201. Una breve presentazione del teorema di Frobenius ed alcune applicazioni

Sebastiano Ferraris
sebastiano.ferraris@gmail.com

In memoria del professor
Sergio Console

Sommario

Così come sotto determinate condizioni ad un punto di un campo vettoriale è possibile assegnare una curva integrale, ad una famiglia di campi vettoriali è possibile associare (certamente con altre condizioni) una sorta di "ipersupreficie integrale", mediante l'integrazione di tale famiglia sulla varietà. Il noto teorema di Cauchy (o di Picard-Lindelöf) fornisce le condizioni necessarie e sufficienti per integrare un campo vettoriale; il teorema di Frobenius, tema prinicpale di questo articolo, fornisce invece le condizioni necessarie e sufficienti per integrare la famiglia di campi vettoriali. Oltre che sui campi vettoriali, il teorema di Frobenius può essere formulato anche sulla loro struttura gemellare, cioé le forme differenziali. Ogni forma differenziale può infatti essere vista come l'applicazione locale di un campo vettoriale e viceversa ogni campo vettoriale è una visione globale di una forma differenziale. Dopo una introduzione sulle definizioni fondamentali, si arriva, nel terzo paragrafo, alla dimostrazione del teorema di Frobenius, mentre nel terzo paragrafo sono introdotti i gruppi e le algebre di Lie; in analogia al dualismo campo vettoriale - forma differenziale le algebre di Lie vengono considerate come una visione locale dei gruppi di Lie. Nel quinto paragrafo si presenta il teorema di corrispondenza di Lie, conseguenza notevole del teorema di Frobenius, seguito da tre corollari.

1 Campi vettoriali

1.1 Definizioni principali

Definizione 1.1 *Sia M varietà differenziabile $\mathcal{C}^\infty$ di dimensione n. Un* **campo vettoriale** *su M è una assegnazione di un vettore tangente $X_p \in T_pM$ ad ogni punto $p \in M$ tale che X_p sia differenziabile rispetto a p.*

Sia $(U; x_1, \dots, x_n)$ carta locale di M, intorno di p, allora per ogni $p \in M$ un campo vettoriale X può essere formulato mediante la sua **espressione locale***:*

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

dove le funzioni a_i appartengono a $\mathcal{C}^\infty(U)$, e definiscono il campo vettoriale nella base $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$. Sia $(V; y_1, \dots, y_n)$ un'altra carta locale, con $p \in V$, allora

$$X_p = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \Big|_p \Big) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_p$$

L'insieme di tutti i campi vettoriali sulla varietà M è indicato con $\mathfrak{X}(M)$. Si può definire in modo naturale una somma, come somma di vettori nei piani tangenti ed un prodotto scalare, come prodotto di un reale per un vettore tangente:
$\mathfrak{X}(M)$ è spazio vettoriale sui reali:

$$\begin{aligned} (X+Y)_p &= X_p + Y_p && \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \\ (\lambda X)_p &= \lambda X_p && \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dal fatto che X è defnto su ogni punto di M, può essere considerato assieme ad una funizone continua sulla varietà mediante prodotto[1]: si ha quindi una struttura di $\mathcal{C}^\infty(M)$-modulo

$$(fX)_p = f(p) X_p \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M) \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

Inoltre da ogni funzione f continua e definita in p e da ogni vettore in T_pM si può calcolare la derivata direzionale; segue che i campi vettoriali agiscono su $\mathcal{C}^\infty(M)$ come:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \\ (X, f) &\longmapsto Xf : \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad p \longmapsto (Xf)(p) = X_p f \end{aligned}$$

Nella carta locale lo scalare $X_p f$ si calcola come

$$(Xf)(p) = X_p f = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p$$

e rappresenta la derivata direzionale di $f(p)$ lungo il vettore $X_p \in T_pM$. Questo concetto è alla base della notazione $\frac{\partial}{\partial x_i}$ per indicare i versori della base del campo vettoriale X.
L'azione di $\mathfrak{X}(M)$ su $\mathcal{C}^\infty(M)$ è una derivazione, cioé:

$$\begin{aligned} X(\lambda f + \mu g) &= \lambda X f + \mu X g && \forall\ X \in \mathfrak{X}(M) \quad \forall\ f, g \in \mathcal{C}^\infty(M) \quad \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ X(fg) &= f X g + g X f && \forall\ X \in \mathfrak{X}(M) \quad \forall\ f, g \in \mathcal{C}^\infty(M) \end{aligned}$$

Il modo in cui un campo vettoriale si comporta agendo sulla funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ determina completamente tale campo:

[1] Se ad esempio M è un conduttore, X è la densità di corrente che attraversa M e $f(p)$ è l'area della sezione di M perpendicolare a X_p, allora $f(p)X_p$ è la formula dell'intensità di corrente.

Proprietà 1.1 *Sia M varietà differenziabile $\mathcal{C}^\infty$ di dimensione n, siano X, Y campi vettoriali su tale varietà ed $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Se $Xf = Yf$ allora $X = Y$.*

Dimostrazione: E' sufficiente provare che vale la tesi su un punto generico della varietà. Sia allora $p \in M$ ed $(U; x_1, \ldots x_n)$, carta locale ed intorno di p. Siano

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \qquad\qquad Y_p = \sum_{i=1}^{n} b_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$$

le espressioni locali di due campi vettoriali X ed Y. Dal lemma di estensione (pag. 26 Morita [4]), esiste V aperto, $p \in \overline{V} \subset U$, ed esistono le funzioni $\tilde{x}_i$ estensioni di x_i a tutta la varietà M tali che $x_i = \tilde{x}_i$ su V e tali che $\tilde{x}_i = 0$ su $M \setminus U$.
Allora, per ogni i compreso fra 1 ed n si ha

$$X_p\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\Big|_p = a_i(p)$$
$$Y_p\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{n} b_j(p) \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\Big|_p = b_i(p)$$

Per ipotesi $X_p\tilde{x}_i = Y_p\tilde{x}_i$ quindi $a_i(p) = b_i(p)$ per ogni i. $\square$

1.1.1 Definizione alternativa di campo vettoriale

Data una curva $\mathcal{C}^\infty$ tracciata su M $\sigma : [a, b] \longrightarrow M$, si definisce [2] campo vettoriale X sulla curva σ la mappa $X : [a, b] \longrightarrow TM$ che solleva σ, cioé tale che $\pi \circ X = \sigma$, dove $\pi : TM \longrightarrow M$ proiezione canonica dal fibrato tangente alla varietà.

1.2 Bracket di campi vettoriali

Definizione 1.2 *Dati X ed Y campi vettoriali sulla varietà differnziabile M allora si definisce* **bracket di campi vettoriali** *la funzione:*

$$\begin{aligned}[X, Y] : \mathcal{C}^\infty(M) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)\\ f &\longmapsto [X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)\end{aligned}$$

$[X, Y]$ è una derivazione. Infatti per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, per ogni $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, valgono

$$[X, Y](\lambda f + \mu g) = \lambda[X, Y]f + \mu[X, Y]g$$
$$[X, Y](fg) = f[X, Y]g + g[X, Y]f$$

[2]Come fatto ad esempio nel Warner [5].

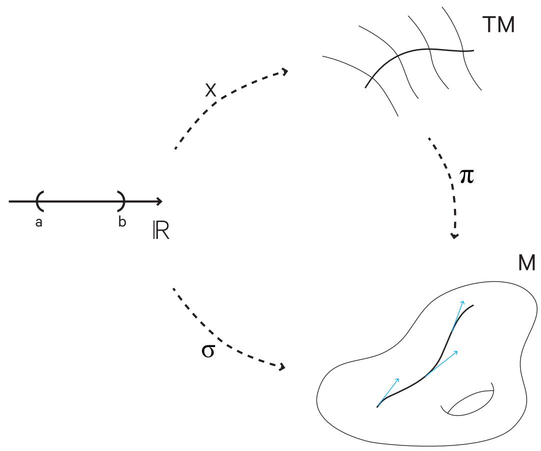

Figura 1: Campo vettoriale come sollevamento di una curva tracciata

Ed essendo una derivazione, soddisfa la definizione (nella formulazione analitica [3], cioé non basata sui germi) di vettore tangente e quindi

$$\forall\, p \in M \qquad [X,Y]_p \in T_pM$$

Ma questo non basta per poter dire che $[X,Y]$ è un campo vettoriale definito su M: è necessario anche dimostrare che che è $\mathcal{C}^\infty$ rispetto a $p \in M$.

