o a -1, vale il teorema del resto per cui risulta P(1)=0 o P(-1)=0. Da ciò la possibilità di scomporre mediante regola di Ruffini.
Conclusione: quando pensi di aver fatto, grazie a una fortuita coincidenza, una piccola scoperta e indaghi sui possibili percorsi per dimostrarne la veridicità ti capita di ignorare l’evidenza andando all’ostinata ricerca di strade tortuose atte a valorizzare, in apparenza, gli sforzi da te realizzati. Ma la matematica, grazie a Dio, ci riporta con i piedi per terra, obbligandoci a un salutare bagno d’umiltà.