200. Dal Paradosso di Achille e la tartaruga alle serie numeriche: un intervento didattico

Raffaella Gigante
raffamat@yahoo.it

Introduzione

Nello sviluppo di tale attività, ho cercato di stimolare la costruzione della conoscenza, il lavoro cooperativo, l'azione critica, la partecipazione, la discussione e il confronto, alternando le lezioni in classe con le attività di laboratorio.
Il mio obiettivo era quello di motivare i ragazzi a un apprendimento attivo e dinamico dell'Analisi Matematica e di coinvolgerli il più possibile nel percorso da realizzare. Dovendo lavorare a gruppi, interagire, e mettere a confronto le proprie idee con quelle degli altri, infatti, la scelta è stata condivisa con interesse ed entusiasmo. In alcune situazioni, inoltre, mi sono servita anche della Storia come ottimo strumento didattico, non solo per incuriosire gli studenti, ma anche per proporre didatticamente l'evoluzione storica degli studi e magari suscitare in loro curiosità sempre nuove.

L'intervento didattico

Nello sviluppo del progetto si è tenuto conto delle indicazioni didattiche suggerite nei Programmi Ministeriali: partendo da una data situazione problematica, l'alunno sarà portato prima a formulare un'ipotesi di soluzione, poi a ricercare il procedimento risolutivo mediante il ricorso di conoscenze già acquisite ed, infine, ad inserire il risultato ottenuto in un organico quadro teorico complessivo, tenendo conto dell'uso dell'elaboratore elettronico e delle connessioni che la matematica ha con altre discipline tecniche dell'indirizzo.
Dopo aver illustrato alla classe la proposta di lavoro in termini di contenuti, obiettivi e tempi, e dopo aver giustificato le scelte effettuate, ho pensato di introdurre l'argomento offrendo loro un primo approccio di tipo storico.
La storia della matematica, infatti, si è rivelata un efficace mezzo didattico per creare una situazione problematica, cioè una situazione di apprendimento in cui gli studenti sono stati stimolati a formulare ipotesi facendo ricorso alla creatività e all'intuizione.
Siamo partiti dal celebre paradosso di "Achille e la tartaruga", formulato da Zenone di Elea intorno al 400 a. C.
Un giorno il Piè veloce Achille, passeggiando in un bosco, incontrò una tartaruga.
Achille le chiese: "Che cosa stai facendo?"
La tartaruga rispose: "Mi sto allenando per una corsa, io sono la tartaruga più veloce di questo bosco".
Achille si mise a ridere e volle sfidare la tartaruga, le propose così una gara che lei accettò.
Achille, considerandosi molto più veloce dell'avversario, decise di dare alla tartaruga un po' di vantaggio. La gara iniziò ed Achille impiegò un po' di tempo per arrivare al punto da dove era partita la tartaruga; nel frattempo lei aveva già percorso un pezzettino di strada.
Achille arrivò subito al nuovo punto dov'era la tartaruga, ma lei aveva già ripercorso un altro breve tratto. A questo punto entrambi si fermarono, si sedettero su una collinetta e cominciarono a parlare fra loro.
"Nonostante io sia più lenta per ora non sei riuscito a raggiungermi, o Achille Piè veloce"
"Amica tartaruga, non gioire così presto; siamo solo a metà percorso, sono sicuro che prima della fine della corsa ti supererò e vincerò la sfida."
"E va bene, continuiamo, ma lasciamo quel piccolo vantaggio che mi hai concesso."
"Certo, non vorrei che la gara finisse troppo in fretta."
Così ripartirono, con la tartaruga in vantaggio. Si fermarono ad ogni frazione di percorso, sempre con un po' di vantaggio alla tartaruga.

Al traguardo la vincitrice fu proprio la tartaruga, e non Achille il Piè veloce, il quale, per colpa di quel piccolissimo vantaggio, non era riuscito a raggiungerla.

Dopo aver letto insieme alla classe il brano, abbiamo cercato di darne una semplice traduzione in termini matematici.

In una gara di corsa Achille, che indichiamo con A e la tartaruga, che indichiamo con T partono inizialmente (quindi al tempo t_0) dalle posizioni x_0 e $x_1 > x_0$, rispettivamente.

In un tempo t_1, A raggiungerà la posizione x_1 ma, nello stesso tempo, T avrà raggiunto una posizione $x_2 > x_1$.

Per arrivare a x_2, A impiegherà un tempo t_2, ma in questo tempo T si sarà spostata in x_3 e così via...