Proprietà 1.2 *Siano X ed Y campi vettoriali definiti sulla varietà differenziabile M, allora $[X,Y]$ è $\mathcal{C}^\infty(M)$.*

Dimostrazione: Si considera l'espressione locale di $[X,Y]$: siano

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad\qquad Y = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

si verifica che

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= XY - YX \\
&= \sum_{j=1}^{n} \Big(Xb_j\Big)\frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} \Big(Ya_j\Big)\frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

Sia ora fissata $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, segue che:

$$[X,Y]f = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\Big)\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Calcolata nel punto $p \in M$ risulta

$$[X, Y]_p f = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \Big|_p - \sum_{i=1}^{n} b_i(p) \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \Big|_p \Big) \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_p$$

Per X, Y campi vettoriali ed f $\mathcal{C}^\infty$ fissati sulla varietà, al variare di p in M $[X, Y]_p f$ è composizione di funzioni differenziabili e quindi è differenziabile. □

Corollario 1.1 *Siano X ed Y campi vettoriali definiti sulla varietà differenziabile M, allora $[X, Y]$ è un campo vettoriale.*

La seguente proprietà, che può essere verificata mediante calcoli diretti, caratterizza i bracket di campi vettoriali:

Proprietà 1.3 *Siano X, X', Y, Y' e Z campi vettoriali, f e g funzioni differenziabili su M ed λ e μ scalari, allora valgono:*

1. *Linearità rispetto alla struttra di spazio vettoriale, per entrambi i campi del bracket:*

$$[\lambda X + \mu X', Y] = \lambda[X, Y] + \mu[X', Y]$$
$$[\lambda X + \mu X', Y] = \lambda[X, Y] + \mu[X', Y]$$

2. *Proprietà antisimmetrica:*

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

3. *Identità di Jacobi:*

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

4. *Non linearità per la struttura di $\mathcal{C}^\infty(M)$-modulo:*

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

I primi 3 punti della proprietà precedente affermano che l'insiseme dei campi vettoriali su una varietà differenziabile M, con $[\cdot, \cdot]$ è un'algebra di Lie sui reali. Pertanto i bracket di campi vettoriali sono anche chiamati **bracket di Lie**.

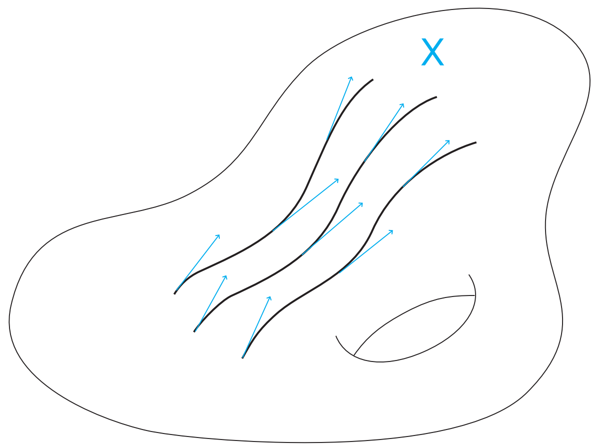

Figura 2: Curve integrali del campo vettoriale X su M

1.3 Curve integrali di campi vettoriali

Definizione 1.3 *Sia M una varietà differenziabile, X un campo vettoriale definito su M, allora una curva $c : (a, b) \longrightarrow M$ è chiamata* **curva integrale di** X *se la velocità vettoriale*

$$\dot{c}(t) \in T_{c(t)}M \qquad t \in (a, b)$$

coincide con il vettore definito da X nel punto $c(t)$:

$$\dot{c}(t) = X_{c(t)} \qquad t \in (a, b)$$

Le curve integrali sono quindi i percorsi di elementi puntiformi sulla varietà lasciati liberi di muoversi sotto all'azione del campo vettoriale definito su di essa.
In generale, due curve integrali distinte dello stesso campo vettoriale non hanno intersezioni. Nella definizione alternativa di campi vettoriali data nel paragrafo 1.1.1, si definiscono già i campi vettoriali sulle varietà a partire dalle curve integrali. Il Warner [5] definisce le cose in modo più "economico", ma meno intuitivo.

Come ricavare le equazioni delle curve integrali dati X ed M.

Sia $(U; y_1, \ldots y_n)$ carta locale di M, $p \in U$. Allora X può essere espresso localmente su U come

$$X_q = \sum_{i=1}^{n} a_i(q) \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_q \qquad \forall q \in U \qquad a_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$$

Sia $c : (a, b) \longrightarrow U \subset M$ curva integrala cercata, parametrizzata per semplicità in modo tale che $c(0) = p$. Allora nel sistema di coordinate locali si può descrivere la posizione di $c(t)$ come

$c(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \frac{\partial}{\partial y_i}$. La sua velocità vettoriale è data da

$$\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial y_i} \qquad t \in c^{-1}(U)$$

e ponendo $\dot{c}(t) = X_{c(t)}$ otteniamo:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i(c(t)) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

che equivale al sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) \qquad i = 1, \dots, n$$

Le condizioni inziali del sistema di equazioni differenziali sono fornite dalla condizione posta sulla parametrizzazione: $x_i(0) = p_i$ per p_i coordinate locali di p.

Osservazione 1.1 *Se si sceglie un diverso punto iniziale $q \in U$, variano le condizioni inziali, ma non il sistema di equazioni differenziali.*

L'esistenza e l'unicità delle cuve integrali per X su M è garantita dal teorema di Cauchy, infatti $a_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ cioé le funzioni che definiscono il campo vettoriale sono continue e quindi lipschitziane.

1.4 Campi vettoriali commutativi e gruppo ad un parametro

Definizione 1.4 *Sia M varietà differenziabile, due campi vettoriali X ed Y su M sono detti* **commutativi** *se $[X, Y] = 0$.*

Esempio 1.1 *$X = y\frac{\partial}{\partial x} - 2xy^2 \frac{\partial}{\partial y}$ ed $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ campi vettoriali definiti sulla varietà $\mathbb{R}^2$. Il loro bracket di Lie è dato da*

$$[X, Y] = -\frac{\partial}{\partial x} - 4xy\frac{\partial}{\partial y}$$

I due campi non sono commutativi.

I campi vettoriali commutativi hanno proprietà particolari se confrontati con il gruppo ad un parametro, che sarà introdotto in questo paragrafo per due tipologia distinte di curve integrali.

Osservazione 1.2 *Una curva integrale su M del campo vettoriale X è definita in generale sull'intervallo aperto (a, b) contenuto nella retta reale, la cui immagine può coinvolgere diverse carte; ma non è sempre possibile estendere (a, b) a tutta la retta reale.*

Dall'osservazione precedente è possibile distinguere due tipologie di campi vettoriali.

Definizione 1.5 *Un campo vettoriale X sulla varietà differenziabile M è detto* **completo** *se ogni curva integrale è definita su tutta la retta reale.*

Definiamo il gruppo ad un parametro per trasformazioni locali generato da X, inizialmente nel caso di X completo; subito dopo, con le opportune restrizioni, per X generico.
• Sia X campo vettoriale completo su M, allora si può definire una applicazione

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, p) &\longmapsto \Phi(t, p) = c(p)(t) \end{aligned}$$

dove per $c(p)(t)$ si intende la curva integrale del campo X definita sul punto p al punto t della curva. E' una funzione legata al campo vettoriale X che fornisce la posizione di un punto p lasciato libero di muoversi nel campo vettoriale dopo un tempo pari a t.
Può anche essere interpretato algebricamente come l'azione del gruppo $(\mathbb{R}, +)$ su M.
Per p fissato $\Phi(t, p)$ è l'orbita del punto sotto all'azione e coincide con la curva integrale del campo passante per p. Dato che le orbite di una azione sono disgiunte, si ha la conferma del fatto che due curve integrali diverse non hanno punti in comune e sono semplici. L'applicazione Φ è ben definita, suriettiva ed è chiamata **flusso associato al campo vettoriale**.
Fissando invece t è possibile definire una famiglia di applicazioni $\varphi_t(p)$ come

$$\varphi_t(p) = \Phi(t, p) \qquad p \in M$$

Allora il flusso risulta essere definito dall'insieme

$$G = \{\varphi_t : M \to M \mid t \in \mathbb{R}\}$$

e può essere considerato con l'operazione di composizione, che equivale alla somma di due intervalli di tempo sulle curve integrali. Valgono quindi

1. $\varphi_0 = id_M$
2. $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$

L'insieme G con l'operazione introdotta definisce un gruppo detto **gruppo ad un parametro di trasformazioni** generato da X.
La 1 e la 2 dicono che l'evoluzione del flusso per un tempo nullo è l'identità e che l'evoluzione del flusso per un tempo pari a $s + t$ è pari all'applicazione successiva delle due evoluzoni.

