195. La spirale aurea e l'algebra lineare

Francesco Daddi
Liceo Scientifico "XXV Aprile" Pontedera

È molto interessante scoprire le inaspettate applicazioni dell'algebra lineare alle più diverse branche della matematica. Ad esempio si veda [1] dove si trova una formula chiusa per la successione di Padovan. Nel presente articolo si mostra come l'algebra lineare porti all'equazione di spirali auree; infine viene proposto un approccio alternativo, utilizzando i numeri complessi.

Indicata con ϕ la sezione aurea $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, ricordiamo che una **spirale aurea** è una particolare *spirale logaritmica* (si veda [2]) che ammette, in un opportuno sistema di riferimento polare, un'equazione del tipo $\rho = \rho_0\,\phi^{-\frac{2}{\pi}\theta}$. Ad ogni variazione di un angolo di ampiezza $\pi/2$ in senso antiorario la distanza dal polo si ottiene da quella precedente mediante la moltiplicazione per il fattore $1/\phi$; in un sistema di riferimento cartesiano una spirale aurea, in generale, ha equazioni parametriche della forma

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\phi^t}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t+\beta\right)+x_0 \\ y = \dfrac{a}{\phi^t}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t+\beta\right)+y_0 \end{cases} \quad \text{con } t \text{ parametro reale} \qquad (1)$$

dove (x_0, y_0) è il *centro* della spirale a cui la curva tende per $t \to +\infty$.

Consideriamo il rettangolo aureo R_0 di vertici

$$R_0 : \left\{A_0 = (0,0)\ ,\ B_0 = (\phi,0)\ ,\ C_0 = (\phi,1)\ ,\ D_0 = (0,1)\right\}$$

e determiniamo le equazioni della similitudine diretta S che lo trasforma nel rettangolo (ancora aureo) di vertici rispettivamente

$$R_1 : \left\{A_1 = B_0 = (\phi,0)\ ,\ B_1 = C_0 = (\phi,1)\ ,\ C_1 = (1,1)\ ,\ D_1 = (1,0)\right\}\ ;$$

con semplici calcoli si trova

$$S : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\phi} \\ \dfrac{1}{\phi} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'unico punto fisso della trasformazione S è

$$\Omega = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\ ,\ \frac{5+\sqrt{5}}{10}\right),$$

che si può determinare anche intersecando i segmenti A_0C_0 e A_1C_1.

Se applichiamo la trasformazione S al rettangolo R_1, ovvero se applichiamo S^2 al rettangolo R_0, si ottiene il rettangolo (si ricordi che $\phi^n = F_n\,\phi + F_{n-1}$ dove F_k è il k-esimo numero della successione di Fibonacci)

$$R_2 : \left\{A_2 = B_1\ ,\ B_2 = C_1\ ,\ C_2 = \left(1\ ,\ \frac{1}{\phi}\right)\ ,\ D_2 = \left(\phi\ ,\ \frac{1}{\phi}\right)\right\}$$

e successivamente, applicando di nuovo S al rettangolo R_2 (ovvero applicando S^3 al rettangolo R_0), si ricava

$$R_3 : \left\{A_3 = B_2\ ,\ B_3 = C_2\ ,\ C_3 = \left(\frac{2}{\phi}\ ,\ \frac{1}{\phi}\right)\ ,\ D_3 = \left(\frac{2}{\phi}\ ,\ 1\right)\right\}\ ;$$

analogamente si ottengono i rettangoli

$$R_4 : \left\{A_4 = B_3\ ,\ B_4 = C_3\ ,\ C_4 = \left(\frac{2}{\phi}\ ,\ \frac{2}{\phi^2}\right)\ ,\ D_4 = \left(1\ ,\ \frac{2}{\phi^2}\right)\right\}\ ,$$

$$R_5 : \left\{A_5 = B_4\ ,\ B_5 = C_4\ ,\ C_5 = \left(\frac{3}{\phi^2}\ ,\ \frac{2}{\phi^2}\right)\ ,\ D_5 = \left(\frac{3}{\phi^2}\ ,\ \frac{1}{\phi}\right)\right\} \quad \text{e così via...}$$

La successione dei rettangoli R_i è descritta nella figura seguente:

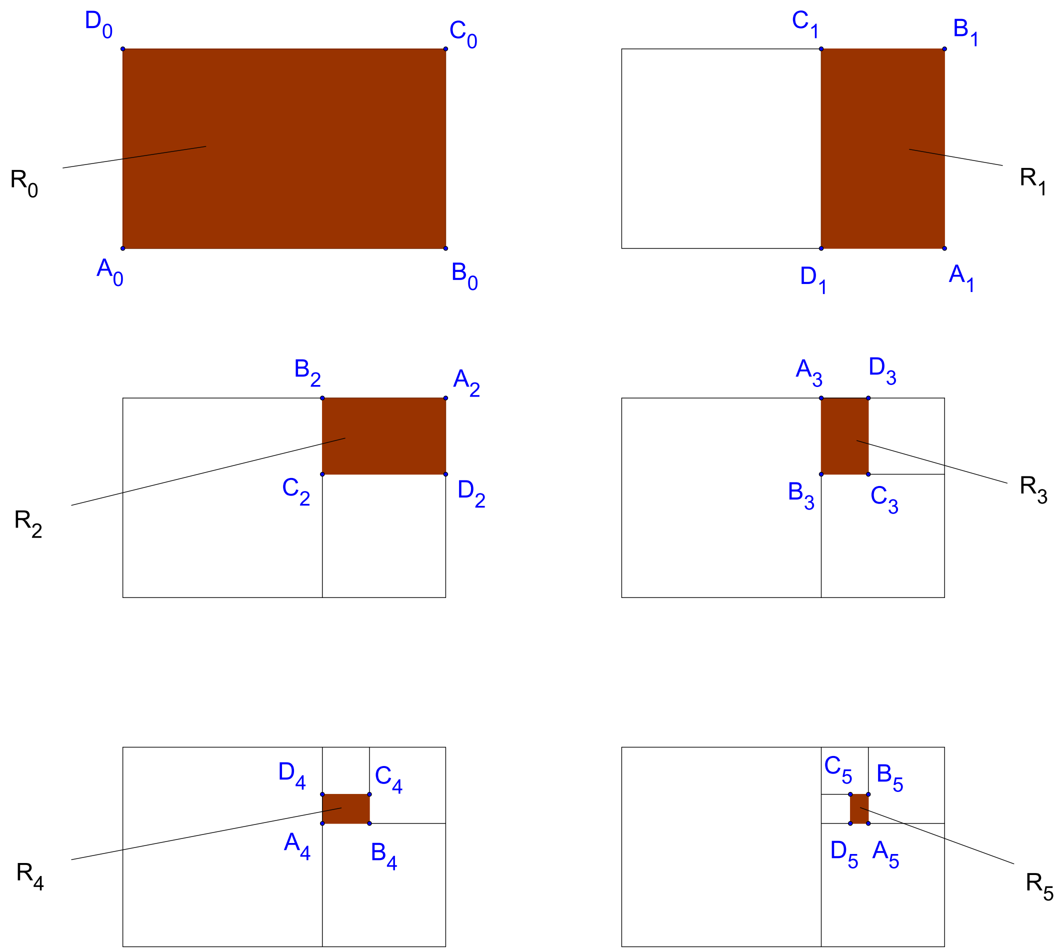

Figura 1: *Successione dei rettangoli aurei.*

Riscrivendo le equazioni della trasformazione S nella forma (Ω è punto fisso di S)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\phi} \\ \dfrac{1}{\phi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_\Omega \\ y - y_\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix},$$

le coordinate dell'immagine A_k del punto $A_0 = (0, 0)$ mediante la trasformazione S^k sono

$$\begin{pmatrix} x_{A_k} \\ y_{A_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\phi} \\ \dfrac{1}{\phi} & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 0 - x_\Omega \\ 0 - y_\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$$

mentre per le coordinate di D_k, immagine di D_0 mediante la trasformazione S^k, si ha

$$\begin{pmatrix} x_{D_k} \\ y_{D_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\phi} \\ \dfrac{1}{\phi} & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 0 - x_\Omega \\ 1 - y_\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}.$$

Per determinare in modo semplice la generica potenza k-esima della matrice è sufficiente osservare che

$$\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\phi} \\ \dfrac{1}{\phi} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\phi} \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{2} & -\sin\dfrac{\pi}{2} \\ \sin\dfrac{\pi}{2} & \cos\dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix} \quad \text{da cui} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\phi} \\ \dfrac{1}{\phi} & 0 \end{pmatrix}^k = \frac{1}{\phi^k} \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}k\right) & -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}k\right) \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}k\right) & \cos\left(\dfrac{\pi}{2}k\right) \end{pmatrix}.$$