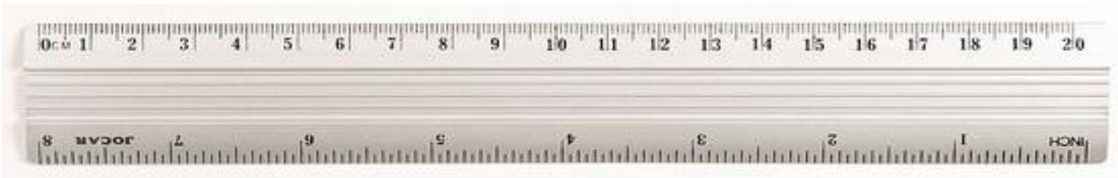
A questo punto le considerazioni sono state due:

O si ammette che la somma di infinite quantità positive: $t_0 + t_1 + t_2 + \cdots$ possa dare un risultato finito, o si deve concludere che Achille non riuscirà mai a raggiungere la Tartaruga!

D'altra parte non è così paradossale che una somma di infiniti addendi positivi, una volta che sia stata ben definita, possa dare un risultato finito.

Per convincerci di ciò abbiamo costruito insieme un semplice esempio.

Abbiamo realizzato un righello di 20 cm e abbiamo usato questo procedimento simpatico e bizzarro.



Abbiamo diviso il righello a metà e abbiamo misurato il primo pezzo: abbiamo ottenuto 10 cm; poi abbiamo diviso a metà il secondo pezzo e ne abbiamo misurato la prima parte: abbiamo ottenuto 5 cm; il rimanente pezzo l'abbiamo ancora diviso a metà ottenendo 2,5 cm … e così via indefinitamente.

Ciò che abbiamo ottenuto non è stato altro che una somma infinita,

$$10 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 2{,}5 \text{ cm} + 1{,}25 \text{ cm} + \ldots$$

la quale, secondo le aspettative formulate dai ragazzi dovrebbe avere come risultato 20 cm.

Con questi semplici e interessanti problemi – stimolo ho ottenuto l'attenzione degli studenti e, soprattutto il loro coinvolgimento ponendoli di fronte a situazioni inizialmente non 'puramente matematici'.

Il passo successivo è stato quello di far capire loro che gli esempi precedenti avevano bisogno di una formulazione matematica molto più rigorosa.

La formalizzazione dei concetti è partita da una domanda che i ragazzi si sono posti:

"Siccome ci aspettiamo che la somma precedente debba dare come risultato 20 cm, come possiamo sommare tutti i termini ottenuti?"

Mi è sembrato molto naturale dare, per prima cosa, dei "nomi" ai numeri che abbiamo trovato.

Abbiamo chiamato:

$$a_1 = 10$$
$$a_2 = 5$$
$$a_3 = 2{,}5$$
$$a_4 = 1{,}25$$
$$\ldots$$

il che ci ha suggerito, con molta naturalezza, che avremmo potuto fare l'operazione precedente di somma senza alterarne il significato:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

e in forma compatta, essendo una somma di infiniti termini:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

che prende il nome di SERIE NUMERICA, con $\{a_k\}_{k\in N}$ successione di numeri reali.
In tutto il ragionamento fatto con la classe, però, mi sono resa conto che c'era un problema che stava alla base di tutto ciò che era stato detto, principalmente perché avevo percepito una sorta di smarrimento. Il problema era:
"Se fin'ora l'operazione di somma è stata fatta sempre con un numero finito di addendi, come è possibile che si possa fare anche una somma infinita e avere come risultato un numero finito?"
La scrittura che avevamo utilizzato, infatti, rappresentava una somma infinita di addendi e, in pratica, la mente dei ragazzi si rifiutava quasi di credere che tutto ciò potesse avere senso.
L'intervento è stato più che sensato a mio parere e, per ovviare a questo problema ho dato significato al simbolo introdotto in precedenza, costruendo un'altra successione $\{s_k\}_{k\in N}$ i cui termini sono così definiti:

$$\begin{gathered} s_0 = a_0 \\ s_1 = a_0 + a_1 \\ s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \\ \dots\dots\dots \\ s_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k \\ \dots\dots\dots \end{gathered}$$

Abbiamo chiamato il numero s_k somma parziale (o ridotta) n-sima della serie e alla successione $\{s_k\}_{k\in N}$ e gli abbiamo dato il nome di successione delle somme parziali della serie.
Il tutto l'abbiamo condensato con un'unica scrittura sintetica:

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n \ per\ k = 0, 1, 2, \dots$$

precisando che, l'indice rispetto a cui si somma è sempre un *indice muto,* cioè se si sostituisce *n* con *i* oppure *j,* o qualsiasi altra lettera, il valore dell'espressione non cambia.
Una volta costruita tale successione, ragionando sull'indice *k* della sommatoria siamo riusciti a capire che, per ottenere ciò da cui eravamo partiti (e cioè la somma infinita di termini) bisogna passare al limite di s_n, cioè:

$$\lim_{k\to+\infty} s_k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

È stato interessante sottolineare come, l'ultima formula scritta abbia spiegato in che modo il concetto di serie abbia tradotto con precisione l'idea di *"somma di infiniti termini".*
In particolare, con quanto detto, ho pensato che a questo punto, i ragazzi sarebbero stati pronti a capire il significato di una frase del tipo:

"Determinare il carattere di una serie"

infatti, è bastato dire che studiando il limite della successione delle somme parziali, non avremmo fatto altro che stabilire la convergenza, divergenza o irregolarità di una serie.
In particolare ho precisato che:

- se $\lim_{k\to+\infty} s_k$ è un numero finito reale *l* la serie sarà **convergente**

in tal caso diremo che la sua somma vale *l,* cioè che la somma è pari al risultato del limite;

- se $\lim_{k \to +\infty} s_k$ è infinito, la serie sarà **divergente**.

In particolare se il segno di infinito è positivo divergerà positivamente, viceversa negativamente;

- se $\lim_{k \to +\infty} s_k$ non esiste, la serie sarà **irregolare** o **indeterminata**.

Per convincere i ragazzi che sarebbero stati in grado di affrontare un semplice esercizio sullo studio della convergenza di una serie, abbiamo cercato di progettare insieme un esempio.

Converge o non converge?
Per ogni $n \in N$, sia $a_n = n$. Consideriamo cioè come successione $\{a_n\}_{n \in N}$ associata alla serie la successione che ha per termini i numeri naturali.
In pratica, per rifarci alla notazione utilizzata abbiamo scritto i primi termini esplicitamente:

$$\begin{gathered} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 3 \\ \dots\dots\dots \\ a_{100} = 100 \\ \dots\dots\dots\dots \end{gathered}$$

Abbiamo costruito, a questo punto la successione delle somme parziali $\{s_n\}_{n \in N}$ associata alla successione $\{a_n\}_{n \in N}$:

$$\begin{gathered} s_1 = a_1 = 1 \\ s_2 = a_1 + a_2 = 1 + 2 = 3 \\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 3 = 6 \\ \dots\dots\dots\dots \\ s_8 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered}$$

È stato simpatico notare come la classe (senza alcun suggerimento) abbia capito con questo esempio che il termine s_n non era altro che la somma dei primi n termini della successione dei numeri naturali, cioè la famosa **somma di Gauss**:

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Per quanto detto prima, per determinare il carattere della serie, era sufficiente determinare:

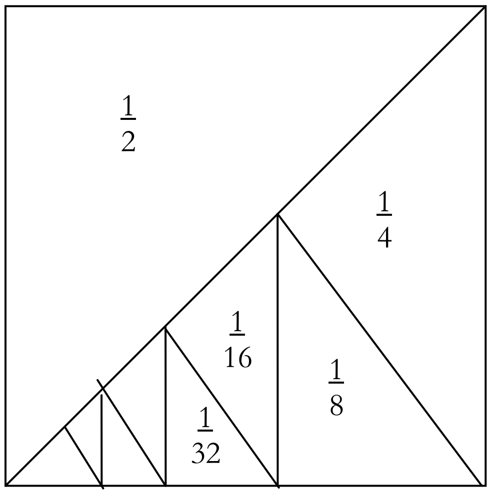
$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$$

Dunque all'unanimità la risposta dei ragazzi è stata: "La nostra serie diverge positivamente".
Ma era davvero tutto così semplice e ovvio, quasi come se fosse un gioco lo studio del carattere di una serie?
La risposta a questa domanda (quasi aspettata dalla classe) ha bloccato un po' l'entusiasmo dei ragazzi, poiché immaginavano bene che, una situazione quasi ideale come la precedente non poteva sempre presentarsi.
Ho dovuto sottolineare, più di una volta, che in generale, non avremmo avuto alcun limite da calcolare, poiché lo studio del carattere di una serie sarebbe andato ben oltre a tutto ciò.