• Sia X campo vettoriale generico su M, si deve allora restringere il dominio del flusso per poter definire il gruppo ad un parametro.
Dato $p \in M$ si ha che la curva integrale di X in p è data da

$$c : (a_p, b_p) \longrightarrow M \qquad c(p) = 0 \quad a_p \in (-\infty, 0) \quad b_p \in (0, \infty)$$

Dove a_p e b_p sono gli estremi del dominio della curva integrale del campo vettoriale X definito nel punto p.
Si considera l'insieme

$$W = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M \mid a_p < t < b_p \;\; per \;\; (a_p, b_p) = Dom(c(p))\} \subseteq \mathbb{R} \times M$$

Quindi il flusso associato al campo vettoriale è dato da

$$\begin{aligned} \Phi : W &\longrightarrow M \\ (t, p) &\longmapsto \Phi(t, p) = c(p)(t) \end{aligned}$$

dove $c(p)(t)$ è definito come prima.
W è un insieme aperto di $\mathbb{R} \times M$, intorno di $\{0\} \times M$ e Φ è di classe $\mathcal{C}^\infty$.
Come nel caso precedente si può definire una famiglia di applicazioni

$$\varphi_t(p) = \Phi(t, p)$$

e, facendo variare p in M_t, dove

$$M_t = \{p \in M \mid a_p < t < b_p \;\; per \;\; (a_p, b_p) = Dom(c(p))\} \subset M$$

Si ha quindi che il gruppo ad un parametro di trasformazioni è definito, nel caso generico come

$$G = \{\varphi_t : M_t \to M \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Anche avendo ristretto il dominio dei suoi elementi, G risulta comunque essere un gruppo, e valgono le stesse osservazioni del caso precedente.
G è detto **gruppo ad un parametro di trasformazioni locali** generato da X.

Riassumendo, ogni campo vettoriale X su M definisce un flusso associato, dal quale si può ricavare il gruppo ad un parametro.
Viceversa si può dimostrare che ogni flusso che ammette gruppo ad un parametro globale su M, definisce un campo vettoriale X detto generatore infinitesimo (che non sarà ulteriormente approfondito in queste pagine). Se il campo vettoriale X è completo, allora G è sottogruppo commutativo del gruppo degli endomorfismi di M. Da questa considerazione otteniamo una definizione alternativa di campi vettoriali completi.

Definizione 1.6 *Un campo vettoriale X sulla varietà M si dice* **completo** *se ogni elemento del gruppo ad un parmetro associato ad X è definito su tutto M, cioé se $M_t = M$.*

1.5 Push forward

In questa sezione viene introdotto uno strumento che sarà utilizzato nei capitoli successivi: consente fondamentalmente ad un campo vettoriale X definito su una varietà M di agire come derivazione su un'altra varietà N, purché sia definita la mappa $F : M \to N$.

Definizione 1.7 *Sia $F : M \to N$ una mappa fra varietà differenziabili, allora per ogni $p \in M$ la funzione fra gli spazi tangenti*

$$\begin{aligned} F_\star : T_pM &\longrightarrow T_{F(p)}N \\ X_p &\longmapsto (F_\star X_p) : \mathcal{C}^\infty(N) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad\qquad f \longmapsto (F_\star X_p)(f) = X_p(f \circ F) \end{aligned}$$

per X_p vettore in T_pM e per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$ è chiamata **push forward** [3] *di F in p.*

La definizione può essere visualizzata con il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\infty(M)\colon \arrow[d] & X_p \in T_pM \arrow[r, "F_\star"] \arrow[d, dashed] & T_{F(p)}N \ni F_\star X_p \arrow[d, dashed] & \colon \mathcal{C}^\infty(N) \arrow[d] \\
\mathbb{R} & M \arrow[r, "F"] \arrow[dd, "g"] \arrow[ddr, dashed, "f \circ F"] & N \arrow[dd, "f"] & \mathbb{R} \\
\ddot{g} \arrow[d, hook] & & & \ddot{f} \arrow[d, hook] \\
X_p(g) & \mathbb{R} & \mathbb{R} & X_p(f \circ F)
\end{tikzcd}$$

Quindi il vettore tangente in p ad M che non potrebbe essere applicato ad $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$ come derivata direzionale, può invece essere applicato ad $f \circ F \in \mathcal{C}^\infty(M)$[4]. L'operatore $(F_\star X_p)$ è lineare ed è una derivazione. Il push forward della composizione di due mappe $F : M \to N$, $G : N \to P$ fra varietà è la composizione dei push forward delle mappe.

$$(G \circ F)_\star = G_\star \circ F_\star$$

Cioé

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[r, "F_\star"] \arrow[d, dashed] \arrow[rr, bend left, "(G \circ F)_\star"] & T_pN \arrow[r, "G_\star"] \arrow[d, dashed] & T_pP \arrow[d, dashed] \\
M \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "G \circ F"'] & N \arrow[r, "G"] & P
\end{tikzcd}$$

Per $(U_p; x_1, \ldots, x_m)$ e $(V_p; x_1, \ldots, x_m)$ carte locali di M che contengono p, coordinate locali del push forward del cambiamento di base sono

$$F_\star\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

[3]Def di push forward pag. 46, Lee [3]. Pag. 33 e pag. 72 Morita [4].

[4]Sul Morita [4] il push forward viene chiamato differenziale di F in p, ed è indicato occasionalmente con dF_p

Il seguente lemma introduce altre due proprietà del push forward, le cui dimostrazioni possono essere ricavate dagli strumenti presentati in queste pagine.

Lemma 1.1 *Sia $F : M \to N$ mappa fra varietà differenziabili, allora valgono*

1. $(Id_M)_\star : T_pM \to T_pM$ *equivale a* Id_{T_pM}.
2. *Se F è un diffeomorfismo, allora $F_\star$ è un isomorfismo.*

Si conclude il paragrafo con una proprietà[5] che servirà a dimostrare il teorema di Frobenius.

Proprietà 1.4 *Siano X ed Y campi vettoriali $\mathcal{C}^\infty$ su M varietà differenziabile e siano $\{\varphi_t \mid t \in (a_1, b_1) \subseteq \mathbb{R}\}$ e $\{\psi_t \mid t \in (a_2, b_2) \subseteq \mathbb{R}\}$ gruppi ad un parametro di trasformazioni locali di X ed Y rispettivamente, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *X ed Y sono commutativi, cioè $[X, Y] = 0$.*
2. *Y è invariante rispetto a φ_t, cioé per ogni $t \in (a_1, b_1) \subseteq \mathbb{R}$ $(\varphi_t)_\star(Y) = Y$.*
3. *φ_t e ψ_t sono commutativi, cioé per ogni $t, s \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) \subseteq \mathbb{R}$*

$$\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$$

L'idea della commutatività degli elementi dei gruppi ad un parametro definiti da campi vettoriali distinti giocherà un ruolo cruciale nella dimostrazione del teorema di Frobenius. Siano $p, q \in M$ tali che

$$q = (\varphi_t \circ \psi_s)(p) = (\psi_s \circ \varphi_t)(p)$$

allora la commutatività implica che un corpuscolo che si muove sulla varietà dal punto p e segue per t secondi il campo X e dopo per s secondi il campo Y o per s secondi il campo Y e dopo per t secondi il campo X raggiunge sempre lo stesso punto q.

2 Varietà integrali

Come visto nella sezione precedente, un campo vettoriale su una varietà associa ad ogni punto della varietà un vettore e l'insieme di questi vettori definiscono un insieme di curve integrali tramite la risoluzione di un problema di Cauchy.

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto X_p = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \subseteq T_pM \end{aligned}$$

Cosa succede se si definiscono due campi vettoriali sulla stessa varietà anziché uno solo e se si prova ad integrare una superficie su questi campi?
Posso cioé generalizzare il concetto di curva integrale al concetto di "superficie integrale"?

[5] Prop. 2.18, pag 82, Morita [4].

2.1 Distribuzioni completamente integrabili

Definizione 2.1 *Sia M varietà differenziabile di dimensione n, una* **distribuzione r-dimensionale** *$\mathcal{D}$ su M (chiamata anche sottofibrato tangente), è una funzione che ad ogni punto $p \in M$ associa un sottospazio vettoriale r-dimensionale di T_pM indicato con $\mathcal{D}_p$:*

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto \mathcal{D}_p \subseteq T_pM \end{aligned}$$

$\mathcal{D}_p$ è detto di **di classe $\mathcal{C}^\infty$** *rispetto a p se esiste una r-upla di campi vettoriali $\mathcal{C}^\infty$, $X^1, \dots, X^r$ definiti in un intorno di p, U_p, tali che siano una base di $\mathcal{D}_q$ per ogni $q \in U_p$. Se $\mathcal{D}_p$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$, per ogni $p \in M$ allora $\mathcal{D}$ è detta distribuzione di classe $\mathcal{C}^\infty$*

Definizione 2.2 *Sia $\mathcal{D}$ distribuzione r-dimensionale di classe $\mathcal{C}^\infty$, una sottovarietà N di M è detta* **varietà integrale** *di $\mathcal{D}$ se $T_pN = \mathcal{D}_p$ per ogni $p \in N$.*

Se N è la varietà integrale di $\mathcal{D}$ allora il suo spazio tangente ha r vettori linearmente indipendenti.

