197. Coordinate geografiche e cartesiane. Un metodo di trasformazione

di Michele T. Mazzucato
mazzucatomichele@tiscali.it

Hoc unum scio, me nihil scire
(So una sola cosa, di non saper nulla)
***Apologia di Socrate*, Platone (V-IV sec. a.C.)**

La trasformazione dalle coordinate geografiche a quelle cartesiane, sia diretta sia inversa, molto importante in geodesia. Il passaggio diretto, da coordinate geografiche a quelle cartesiane ortogonali nello spazio, non presenta particolare difficoltà ed è effettuabile mediante le note formule qui di seguito riportate:

Trasformazione di coordinate
da geografiche (φ;λ;h) a cartesiane ortogonali nello spazio (X;Y;Z)
problema diretto

$$X = (N + h) \times \cos\varphi \times \cos\lambda \qquad [1]$$

$$Y = (N + h) \times \cos\varphi \times \sin\lambda \qquad [2]$$

$$Z = (N - e^2 \times N + h) \times \sin\varphi \qquad [3]$$

$$\text{con} \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad \text{e} \quad N = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \times \sin^2\varphi)}}$$

dove
a = raggio equatoriale
b = raggio polare
e = eccentricità prima
N = raggio di curvatura della sezione in primo verticale (gran normale)
φ = latitudine
λ = longitudine
h = altitudine

Non è facile il passaggio inverso, ossia da cartesiane ortogonali nello spazio a geografiche, poiché presenta alcune difficoltà dovute principalmente al fatto che N dipende dalla latitudine. Per quest'ultimo caso numerose sono le soluzioni proposte in letteratura sia di tipo iterativo come quella proposta da Weikko Alexsanteri Heiskanen e Helmut Moritz (1967) oppure ricorrendo alla risoluzione di equazioni algebriche di 4° grado tramite procedure di calcolo numeriche come quelle di Valentino Tomellieri (1970), di Marco Unguendoli (1974) e di Edward J. Krakiwsky e Petr Vanìček (1982) sia di tipo chiuso come quella di Piero Bencini (1968), di M.K. Paul (1973), di Jun Yong Chen (1981) e di Kazimierz M. Borkowski (1989), solo per citarne qualcuna. Tra le tante soluzioni si riporta il semplice metodo non iterativo proposto da Bernard Russel Bowring nel 1976, per la latitudine, e nel 1985, per l'altezza:

Trasformazione di coordinate
da cartesiane ortogonali nello spazio (X;Y;Z) a geografiche (φ;λ;h)
problema inverso
Formule di B. R. Bowring, 1976 per il calcolo della latitudine φ

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{(Z + e'^2 \times b \times \sin^3\mu)}{(r - e^2 \times a \times \cos^3\mu)} \quad [4]$$

$$\text{con} \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \quad \mathrm{tg}\mu = \frac{a \times Z}{b \times r} \quad \text{e} \quad r = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

dove
e’ = eccentricità seconda
r = raggio del parallelo
μ = latitudine ridotta

Il matematico e geodeta Bernard Russel Bowring (1925-2006). Il collega Buford K. Meade (1909-2004), in riferimento al lavoro *Total inverse solutions for the geodesic and great elliptic* (Bowring , 1996) scrisse che la: “Geodesic Inverse Solution is superior to other methods”.

Formule di B.R. Bowring, 1985 per il calcolo dell’altezza h

$$h = r \times \cos\varphi + Z \times \sin\varphi - a\sqrt{(1 - e^2 \times \sin^2\varphi)} \quad [5]$$

Per il calcolo della longitudine λ si utilizza la seguente espressione che resta valida per tutte le soluzioni proposte

$$\mathrm{tg}\lambda = \frac{Y}{X}$$

Alle nostre latitudini essa fornisce direttamente il valore della longitudine a est da Greenwich mentre per il caso generale occorre, ovviamente, tener conto dei segni algebrici delle coordinate cartesiane ortogonali nello spazio X e Y ricavabili dalla sottostante tabella nella quale viene dato l'intervallo di variabilità della longitudine:

Y	+	+	-	-
X	+	-	+	-
long	Est 0°-90°	Est 90°-180°	Ovest 0°-90°	Ovest 90°-180°

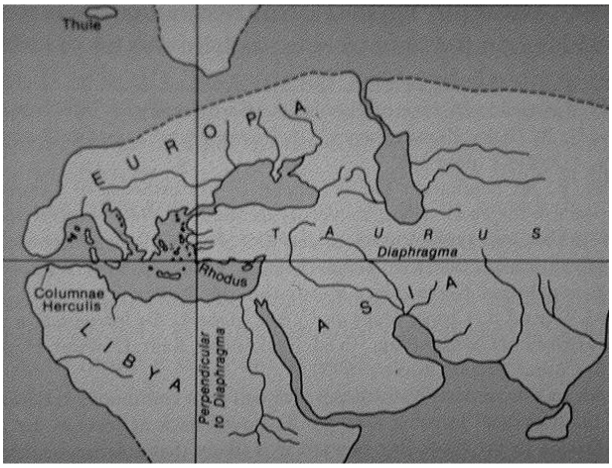
Mentre con la seguente formula, proposta da Edward J. Krakiwsky e Petr Vanìček (1982), si può calcolare la longitudine senza bisogno di definirne il segno e quindi il suo fuso:

$$\lambda = 2\mathrm{arctg}\left(\frac{Y}{X + r}\right) \quad [6]$$

Non risulta difficile a questo punto realizzare un programma informatico che utilizzi le formule [1], [2] e [3] per il calcolo, rispettivamente, della X, Y e Z (problema diretto) e le formule [4], [5] e [6] per il calcolo della latitudine φ, longitudine λ e altezza ellissoidica h (problema inverso).
I parametri ellissoidici **a** (raggio equatoriale), **b** (raggio polare), $\mathbf{e}^2$ (eccentricità prima al quadrato) ed $\mathbf{e'}^2$ (eccentricità seconda al quadrato) variano in base all’ellissoide di riferimento utilizzato. Essi valgono:

a= 6 378 388.000 **b**= 6 356 911.946 $\mathbf{e}^2$= 0.006 722 670 022 **e’**= 0.006 768 170 197
(per l’ellissoide internazionale di Hayford, 1924)
a= 6 378 137.000 **b**= 6 356 752.314 $\mathbf{e}^2$= 0.006 694 379 990 $\mathbf{e'}^2$= 0.006 739 496 742
(per l’ellissoide del WGS, 1984)

L’aggettivo cartesiane nelle coordinate si riferisce al matematico e filosofo francese René Descartes (1596-1650) che, riprendendo studi del connazionale medievale Nicolas d’Oresme (1323-1382) contenuti nell’opera mai stampata *Tractatus de configuratione qualitatum et motuum* (1355) ma compendiata da Johannes de Sancto Martino nell’unica fonte di studio delle idee matematiche d’Oresme con il titolo di *Tractatus latitudinibus formarum* (1482), operò la fusione dell’algebra con la geometria euclidea introducendo le basi della geometria analitica e influì nello sviluppo del calcolo infinitesimale. L’idea di individuare la posizione di un punto su una superficie mediante l’intersecazione di due rette come strumenti di misura, venne sviluppata ed esposta da Cartesio nel 1637 nell’opera *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences Plus la Dioptrique, les Meteores, et la Geometrie qui sont des essais de cete Methode.*
Le coordinate geografiche (latitudine φ e longitudine λ) vennero introdotte da Dicearco da Messina (350-290 a.C), filosofo della scuola peripatetica allievo di Aristotele (384-322 a.C.), nell’opera Itinerario intorno al mondo dove, per la prima volta, il globo terrestre allora conosciuto venne suddiviso da una linea orizzontale (parallelo) e una linea verticale (meridiano), un primo e semplice abbozzo di quello che nel proseguo dei tempi diverrà il reticolo geografico. Le coordinate geografiche sono sostanzialmente un tipo particolare di coordinate sferiche che altro non sono che coordinate polari nello spazio.



Una ricostruzione della carta di Dicearco.

Bibliografia

Barbarella, M. - Gatti, M., *Note sulla trasformazione da sistema geocentrico a sistema ellissoidico*, Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, n. 2/1993, pp. 109-132
Bowring, B.R., *Trasformation from spatial to geographical coordinates*, Survey Review, vol. 23 July 1976, pp. 323-327
Bowring, B.R., *The accuracy of geodetic latitude and height equations*, Survey Review, vol. 28 October 1985, pp. 202-206
Krakiwsky E. J. e P. Vaniček, *Geodesy: The Concept* (1982).
Mazzucato, M.T., *Globo terrestre*, BIROMA Galliera V.ta, Padova 1996
Mazzucato, M.T., *La Figura della Terra*, CLUP Milano 2003
Strang van Hees, G.L., *Method Bowring for the computation of latitude φ from rectangular coordinates (X,Y,Z)*, Bulletin of the International Geoid Service, n. 5 December 1996, pp. 25-30