Domanda stimolo:
Mi era sembrato curioso porre alla classe il seguente quesito
"Se l'indice della serie parte da *1* oppure da un numero *k>1*, cambia il carattere della serie?"
In effetti i ragazzi hanno risposto bene:

Il carattere di una serie non cambia se si trascura un numero finito di termini, specificando, però, che nel caso in cui la serie dovesse convergere ed è richiesto il calcolo della somma della serie, essa cambierebbe se vengono tralasciati alcuni termini.
E l'osservazione non è stata fatta a caso perché a questo punto ho pensato di introdurre alcune "serie speciali", e mettere in evidenza la proprietà appena ricavata.

Una "serie speciale"
Partendo dal presupposto che sono sempre più convinta che l'immagine della matematica che dovremmo dare in una scuola (e, quindi, in particolare in una classe) sia quella di una disciplina creativa e dinamica, è importante imparare a proporre strategie e metodi di insegnamento – apprendimento adeguati al contesto in cui operiamo.
Quindi, in linea con il mio pensiero, e per non 'regalare' ai ragazzi delle definizioni che, magari a fine lezione non avrebbero più ricordato, ho pensato di introdurre la ***serie geometrica***, partendo sempre da un esempio, semplice e simpatico.
Considerando un quadrato di lato 1, in cui abbiamo man mano ritagliato dei triangoli rettangoli, come in figura:



L'osservazione è stata la seguente: questi infiniti triangolini esauriscono completamente la superficie del quadrato e, dunque, la somma infinita delle loro aree è uguale all'area totale del quadrato, cioè 1.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\cdots\to 1$$

Con i concetti introdotti fin'ora i ragazzi stessi hanno suggerito bene di scrivere:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

E il mio intervento mi ha permesso di dare, a questa serie, il nome di **serie geometrica**.
Necessario sempre il rigore nella formalizzazione dei concetti:
Ho spiegato alla classe che, una serie geometrica, è una serie del tipo:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$$

dove q è detta **ragione della serie**.
E tale serie:

Converge per $|q|<1$ e, in questo caso, converge alla somma $\frac{1}{1-q}$

Non converge per $q\geq 1$
Irregolare per $q\leq -1$

La scelta di omettere la dimostrazione sullo studio delle somme parziali per determinarne il carattere, è stato preso insieme all'insegnante curricolare, poiché essendo stato questo l'ultimo argomento trattato, e dovendo introdurre altri concetti, non abbiamo voluto 'caricare' di ulteriori nozioni gli studenti.

Le serie a Termini Positivi, la Serie Armonica e i Criteri di Convergenza

Tutto ciò che è stato detto fin'ora ha avuto l'intento di dare significato all'addizione di un numero infinito di termini, specificando sempre che alcune volte tale addizione dà come risultato un numero, altre volte non dà alcun risultato.
In particolare, dopo aver introdotto le serie a termini positivi, sono stati dati i criteri di convergenza per stabilirne il carattere.
Si chiamano ***serie a termini positivi,*** le serie i cui termini sono tutti positivi.
In particolare per questo tipo di serie abbiamo dato il seguente:

TEOREMA

Una serie a termini positivi (oppure non negativi) può soltanto essere convergente oppure divergente positivamente.

Un esempio di serie a termini positivi: la ***serie armonica***.
Per questa serie ho pensato innanzitutto di raccontare brevemente un po' sul perché è stato dato questo nome.
È così chiamata poiché ogni suo termine è la media armonica del termine che lo precede e di quello che lo segue, e ho specificato che la media armonica $\boldsymbol{m}$ fra due numeri a e b è definita in modo che la sua inversa $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}}$ sia la media aritmetica degli inversi a e b.
E che la parola *'armonia'* risale ai tempi di Pitagora, quando con questo nome, i greci intendevano l'arte di ricercare un numero 'ben posizionato', cioè un medio proporzionale fra altri due numeri.
La serie armonica era esattamente questa:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

che diverge.
A questo punto i ragazzi erano pronti anche a studiare la convergenza della serie armonica ***generalizzata:***

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

che:
Converge per $\alpha > 1$
Diverge per $\alpha \leq 1$

Inoltre, sono stati esaminati quattro criteri che permettono di stabilire il carattere di una serie a termini positivi.

Il criterio del Confronto

Siano:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \qquad e \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$$

due serie a termini non negativi e tali che:

$$a_k \leq b_k$$

definitivamente.