Definizione 2.3 *Sia $\mathcal{D}$ distribuzione su M. Se per ongi $p \in M$ esiste una varietà integrale di $\mathcal{D}$, allora la distribuzione $\mathcal{D}$ è detta* **completamente integrabile**.

Osservazione 2.1 *Una distribuzione $\mathcal{C}^\infty$, di dimensione 1 è un campo vettoriale, ed in particolare è sempre completamente integrabile.*

Definizione 2.4 *Sia M varietà $\mathcal{C}^\infty$. Si dice che un campo vettoriale X su M* **appartiene ad una distribuzione** *$\mathcal{D}$ se $X_p \in \mathcal{D}_p$ per ogni $p \in M$.*

Esempio 2.1 *Si propongono alcuni esempi di distribuzioni:*

1. *Sia X campo vettoriale sulla varietà M, allora X è anche una distribuzione 1-dimensionale.*
2. *In $\mathbb{R}^n$ il campo vettoriale generato da $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k})$ è una distribuzione k-dimensionale, avente come varietà integrale la sottovarietà $\mathbb{R}^k$ di $\mathbb{R}^n$.*
3. *Sia $\mathcal{D}_p$ lo spazio tangente alla sfera centrata nell'origine e passante per $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, allora $\mathcal{D}_p$ è localmente generata dai vettori $(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi})$ in coordinate sferiche per punti diversi dal polo nord e dal polo sud. Per ogni punto $(x, 0, 0)$ con $x \in \mathbb{R}_+$ passa una superficie sferica concentrica che corrisponde ad una varietà integrale della distribuzione.*

Si conclude il paragrafo con una proprietà [6] basilare per la dimostrazione del teorema di Frobenius, nella formulazione per campi vettoriali:

Proprietà 2.1 *Sia $\mathcal{D}$ distribuzione r-dimensionale di classe $\mathcal{C}^\infty$ sulla varietà differenziabile M. Se $\mathcal{D}$ è completamente integrabile, allora per ogni X, Y appartenenti a $\mathcal{D}$ segue che il campo vettoriale $[X, Y]$ appartiene a $\mathcal{D}$.*

[6] Prop 2.15 pag. 80 Morita [4].

Dimostrazione: Dal fatto che $\mathcal{D}$ è completamente integrabile, si hanno due conseguenze:

1. Esiste N sottovarietà di M di dimensione r tale che $T_pN = \mathcal{D}_p$ per ogni $p \in M$.

2. Sia $(U; x_1, \ldots, x_n)$ carta locale per U intorno di p e siano X ed Y campi vettoriali su M, la cui espressione locale è data da

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad\qquad Y = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

   Nell'intesezione della carta locale sulla sottovarietà $N \cap U$ e dalla definizione si sottovarietà, segue che

$$\forall q \in N \cap U \qquad x_{r+1}(q) = x_{r+2}(q) = \cdots = x_n(q) = 0$$

   inoltre dal punto 1

$$T_qN = span(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r}) = \mathcal{D}_q$$

   quindi segue che i campi vettoriali X ed Y su $N \cap U$ sono caratterizzati da

$$a_i = bi = 0 \qquad \forall i > r$$

La tesi si ottiene dimostrando che per ogni $p \in M$ $[X, Y]_p \in \mathcal{D}_p$. Considero

$$[X, Y]_p = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_i(p) \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\Big|_p - b_i(p) \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\Big|_p \right) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p$$

Ed essendo $X, Y \in \mathcal{D}$, dal punto 2, segue che

$$a_i(p) \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\Big|_p - b_i(p) \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\Big|_p = 0 \qquad\qquad \forall i > r$$

Quindi

$$[X, Y]_p = \sum_{i,j=1}^{r} \left(a_i(p) \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\Big|_p - b_i(p) \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\Big|_p \right) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \in T_pN$$

che equivale alla tesi: $[X, Y]_p \in \mathcal{D}_p$. □

2.2 Distribuzioni involutive

Definizione 2.5 *Una distribuzione $\mathcal{D}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ definita su M varietà differenziabile è detta* **involutiva** *se per ogni X, $Y \in \mathcal{D}$ si ha che $[X,Y]_p \in \mathcal{D}_p$, cioé se vale la tesi della proprietà precedente.*

Osservazione 2.2 *$\mathcal{D}$ è involutiva su M allora è involutiva anche sulla sottovarietà $N \subset M$ tramite la restrizione $\mathcal{D}\mid_N$.*

La proprietà precedente può essere riformulata con la seguente implicazione:

$$\textbf{Completamente integrabile} \Longrightarrow \textbf{Involutiva}$$

Vale anche il viceversa? A questa domanda risponde il teorema di Frobenius.

3 Teorema di Frobenius

In queste pagine ci limitiamo a dimostrare il teorema di Frobenius formulato per campi vettoriali. Accenniamo brevemente alla formulazione per forme differenziali.

3.1 Teorema di Frobenius per campi vettoriali

Teorema 3.1 *Una distribuzione $\mathcal{D}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ è completamente integrabile se e solo se è involutiva.*

Dimostrazione: La condizione necessaria è stata dimostrata in 2.1. Si procede alla dimostrazione del viceversa: sia $\mathcal{D}$ distribuzione involutiva su M varietà differenziabile di dimensione n. Per ottenere la tesi si deve costruire una varietà integrale N di $\mathcal{D}$, cioè tale che $T_pN = \mathcal{D}_p$ per ogni $p \in M$.

Sia $p \in M$, $(U; x_1, \ldots, x_n)$ carta locale che contiene p. Dato che la distribuzione involutiva $\mathcal{D}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$, allora esistono r campi vettoriali linearmente indipendenti su U:
$Y^1, \ldots, Y^r \in \mathcal{D}$ la cui espressione locale è formulata come

$$Y^i = \sum_{j=1}^{n} b^i_j \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad\qquad i = 1, \ldots, r$$

Ed essendo $(Y^1, \ldots, Y^r)$ campi vettoriali linearmente indipendenti (a meno di un riordinamento dei pedici), segue che per ogni $q \in U$

$$det(b^i_j(q)) = det \begin{pmatrix} b^1_1(q) & b^1_2(q) & \ldots & b^1_r(q) \\ b^2_1(q) & b^2_2(q) & \ldots & b^2_r(q) \\ \vdots & & & \vdots \\ b^r_1(q) & b^r_2(q) & \ldots & b^r_r(q) \end{pmatrix} \neq 0$$

A partire dalla matrice appena introdotta è possibile definire delle nuove funzioni $a^i_j(q)$ e dei nuovi campi vettoriali come

$$\big(a^i_j(q)\big) = \big(b^i_j(q)\big)^{-1} \qquad\qquad X^i = \sum_{j=1}^{r} a^i_j Y^j$$

Cioè i nuovi campi X^i risultano essere $X^i = a^i_1 Y^1 + a^i_2 Y^2 + \cdots + a^i_r Y^r$, e per come sono state definite le $a^i_j(q)$ in U, segue che

$$\big(a^i_j\big) \cdot \big(b^i_j\big) = Id_{r\times r}$$

quindi

$$\begin{aligned}
X^i &= a^i_1 Y^1 + a^i_2 Y^2 + \cdots + a^i_i Y^i \cdots + a^i_r Y^r \\
&= a^i_1 (b^1_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b^1_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + b^1_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \cdots + b^1_n \frac{\partial}{\partial x_n}) + \\
&+ a^i_2 (b^2_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b^2_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + b^2_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \cdots + b^2_n \frac{\partial}{\partial x_n}) + \\
&\ldots \\
&+ a^i_i (b^i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b^i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + b^i_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \cdots + b^i_n \frac{\partial}{\partial x_n}) + \\
&\ldots \\
&+ a^i_r (b^r_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b^r_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + b^r_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \cdots + b^r_n \frac{\partial}{\partial x_n}) \\
= & \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=r+1}^{n} c^i_j \frac{\partial}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

Dove c^i_j sono funzioni su U determinate dal cambiamento di coordinate effettuato.
(Lo scopo del preocedimento è infatti quello di esprimere i campi Y^i in una nuova base, in modo tale che le prime r coordinate siano normalizzate). $X^1, \ldots, X^r$ sono linearmente indipendenti e formano una base per la distribuzione $\mathcal{D}$ in U.

Dopo questa fase costruttiva si usa l'ipotesi: $\mathcal{D}$ è una distribuzione involutiva, pertanto segue che

$$[X^i, X^j] = \sum_{k=1}^{r} f_k X^k \tag{1}$$

D'altro lato, sviluppando i calcoli di $[X^i, X^j]$, cioé applicando a una coppia di campi nella espressione locale $X^i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=r+1}^{n} c^i_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, si ottiene che $[X^i, X^j]$ è una combinazione lineare di $\frac{\partial}{\partial x_{r+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$.