Considerando k reale (*nessuno infatti ci vieta di estendere il dominio di* k), la curva alla quale appartengono i punti A_k ha equazioni parametriche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\phi^k} \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}k\right) & -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}k\right) \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}k\right) & \cos\left(\dfrac{\pi}{2}k\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ -\dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\phi^k} \cdot \left[-\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}k\right) + \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}k\right) \right] + \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ y = \dfrac{1}{\phi^k} \cdot \left[-\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}k\right) - \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}k\right) \right] + \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}. \end{cases} \tag{2}$$

Scegliendo β tale che $\cos\beta = -\dfrac{x_\Omega}{\sqrt{x_\Omega^2 + y_\Omega^2}}$, $\sin\beta = -\dfrac{y_\Omega}{\sqrt{x_\Omega^2 + y_\Omega^2}}$ e tenendo conto delle formule trigonometriche di addizione, le equazioni (2) diventano

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{x_\Omega^2 + y_\Omega^2}}{\phi^k} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}k + \beta\right) + x_\Omega \\ y = \dfrac{\sqrt{x_\Omega^2 + y_\Omega^2}}{\phi^k} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}k + \beta\right) + y_\Omega\,; \end{cases}$$

dal confronto con le equazioni (1) si deduce che la curva (2) è pertanto una ***spirale aurea avente centro nel punto*** Ω (detto "*occhio di Dio*" da Clifford A. Pickover); nella figura 2 questa spirale è la curva tratteggiata.

Allo stesso modo si trova che la curva che passa per tutti i punti D_k ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\phi^k} \cdot \left[-\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}k\right) - \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}k\right)\right] + \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ y = \dfrac{1}{\phi^k} \cdot \left[-\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}k\right) + \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}k\right)\right] + \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\,; \end{cases} \tag{3}$$

anch'essa è una spirale aurea di centro Ω; nella figura 2 questa spirale è la curva a tratto continuo.