Allora valgono le seguenti implicazioni:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \ convergente \quad => \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \ convergente$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \ divergente \quad => \quad \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \ divergente$$

Inoltre:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$$

è detta **maggiorante**, mentre

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

è detta **minorante**.

Il criterio del Confronto
Date le serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad e \quad \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$$

entrambi a termini positivi, se esiste finito il limite

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \neq 0$$

allora le due serie hanno lo stesso carattere.

Il criterio del Rapporto
Data una serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

a termini positivi tale che esista finito il limite

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l$$

Se $l < 1$, la serie è convergente
Se $l > 1$, la serie è **divergente**
Se $l = 1$, NON è possibile decidere il carattere della serie.
Il criterio della Radice
Data una serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

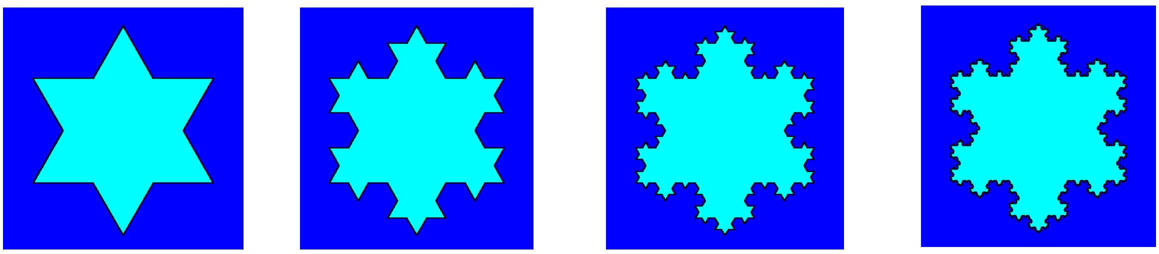
a termini positivi tale che esista finito il limite

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = l$$

Se $l < 1$, la serie è convergente
Se $l > 1$, la serie è divergente
Se $l = 1$, non è possibile decidere il carattere della serie.

Didattica laboratoriale
…per disegnare un semplice ***fiocco di neve*** con Geogebra
Seguiamo semplici passi per costruire un fiocco di neve utilizzando il software Geogebra.

Disegnare un triangolo equilatero di lato 1 e "incollare" al centro di ogni suo lato un triangolo equilatero di lato 1/3;
al centro di ogni lato della nuova figura (ora ci sono 12 lati) "incollare" un altro triangolo equilatero di lato 1/9 e procedere avanti così…
con pazienza si otterrà un magnifico fiocco di neve.



OSSERVAZIONE didattica: la particolarità di questa figura è che pur vendo perimetro infinito ha superficie finita.
Infatti, nel costruire il fiocco di neve bisogna via via "attaccare" al triangolo iniziale dei triangolino di area sempre 1/9 della precedente. Così procedendo si ottiene una serie geometrica di ragione minore di 1 che, dunque, converge e il nostro fiocco di neve avrà area finita. Non è così, invece, per il perimetro: si ottiene sempre una serie geometrica ma con ragione maggiore di 1 che, dunque, diverge.

Le serie a Termini di Segno Qualunque
Dopo aver lavorato con le Serie a Termini Positivi, così come mi aspettavo, i ragazzi si sono chiesti come si potrebbe studiare una Serie che, però, non presenta queste caratteristiche.
Era chiaro che bisognava introdurre le Serie di Segno Qualunque, serie cioè i cui termini sono numeri sia positivi che negativi. In particolare, esistono serie a termini di segno alterno.

DEFINIZIONE
Si chiama serie a termini di segno alterno una serie dove i termini di posto dispari sono positivi e quelli di posto pari sono negativi o viceversa.
Una serie di questo tipo si presenta nella forma:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

..un esempio di serie a segni alterni
Avendo già studiato la convergenza della serie armonica, ho pensato di iniziare l'argomento introducendo la seguente serie e confrontarla con la precedente.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$

Domanda stimolo
Le due serie hanno lo stesso carattere considerando che il termine generale è analogo?

La risposta al quesito è ovviamente negativa e per dare conferma di ciò abbiamo introdotto in concetto di convergenza assoluta (partendo dalla definizione di serie dei moduli) e il criterio di Leibnitz.

DEFINIZIONE
Si dice serie dei moduli associata alla serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

la serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$$

i cui termini altro non sono se non i valori assoluti dei corrispondenti termini della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

Osservazione 1:
In base alla definizione di valore assoluto, la serie dei moduli è sempre una serie a termini positivi e come tale potrà solo convergere o divergere positivamente.