Riassumendo quanto detto:

- $[X^i, X^j]$ è combinazione lineare di $X^1, \dots, X^r$.
- $[X^i, X^j]$ è combinazione lineare di

$$\frac{\partial}{\partial x_{r+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$$

Allora necessariamente:

$$f_k(q) = 0 \qquad \forall k = 1, \dots, r \qquad \forall q \in U$$

Quindi tutti gli X^i sono campi vettoriali **commutativi**. Allora dalla proprietà 1.4 del paragrafo 1.4 i gruppi ad un parametro associati ai campi vettoriali sono commutativi.

Sia $\{\varphi_t^i \mid t \in (a_i, b_i) \subseteq \mathbb{R}\}$ per (a_i, b_i) intorno centrato nell'origine, il gruppo ad un parametro di trasformazioni locali del campo X^i:

$$\varphi_t^i \circ \varphi_s^j = \varphi_s^j \circ \varphi_t^i \qquad \forall i, j = 1, \dots, r \qquad \forall s, t \in (a_i, b_i) \cap (a_j, b_j)$$

A partire dai gruppi $\{\varphi_t^i\}$ è possibile definire una mappa differenziale[7]:

$$\begin{aligned} &\varphi : \mathbb{R}^r \supset V \longrightarrow Im(\varphi) \subseteq M \\ &(t_1, \dots, t_r) \longmapsto \varphi(t_1, \dots, t_r) = \varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \varphi_{t_r}^r(p) \end{aligned}$$

Dove $V = \cap_{i=1}^r (a_i, b_i)$ è un intorno dell'origine.

Considerando il push forward nell'origine di tale mappa, si ottiene

$$\begin{aligned} \varphi_\star : T_0\mathbb{R}^r &\longrightarrow T_pM \\ \frac{\partial}{\partial t_i} &\longmapsto \varphi_\star(\frac{\partial}{\partial t_i}) = X_p^i \end{aligned}$$

che manda l'i-esimo vettore della base nel vettore tangente alla varietà in p lungo il campo X^i.
Dato che $X^1, \dots, X^r$ sono linearmente indipendenti $\varphi_\star$ è una iniezione. Quindi $\varphi : V \longrightarrow Im(\varphi)$ è un embedding (si verifica facilmente che è un omomorfismo e per definizione un omomorfismo con push forward iniettivo è un embedding[8]).
Ma l'immagine di un embedding è una sottovarietà[9], quindi

$$Im(\varphi) = N \text{ è una sottovarietà di M.}$$

[7] La cui immagine definirà la sottovarietà N di M che si scoprirà essere la varietà integrale di $\mathcal{D}$ cercata.
[8] Pag. 33-34 Morita [4]
[9] Pag. 35, teorema 1.37 Morita [4]

Dalle considerazioni precedenti si ha che $T_pN = span(X_p^1, \dots, X_p^r) = \mathcal{D}_p$.

L'ultima fase della dimostrazione consiste nel provare che per ogni $q \in U$ si ha $T_qN = \mathcal{D}_q$.
Sia dunque $q \in U$, allora esiste $(t_1, \dots, t_r) \in V$ tale che

$$q = \varphi(t_1, \dots, t_r) = \varphi^1_{t_1} \circ \varphi^2_{t_2} \circ \dots \circ \varphi^r_{t_r}(p)$$

e dal fatto che vale la commutatività posso sempre riscrivere la composizione degli elementi del gruppo ad un parametro, dando la precedenza all'i-esimo elemento:

$$q = \varphi^i_{t_i} \circ \varphi^1_{t_1} \circ \dots \circ \varphi^{i-1}_{t_{i-1}} \circ \varphi^{i+1}_{t_{i+1}} \circ \dots \circ \varphi^r_{t_r}(p) \tag{2}$$

E' sempre possibile considerare una funzione che vari solo t_i nella 2 tenendo fissati tutti i t_j per $j \neq i$:

$$\gamma_i : (a_i, b_i) \longrightarrow U \tag{3}$$
$$t \longmapsto \varphi^i_t \circ \varphi^1_{t_1} \circ \dots \circ \varphi^{i-1}_{t_{i-1}} \circ \varphi^{i+1}_{t_{i+1}} \circ \dots \circ \varphi^r_{t_r}(p) \tag{4}$$

Ma la 3 altri non è che la curva integrale del campo vettoriale X^i, dove

$$\gamma_i(t_i) = q \qquad \dot{\gamma}_i(t_i) = X^i_q$$

Questo significa che il vettore tangente a questa curva in q è $X^i_q \in T_qN$.

Potendo definire γ_i per ogni $i = 1, \dots, r$, allora $X^i_q \in T_qN$ per ogni $i = 1, \dots, r$.

$$\Longrightarrow T_qN = \mathcal{D}_q \text{ per ogni } q \in U.$$

Quindi N è una varietà integrale di $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}$ è completamente integrabile sulla carta locale U, quindi lo è su tutta la varietà M. □

Da quanto dimostrato si può quindi affermare che:

Completamente integrabile $\Longleftrightarrow$ Involutiva

3.2 Un cenno al teorema di Frobenius per forme differenziali

Una distribuzione r-dimensionale $\mathcal{D}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ su suna varietà differenziabile M di dimenisone n può essere rappresentata localmente dalle equazioni

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_s = 0 \tag{5}$$

dove $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$ sono $s = n - r$ 1-forme differenziali[10] linearmente indipendenti su un intorno di p indicato con $U \subset M$.
Si ha quindi

$$\mathcal{D}_q = \{X \in T_qM \mid \omega_1(X) = \omega_2(X) = \dots = \omega_s(X) = 0\} \qquad q \in U$$

Il sistema di equazioni 5 che determina la distribuizione è chiamato sistema di **equazioni pfaffiane**.
Si hanno i seguenti risultati:

[10] Cap. 2 pag 57 Morita [4].

Proprietà 3.1 *Sia $\mathcal{D}$ distribuzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ sulla varietà differenziabile M e sia $I(\mathcal{D})$ l'ideale dell'anello delle forme differenzial $\mathcal{A}^\star(M)$ definito dagli elementi che si annullano su $\mathcal{D}$. Allora $\mathcal{D}$ è una involuzione se e solo se $I(\mathcal{D})$ è chiuso rispetto all'operazione di differenziazione esterna*[11].

Osservazione 3.1 *$I(\mathcal{D})$ è chiuso rispetto all'operazione di differenziazione esterna se, per definizione, per ogni $\omega \in I(\mathcal{D})$ allora $d\omega \in I(\mathcal{D})$. Cioè $dI(\mathcal{D}) \subseteq I(\mathcal{D})$.*
Il differenziale esterno è definito come

$$d : \mathcal{A}^k(M) \longrightarrow \mathcal{A}^{k+1}(M)$$
$$\omega \longmapsto d\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

per $\omega = f(x_1, \dots, x_n)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$.

La proprietà precedentemente enunciata può essere riformulata definendo la condizione di **integrabilità** che ci porterà ad enunciare il teorema di Frobenius per forme differenziali:

Definizione 3.1 *$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s \in \mathcal{A}^1(U)$ soddisfano la* **condizione di integrabilità** *se esistono delle 1-forme $\omega_{i,j}$ tali che*

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{s} \omega_{i,j} \wedge \omega_j \qquad \forall i = 1, \dots, s$$

Si conclude quindi il paragrafo enunciando il teorema di Frobenius per forme differenziali.

Teorema 3.2 *La distribuzione $\mathcal{D}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ definita sulla varietà differenziabile M è completamente integrabile se e solo se le equazioni pfaffiane che rappresentano $\mathcal{D}$ soddisfano la condizione di integrabilità.*

4 Sottoalgebre di Lie di gruppi di Lie

In questa sezione sarà presentata la definizione di gruppo di Lie, di algebra di Lie e di algebra di Lie di un gruppo di Lie, accompagnate da esempi e alcune proprietà.

4.1 Gruppi di Lie

Un gruppo di Lie è un insieme G dotato di due strutture compatibili fra loro: è sia un gruppo che una varietà differenziabile nel quale il prodotto e l'inversione, considerate come mappe da G in G, devono essere differenziabili. Tutti i gruppi finiti sono gruppi di Lie che possiedono una struttura differenziabile triviale.

[11] Proprietà 2.20 pag. 87 Morita [4].

Definizione 4.1 *Una varietà differenziabile G si dice* **gruppo di Lie** *se possiede due mappe differenziabili*

$$\begin{aligned} m : G \times G &\longrightarrow G \\ (g,h) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i : G &\longrightarrow M \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

dette prodotto ed inversione che soddisfano gli assiomi di gruppo.

In alternativa una varietà differenziabile dotata di una struttura di gruppo, il cui prodotto renda la mappa

$$\begin{aligned} a : G \times G &\longrightarrow M \\ (g,h) &\longmapsto gh^{-1} \end{aligned}$$

differenziabile è un gruppo di Lie.