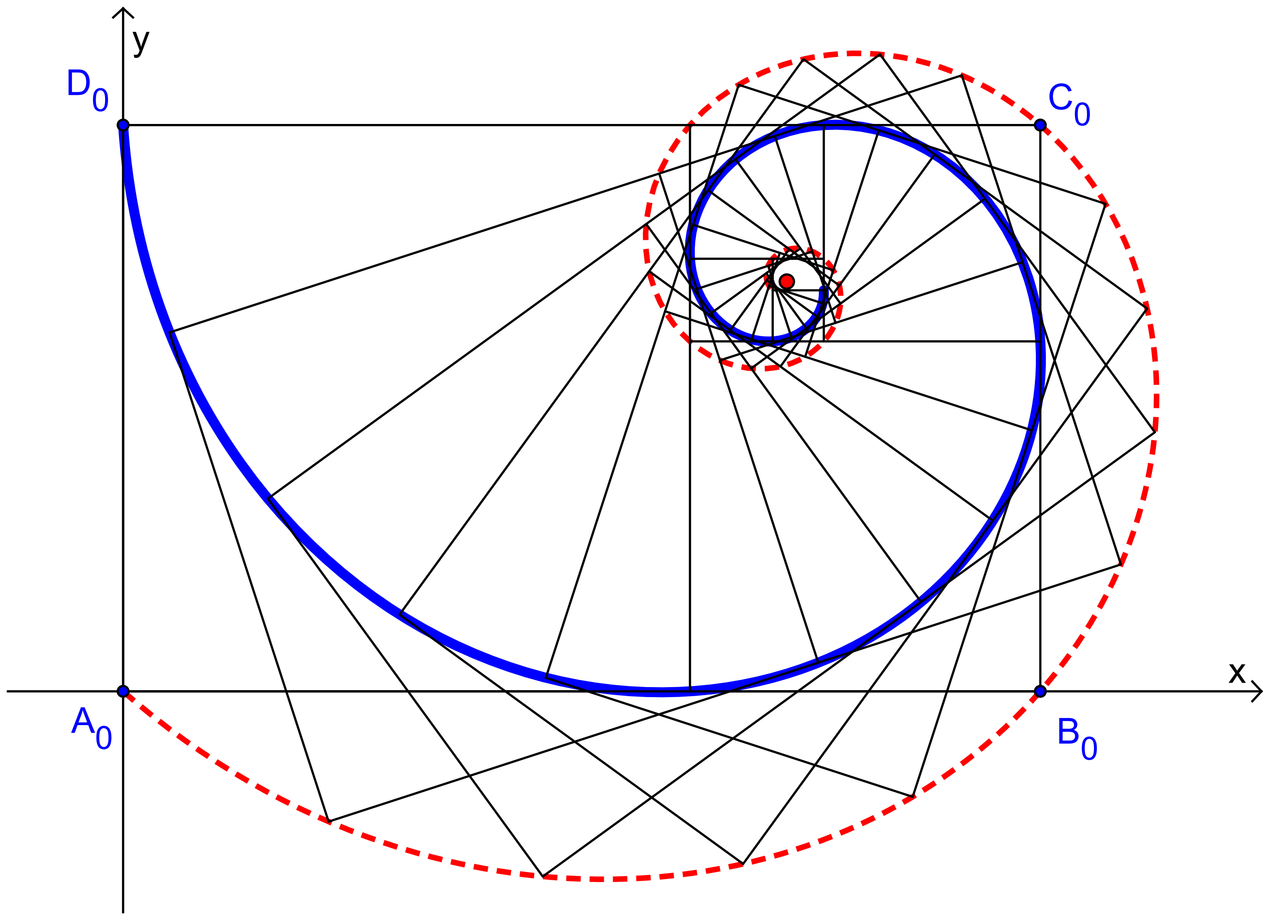

Figura 2: *Sono disegnati tutti i rettangoli immagini del rettangolo iniziale* R_0 *fino a* $k = 6$, *con passo* $\Delta k = 0,2$. *Le due spirali sono state disegnate per* $0 \le k \le 6$.

In alternativa all'uso delle matrici è possibile utilizzare i numeri complessi; ricordiamo che, in generale, una generica similitudine diretta di equazioni

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{pmatrix}$$

può essere riscritta, utilizzando i numeri complessi, nel modo seguente:

$$x' + i\,y' = (a + i\,b)(x + i\,y) + \tau_x + i\,\tau_y\,.$$

Nel nostro caso particolare la trasformazione S ha equazione

$$z' = \frac{i}{\phi} \cdot (z - z_\Omega) + z_\Omega$$

dove $z_\Omega = \dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{10} + i\,\dfrac{5 + \sqrt{5}}{10}$.

Calcolando le immagini di $z_{A_0} = 0 + 0\,i$ mediante S^k si ha

$$z_{A_k} = \frac{i^k}{\phi^k} \cdot (z_{A_0} - z_\Omega) + z_\Omega \quad \Rightarrow$$

$$z_{A_k} = \frac{i^k}{\phi^k} \cdot \left(-\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} - i\,\frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right) + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} + i\,\frac{5 + \sqrt{5}}{10}\,;$$

sfruttando la formula di De Moivre risulta $i^k = \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)$, quindi

$$z_{A_k} = \frac{1}{\phi^k} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right) \cdot \left(-\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} - i\,\frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right) + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} + i\,\frac{5 + \sqrt{5}}{10}\,;$$

svolgendo i calcoli si ricava

$$\begin{aligned} z_{A_k} = \frac{1}{\phi^k} \cdot \left[-\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right] + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} + \\ + i \left\{ \frac{1}{\phi^k} \left[-\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) - \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right] + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right\} \end{aligned}$$

ritrovando così le equazioni (2).

Allo stesso modo si ricavano le immagini di $z_{D_0} = 0 + i$ mediante S^k:

$$z_{D_k} = \frac{i^k}{\phi^k} \cdot (z_{D_0} - z_\Omega) + z_\Omega \quad \Rightarrow$$

$$z_{D_k} = \frac{i^k}{\phi^k} \cdot \left(i - \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} - i\,\frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right) + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} + i\,\frac{5 + \sqrt{5}}{10} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} z_{D_k} = \frac{1}{\phi^k} \cdot \left[-\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) - \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right] + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} + \\ + i \left\{ \frac{1}{\phi^k} \left[-\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right] + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right\} \end{aligned}$$

ritrovando così le equazioni (3).

Bibliografia e Sitografia

[1] F. Daddi, *Una formula chiusa per i numeri di Padovan*, Archimede, 4/2011, pp. 203-207.

[2] M. J. Vygodskij, *Manuale di matematica superiore*, Edizioni MIR, Mosca, 1978.

[3] `http:\\en.wikipedia.org/wiki/Golden_spiral`