Detto ciò è stata data la **definizione** di convergenza assoluta:
Una serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

Si dice assolutamente convergente se la serie dei moduli ad essa associata è convergente.

E allora, come studiare la convergenza assoluta di una serie numerica?
Innanzitutto scrivendo la serie dei moduli e studiando il carattere della serie.
Come?
Essendo la serie a termini positive abbiamo potuto utilizzare tutti i criteri già visti.
… e concludendo
Se la serie dei moduli converge allora la nostra serie di partenza **convergerà assolutamente**.
E se la serie dei moduli diverge (positivamente)?
Sicuramente la serie di partenza non convergerà assolutamente. Essa potrà allora diverge o convergere ed in tal caso abbiamo parlato di convergenza semplice.
Osservazione 2
Quando la serie dei moduli non converge e, quindi, non si può parlare di convergenza assoluta, non si può concludere dicendo che la serie di partenza NON converge.
E' un errore gravissimo!
Riprendendo la serie proposta prima, infatti, abbiamo dimostrato insieme che, qualora non vi fosse convergenza assoluta non si può dire nulla sulla serie in esame: infatti, essa potrebbe divergere ma anche convergere semplicemente.
Alla serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$

associamo la serie dei moduli

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

Sappiamo che essa diverge positivamente, pertanto la serie di partenza non converge assolutamente, ma per il momento non possiamo dire nient'altro.
Per continuarne lo studio abbiamo dovuto introdurre il
Criterio di Leibnitz:
Sia

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

una serie di segno variabile, con $a_k \geq 0$ per ogni $k \in N$. Se valgono le seguenti ipotesi:

1. la successione $\{a_k\}_{k \in N}$ è infinitesima, ovvero il

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$$

2. la successione $\{a_k\}_{k \in N}$ è decrescente

Allora la serie data converge.

Senza nient'altro da aggiungere, i ragazzi stessi hanno capito che il criterio di Leibnitz è uno fra i più immediati criteri esistenti per la convergenza delle serie numeriche a segno variabile, in quanto richiede solo la verifica delle condizioni 1. e 2.
Se esse valgono possiamo affermare che la serie data converge senza fare nient'altro.
E continuando, quindi, con lo studio della precedente serie, abbiamo verificato che le condizioni sono entrambe verificate.
Infatti, poiché:

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} = 0$$

e

$$\{a_k\}_{k \in N} = \left\{\frac{1}{k}\right\}_{k \in N}$$

è una successione decrescente, per il criterio di Leibnitz la nostra serie converge.
Abbiamo così un esempio di serie che non converge assolutamente ma che converge semplicemente, a testimonianza del fatto che la convergenza assoluta non ci permette di dire altro sul carattere della serie in esame.

Riassumendo

Se una serie è a termini positivi per studiare la convergenza si utilizzano i quattro criteri esaminati in precedenza;
Se una serie è a segno variabile si costruirà la serie dei moduli (che è a termini positivi);

Se la serie dei moduli converge allora convergerà assolutamente e quindi semplicemente (e l'esercizio terminerà);
Se la serie dei moduli non converge possiamo solo dire che non vi è convergenza assoluta e bisogna procedere con lo studio della convergenza semplice utilizzando il criterio di Leibnitz.

Approfondimento
Il concetto di serie numerica, ampiamente discusso, è il primo passo per introdurre serie del tipo più generale, ossia *serie di funzioni*. In realtà questo tipo di serie, seppur trattate poco dal punto di vista matematico (scolasticamente parlando), sono molto familiari agli studenti poiché le serie di funzioni, come ad esempio le serie di Fourier, hanno una vasta gamma di applicazioni nel campo dell'elettronica, della meccanica e dell'informatica. In discipline come sistemi automatici o elettronica digitale, l'analisi di Fourier, infatti, è largamente utilizzata.

Bibliografia

[1] F. Conti, P. Acquistapace, A. Savojni. *Analisi Matematica – Teoria e Applicazioni,* McGraw – Hill.
[2] M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa. *Analisi Matematica 1,* Zanichelli, 2009.
[3] M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa. *Analisi Matematica 2,* Zanichelli, 2009.
[4] M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi. *Matematica Verde – con Maths in English,* Zanichelli, 2012.
[5] M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi. *Matematica Verde, modulo epsilon.* Serie, la serie di Fourier, la trasformata di Laplace. Zanichelli, 2012.