Esempio 4.1 *Si propongno alcuni esempi di gruppi di Lie che saranno siluppati nei paragrafi successivi*

1. *Il gruppo additivo $\mathbb{R}$ e più in generale $\mathbb{R}^n$ sono gruppi di Lie.*
2. *Il gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}_+$ è un gruppo di Lie.*
3. $\mathcal{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|= 1\}$ *con il prodotto è un gruppo di Lie.*
4. *Per $\mathbb{K}$ campo a caratteristica zero i gruppi $GL(n,\mathbb{K})$, $SL(n,\mathbb{K})$, $O(n,\mathbb{K})$, $SO(n,\mathbb{K})$, $U(n,\mathbb{K})$ ed $SU(n,\mathbb{K})$ sono gruppi di Lie [2].*
5. *Ogni gruppo finito è un gruppo di Lie 0-dimensionale.*

Definizione 4.2 *Un sottogruppo H di un gruppo di Lie G è detto* **sottogruppo di Lie** *se è anche sottovarietà differenziabile.*

Definizione 4.3 *Siano G e G' due gruppi di Lie, allora una mappa fra G e G' è un* **omomorfismo di gruppi di Lie** *se è un omomorfismo di gruppi e se è differenziabile per la struttura di varietà. Se invece la mappa è un diffeomorfismo (che implica anche l'isomorfismo di gruppi), allora è detta* **isomorfismo di gruppi di Lie***.*

La componente connessa di un gruppo di Lie G che contiene l'elemento neutro indicato usualmente con e è un sottogruppo normale, ed il quoziente di G su tale componente è un gruppo discreto.

4.2 Algebre di Lie

Definizione 4.4 *Una* **algebra di Lie** *è uno spazio vettoriale reale* $\mathfrak{b}$ *considerato congiuntamente con una applicazione bilineare* $\mathfrak{b} \times \mathfrak{b} \to \mathfrak{b}$ *denotata con* $[X, Y]$ *e chiamata* **bracket** *di* X *ed* Y *che soddisfa le seguenti due proprietà:*

1. *Antisimmetrica:* $[X, Y] = -[Y, X]$
2. *Identità di Jacobi* $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$

Esempio 4.2 *Si propongno alcuni esempi di algebre di Lie*

1. *Lo spazio vettoriale* $M(n, \mathbb{K})$ *delle matrici quadrate* $n \times n$ *a coefficienti reali è un'algebra di Lie con l'operazione definita dal commutatore*
$$[A, B] = AB - BA$$
$(M(n, \mathbb{K}), [,])$ *algebra viene usualmente denotata con* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.
2. *Il bracket di Lie definito sullo spazio dei campi vettoriali differenziabili sulla varietà* M, *forniscono ad* $\mathfrak{X}(M)$ *la struttura di algebra di Lie.*
3. *Ogni spazio vettoriale* V *considerato con la forma bilineare triviale, che mappa ogni coppia di vettori nel vettore nullo è un'algebra di Lie chiamata algebra di Lie* **abeliana**.
4. *Date due algebre di Lie* $\mathfrak{g}$ *ed* $\mathfrak{h}$, *allora lo spazio vettoriale prodotto* $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$, *con la forma bilineare definita come*
$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} &\longrightarrow \mathfrak{p} \\ ((X, Y), (X', Y')) &\longmapsto [(X, Y), (X', Y')]_{\mathfrak{p}} = ([X, X']_{\mathfrak{g}}, [Y, Y']_{\mathfrak{h}}) \end{aligned}$$
è un'algebra di Lie.

Definizione 4.5 *Se* $\mathfrak{b}$ *è un'algebra di Lie allora un sottospazio lineare* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ *è una* **sottoalgebra di Lie** *se è chiuso per l'operazione di bracket. In questo caso* $\mathfrak{a}$ *eredita la struttura di algebra di Lie da* $\mathfrak{b}$ *ed è a sua volta un'algebra di Lie.*

Definizione 4.6 *Siano* $\mathfrak{a}$ *e* $\mathfrak{b}$ *due algebre di Lie, allora una mappa lineare*
$L : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ *è un* **omomorfismo di algebre di Lie** *se è un isomorfismo di spazi vettoriali e se conserva i bracket:*
$L[X, Y]_{\mathfrak{a}} = [LX, LY]_{\mathfrak{b}}$. *Se è anche invertibile è detto* **isomorfismo di algebre di Lie** *e le due algebre sono dette* **isomorfe**.

Si verifica che il nucleo e l'immagine di un omomorfismo di algebre sono sottoalgebre e che una mappa lineare è un omomorfismo di algebre di Lie se lo è per gli elementi della base (in virtù della linearità dell'applicazione bilineare).

4.3 Sottolgebre left-invarianti e algebre di Lie di Gruppi di Lie

Sia G gruppo di Lie, ogni suo elemento g può definire un diffeomorfismo detto **left-traslazione** che in notazione moltiplicativa si esprime come

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto gh \end{aligned}$$

e che manda ogni elemento nel suo prodotto a sinistra per g.
Il suo push-forward è definito da

$$\begin{aligned} (L_g)_\star : T_h G &\longrightarrow T_{gh} G \\ X_h &\longmapsto (L_g)_\star X_p : \mathcal{C}^\infty(N) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad\qquad\quad f \longmapsto (L_g)_\star X_p(f) = X_p(f \circ L_g) \end{aligned}$$

Dove

$$X_p(f \circ L_g) = \sum_{i=1}^{n} a_i(h) \frac{\partial f \circ L_g}{\partial x_j} \Big|_h = \sum_{i=1}^{n} a_i(h) \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{gh}$$

Definizione 4.7 *Un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(G)$ su un gruppo di Lie si dice* **left-invariante** *se è invariante per ogni left-traslazione, cioé se $(L_g)_\star X = X$. L'insieme dei campi vettoriali left-invarianti è indicato con $left\mathfrak{X}(G)$*

Si osserva che $left\mathfrak{X}(G)$ è un sottospazio lineare:

$$(L_g)_\star(aX + bY) = a(L_g)_\star X + b(L_g)_\star Y \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(G) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Infatti per ogni $h \in G$ e per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$

$$\begin{aligned} (L_g)_\star(aX_h + bY_h)f &= (aX_h + bY_h)(f \circ L_g) \\ &= aX_h(f \circ L_g) + bY_h(f \circ L_g) \\ &= a(L_g)_\star X_h f + b(L_g)_\star Y_h f \end{aligned}$$

Ci sono due conseguenze principali della definizione:
ogni vettore X_h left-invariante definito dal campo vettoriale nel punto h al quale è applicato il push forward della left-traslazione risulta essere $(L_g)_\star X_h = X_{gh}$.

Per ogni $h \in G$ e per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$

$$\begin{aligned}
(L_g)_\star X_h f &= X_h(f \circ L_g) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i(h) \frac{\partial f \circ L_g}{\partial x_i} \Big|_h \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i(h) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{gh} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i(gh) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{gh} \\
&= X_{gh} f
\end{aligned}$$

Il passaggio $a_i(h) = a_i(gh)$ si verifica in virtù della left-invarianza [12] e mette in evidenza la seconda conseguenza della definizione:
dato che L_g agisce sulla varietà transitivamente si ha che il campo vettoriale left-invariante X è completamente determinato da $X_e \in T_eG$. Viceversa ogni vettore $v \in T_eG$ definisce un unico campo vettoriale left-invariante come $X_g = (L_g)_\star v$. Si può quindi stabilire una corrispondenza biunivoca fra i campi vettoriali left-invariatni ed i vettori tangenti di T_eG che è anche un isomorfismo di spazi vettoriali:

$$\begin{aligned}
left\mathfrak{X}(G) &\longrightarrow T_eG \\
X &\longmapsto X_e
\end{aligned}$$

E' una iniezione, dato che ogni campo vettoriale left-invariante definisce in modo unico X_e vettore del campo calcolato nell'elemento neutro e si dimostrerà (teorema 4.1) che anche l'inversa è una iniezione ben definita, cioè che ogni vettore $v \in T_eG$ definisce un campo vettoriale X differenziabile left-invariante:

$$(L_g)_\star v = X_g \qquad\qquad \forall g \in G$$

Oltre ad essere uno spazio vettoriale, $left\mathfrak{X}(G)$ possiede anche la struttura di algebra ereditata da $\mathfrak{X}(G)$ considerato con il bracket di Lie.

Lemma 4.1 *Sia G gruppo di Lie e sia $\mathfrak{b} = left\mathfrak{X}(G)$ l'insieme dei campi vettoriali left-invarianti, allora $\mathfrak{b}$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{X}(G)$*

Dimostrazione: Si verifica immediatamente che $\mathfrak{b}$ è sottospazio vettoriale, e come già osservato $\mathfrak{X}(G)$ è un'algebra se considerata con i bracket di Lie. Rimane da dimostrare $\mathfrak{b}$ è chiuso rispetto all'operazione di bracket:

$$(L_g)_\star[X,Y] = [(L_g)_\star X, (L_g)_\star Y] = [X,Y]$$

[12]Per dimostrare che un campo vettoriale X è left-invariante sarà quindi sufficiente dimostrare che $(L_g)_\star X_h = X_{gh}$ per ogni $g, h \in G$.

La prima identità segue dalla naturalità dei bracket di Lie: per ogni $g, h \in G$, per ogni $X, Y \in \mathfrak{b}$ e comunque scelta $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ segue che

$$\begin{aligned}(L_g)_\star[X,Y]_h f &= (X_h Y_h)(f \circ L_g) - (Y_h X_h)(f \circ L_g)\\ &= X_h((Y_{gh} f) \circ L_g) - Y_h((X_{gh} f) \circ L_g)\\ &= X_{gh} Y_{gh} f - Y_{gh} X_{gh} f\\ &= (L_g)_\star X_h (L_g)_\star Y_h f) - (L_g)_\star Y_h (L_g)_\star X_h f)\\ &= [(L_g)_\star X, (L_g)_\star Y]_h f\end{aligned}$$

Quindi $\mathfrak{b}$ è una sottoalgebra. □

Definizione 4.8 *Sia G gruppo di Lie. L'insieme $\mathfrak{b} = left\mathfrak{X}(G)$ con la struttura di sottoalgebra ereditata da $\mathfrak{X}(G)$ detta* **algebra di Lie del gruppo di Lie** *G; sarà indicata d'ora in poi con $Lie(G)$.*
E' quindi il sottospazio vettoriale dei campi vettoriali su G left-invarianti considerati congiuntamente con i bracket di Lie.

Dalle considerazioni viste sull'isomorfismo fra $Lie(G)$ e T_eG segue che $Lie(G)$ è uno spazio vettoriale avente la stessa dimensione di G.
Correndo il rischio di essere ridondanti, si riassume e si dimostra formalmente quanto detto fin'ora con il seguente

Teorema 4.1 (isomorfismo fra Lie(G) e lo spazio tangente a G) *Sia G gruppo di Lie e sia $\mathfrak{g} = Lie(G)$. Allora la mappa di valutazione*

$$\begin{aligned}\epsilon : \mathfrak{g} &\longrightarrow T_eG\\ X &\longmapsto X_e\end{aligned}$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali, pertanto la dimensione di $\mathfrak{g}$ come spazio vettoriale è pari a quella di G.

Dimostrazione: La tesi si affronta costruendo l'inversa della mappa di valutazione e dimostrando che è ben definita.
Per ogni $v \in T_eG$ e per ogni $g \in G$ si definisce il vettore $X_g = (L_g)_\star v \in T_gG$; l'insieme dei vettori X_g così definito è indicato con X e dimostrando che è un campo vettoriale differenziabile left-invariante si ha che la funzione τ definita come

$$\begin{aligned}\tau : T_eG &\longrightarrow \mathfrak{g}\\ v &\longmapsto X\end{aligned}$$

è ben data ed proprio l'inversa di ϵ. Infatti dato v vettore di T_eG

$$\epsilon(\tau(v)) = \epsilon(X) = X_e = (L_e)_\star(v) = v$$

e viceversa dato X campo vettoriale in $\mathfrak{g}$

$$\tau(\epsilon(X))_g = \tau(X_e)_g = (L_g)_\star(X_e) = X_g$$

Rimane quindi da dimostrare che τ è ben definita:

• **X è campo vettoriale differenziabile:** per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ dove U è aperto di G, X è differenziabile [13] :
$\forall g \in U$

$$\begin{aligned} X_g f &= (L_g)_\star v f \\ &= v(f \circ L_g) \\ &= \gamma'(0)(f \circ L_g) \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ L_g \circ \gamma)(t) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f(g\gamma(t)) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

per γ curva tracciata su G tale che $\gamma(0) = e$ e $\gamma'(0) = v$.
Si osserva che $f(g\gamma(t))$ è la derivata di una composizione di f, γ e del prodotto definito sul gruppo di Lie $(g\gamma(t))$ che è differenziabile.
Cioè $X \in TG$.

• **X è left-invariante:** per definizione di X si ha che comunque scelti $g, h \in G$

$$(L_h)_\star(X_g) = (L_h)_\star((L_g)_\star)v = (L_{hg})_\star v = X_{hg}$$

Quindi $X \in \mathfrak{g}$.
Si verifica facilmente che ϵ e τ sono morfismi, quindi ϵ è un isomorfismo. □

Da questa dimostrazione risulta evidente che l'algebra di Lie di un gruppo di Lie G avrebbe potuto essere definita fin dall'inizio direttamente da T_eG, come fatto ad esempio in [1].

Esempio 4.3 *Si propongno alcuni esempi di algebre di Lie di gruppi di Lie:*

1. *In $(\mathbb{R}^n, +)$ le left-traslazioni sono (in notazione ovviamente additiva)*

$$L_g(x) = x + g \qquad\qquad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

Il push forward in 0 è

$$\begin{tikzcd} T_0\mathbb{R}^n \arrow[r, "(L_g)_\star"] \arrow[d, dashed] & T_g\mathbb{R}^n \arrow[d, dashed] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "L_g"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

[13] Il campo X è differenziabile se e solo Xf è differenziabile comunque scelta f in $\mathcal{C}^\infty$.

Per prima cosa si osserva che $(L_g)_\star$ è un isomorfismo fra gli spazi vettoriali tangenti ad $\mathbb{R}^n$. Inoltre, dato un campo vettoriale su G

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad a_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

si ha che X è left-invariante se e solo se le funzioni differenziabili a_i che definiscono usualmente i coefficienti delle coordinate sono costanti.
Si vede in dettaglio questa piccola proprietà:

$\Rightarrow$) *Sia X left- invariante, allora $\forall g \in \mathbb{R}^n$*

$$(L_g)_\star X = X$$

che significa che

$$(L_g)_\star X_h = X_{g+h} \tag{6}$$

Esaminando separatamente i membri della precedente equazione si ottiene, per una generica $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$(L_g)_\star X_h f = X_h(f \circ L_g) = \sum_{i=1}^{n} a_i(h) \frac{\partial f \circ L_g}{\partial x_i} \Big|_h = \sum_{i=1}^{n} a_i(h) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{g+h}$$

$$X_{g+h} f = \sum_{i=1}^{n} a_i(g+h) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{g+h}$$

Dalla 6 segue quindi

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(h) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{g+h} = \sum_{i=1}^{n} a_i(g+h) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{g+h}$$

Da cui, confrontando gli addendi, risulta

$$a_i(h) = a_i(g+h) \qquad \forall i = 1 \dots n$$

Che equivale ad avere a_i costanti.

$\Leftarrow$) *Viceversa sia*

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

allora

$$(L_g)_\star X_h = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f \circ L_g}{\partial x_i} \Big|_h = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{g+h} = X_{g+h} f$$

che dimostra la tesi.
Coerentemente con quanto affermato si ha che ogni campo vettoriale X left-invariante definito su $\mathbb{R}^n$ è completamente determinato da X_0 avendo infatti funzioni coordinate costanti.
Quindi

$$Lie(\mathbb{R}^n) \cong T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

Inoltre, dato che i bracket di Lie di campi vettoriali a coefficienti costanti sono sempre nulli, $Lie(\mathbb{R}^n)$ è un'algebra di Lie abeliana.

2. *$(\mathcal{S}^1, \cdot)$ in ogni suo punto ha un solo versore tangente.*

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}\\ &= \{(1, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]\}\\ &= \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\}\end{aligned}$$

Sia quindi

$$X = \frac{\partial}{\partial\theta}$$

versore tangente, definito come campo vettoriale su $\mathcal{S}^1$. Le left-transazioni sono definite da

$$\begin{aligned}L_\beta : \mathcal{S}^1 &\longrightarrow \mathcal{S}^1\\ e^{i\eta} &\longmapsto e^{i(\eta+\beta)}\end{aligned}$$

Si verifica che X è left-invariante: sia $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}^1)$

$$(L_\beta)_\star X_\eta f = X_\eta(f \circ L_\beta) = \frac{\partial f \circ L_\beta}{\partial\theta}\Big|_\eta = \frac{\partial f}{\partial\theta}\Big|_{\eta+\beta} = X_{\eta+\beta} f$$

Analogamente all'esempio precedente i campi vettoriali tangenti sono generati da $\frac{\partial}{\partial\theta}$ ed hanno quindi dimensione 1:

$$Lie(\mathcal{S}^1) \cong T_1\mathcal{S}^1 \cong \mathbb{R}$$

ed anche in questo caso i bracket di Lie sono nulli, quindi l'algebra di Lie è abeliana.

3. *Se G ed H sono gruppi di Lie, allora il loro prodotto $G \times H$ è ancora un gruppo di Lie. Inoltre l'algebra di Lie del gruppo prodotto $Lie(G \times H)$ è prodotto delle algebre corrispondenti: $Lie(G) \times Lie(H)$.*
Infatti

$$[(X, X'), (Y, Y')]_{Lie(G\times H)} = ([X, X']_{Lie(G)}, [Y, Y']_{Lie(H)})$$

4. *Il toro ad n buchi $\mathbb{T}^n$ può essere visto come il prodotto di $\mathcal{S}^1$ n volte*

$$\mathbb{T}^n = \{(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots e^{i\theta_n}) \mid \theta_j \in [0, 2\pi]\}$$

e, dal risultato ottenuto nell'esempio precedente

$$Lie(\mathbb{T}^n) \cong Lie(\mathcal{S}^1) \times \cdots \times Lie(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{R}^n$$

Anche in questo caso si tratta di un'algebra di Lie abeliana, generata, come spazio vettoriale da

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial\theta_n}$$

Dagli esempi appena visti si può affermare che

$$Lie(\mathbb{T}^n) \cong Lie(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$$

Questo risultato suggerisce una qualche relazione fra i gruppi di Lie e le rispettive algebre, che sarà approfondita nella prossima sezione.

5 Applicazioni del teorema di Frobenius

Il teorema di Frobenius, visto nella sezione 3 permette di dimostrare un risultato riguardante le relazioni che intercorrono fra i sottogruppi di un gruppo di Lie G e le sottoalgebre di $Lie(G)$, chiamato teorema di corrispondenza di Lie. Vengono inoltre dimostrate tre importanti conseguenze di questo fatto:

1. Per ogni omomorfismo di algebre di Lie di gruppi di Lie esiste un unico omomorfismo dei gruppi di Lie il cui push forward coincide con l'omomorfismo di algebre.

2. Se due gruppi di Lie hanno algbegre di Lie isomorfe allora sono isomorfi.

3. Due gruppi di Lie sono localmente isomorfi se e solo se hanno algebre di Lie isomorfe.

5.1 Teorema di corrispondenza di Lie

Nel teorema di corrispondenza, le distribuzioni diventano uno strumento per costruire un sottogruppo di Lie da una sottoalgebra. Durante la dimostrazione del teorema si userà un risultato[14] richiamato nel seguente

Lemma 5.1 *Sia $F : M \to N$ mappa differenziabile, $H \subseteq N$ varietà integrale della distribuzione involutiva k-dimensionale $\mathcal{D}$ definita su N. Se $F(M) \subseteq H$ allora anche $\widetilde{F} : M \to H$ è differenziabile.*

[14] Proposizione 17.4 pag 361 [3]

Dimostrazione: Sia $p \in M$, $F(p) = q \in H$, $(U, \varphi) = (U; x_1, \dots x_m)$ ed $(V, \psi) = (V; y_1, \dots y_n)$ intorni coordinati di p e q rispettivamente.
Allora F agisce sulle funzioni coordinate come

$$
\begin{aligned}
F|_U \colon U &\longrightarrow V \\
p &\longmapsto F(p) = q \\
(x_1(p), \dots, x_m(p)) &\longmapsto (y_1(q), \dots, y_n(q)) = (F_1(p), \dots, F_n(p))
\end{aligned}
$$

dove $F_i = y_i \circ (F|_U)$.

$$
\begin{tikzcd}
& M \arrow[r, "F"] & N & \\
& U \arrow[r, "F|_U"] \arrow[dl, "x_i"'] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[drr, bend right, "F_i = y_i \circ F|_U"'] & V \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, "y_i"] & \\
\mathbb{R} & \mathbb{R}^m \arrow[l, "\pi_i"] \arrow[r, dashed] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "\pi_i"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

Ma per ipotesi $F(U) \subseteq H$, quindi $F_j(p) = y_j(q)$ sono costanti per j compreso fra $k+1$ ed n a meno di una permutazione degli indici. Considerando allora $\widetilde{V} = V \cap H$ l'intorno in cui le coordinate costanti sono omesse si ha che la funzione

$$
\begin{aligned}
\widetilde{F}|_U \colon U &\longrightarrow V \\
(x_1(p), \dots x_m(p)) &\longmapsto (y_1(q), \dots y_k(q)) = (F_1(p), \dots, F_k(p))
\end{aligned}
$$

è differenziabile. Dato che $\widetilde{F}|_U$ è differenziabile su ogni carta di M, allora

$$\widetilde{F} : M \longrightarrow H$$

è differenziabile. □

Se $i : H \hookrightarrow N$ è la funzione di inclusione, allora quanto affermato nel lemma precedente può essere riassunto dal seguente diagramma

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\widetilde{F}"'] & N \\
& H \arrow[u, dotted, hook, "i"']
\end{tikzcd}
$$

Ora abbiamo sotto mano tutti gli strumenti per enunciare e dimostrare il teorema di corrispondenza di Lie.

Teorema 5.1 (di corrispondenza di Lie) *Sia G gruppo di Lie, $\mathfrak{g} = Lie(G)$, allora esiste una corrispondenza biunivoca fra i sottogruppi connessi di G e le sottoalgebre di $\mathfrak{g}$.*

Dimostrazione: Sia H sottogruppo connesso del gruppo di Lie G, sia $\mathfrak{h} = Lie(H)$:

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} : X_e \in T_e H\}$$

Si considerano due vettori $u, v \in T_e H$ ai quali corrispondono biunivocamente i campi vettoriali left-invarianti X ed Y, cioé $X_e = u$ ed $Y_e = v$ in $\mathfrak{h}$; applicando il bracket di Lie a u e v, dalla naturalità dei bracket segue che

$$[u, v]_g = (L_g)_\star [X, Y] \qquad \forall g \in G$$

ed essendo $[u, v]_g \in \mathfrak{h}$, allora $[X, Y] \in \mathfrak{h}$. Quindi ad ogni sottogruppo connesso H corrisponde naturalmente la sottoalgebra $\mathfrak{h}$

Viceversa sia $\mathfrak{h}$ sottoalgebra di $\mathfrak{g}$, per $\mathfrak{g} = Lie(G)$, allora si deve dimostrare che esiste un unico sottogruppo di Lie H di G, tale che $Lie(H) = \mathfrak{h}$.
Per questo scopo si utilizza una distribuzione integrale $\mathcal{D}$ definita su G da tutti i campi vettoriali left-invarianti generati dai vettori di $\mathfrak{h}$:

$$\mathcal{D} \subset TG \qquad \mathcal{D}_g = \{X_g \in T_g G : X \in \mathfrak{h}\}$$

Si verifica che $\mathcal{D}$ è involutiva, infatti per ogni coppia di vettori $u, v \in T_e G$ che generano univocamente i campi vettoriali left-invarianti X ed Y si ha

$$[u, v]_g = (L_g)_\star [X, Y] = [L_g X, L_g Y] = [X, Y]_g \in \mathcal{D}_g$$

Allora dal teorema di Frobenius presentato nella sezione 3 la distribuzione $\mathcal{D}$ è completamente integrabile e pertanto esiste un'unica varietà integrabile passante per e, indicata con H. Nell'insieme delle varietà integrabili siamo interessati a considerare proprio quella passante per e, che dimostreremo essere proprio il sottogruppo di G cercato.

1. H, per come è stato scelto, contiene e elemento neutro del gruppo di Lie G.

2. Dato che tutti i campi vettoriali in $\mathcal{D}$ sono invarianti per traslazioni, anche H è invariante per traslazioni:

$$L_h(H) = H \qquad \forall h \in H$$

   Non si corre il rischio di applicare la left traslazione L_h ed arrivare ad una varietà integrabile di $\mathcal{D}$ diversa da H [15].

[15] Una dimostrazione più raffinata di questo passaggio può essere sviluppata introducendo il concetto di foliazione, Lee pag. 356 [3].

3. Comunque scelti due elementi $h, h' \in H$ si ha

$$hh' = L_h(h') \in L_h(H) = H$$
$$h^{-1} = h^{-1}e = L_{h^{-1}}(e) \in L_{h^{-1}}(H) = H$$

Pertanto H oltre ad essere varietà differenziabile in quanto varietà integrale di una distribuzione involutiva, è anche sottogruppo di G.
Per dimostrare che è sottogruppo di Lie, rimane ancora da dimostrare che la mappa

$$\begin{aligned} \tilde{a} : H \times H &\longrightarrow H \\ (h, h') &\longmapsto h(h')^{-1} \end{aligned}$$

è differenziabile.
Per otttenere questo risultato si usa il lemma 5.1. Considerato il diagramma:

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "\tilde{a}"'] & G \arrow[d, dotted, dash, "i"'] \\ & H \end{tikzcd}$$

si osserva che a è differenziabile essendo restrizione di $G \times G \to G : (g, g') \mapsto g(g')^{-1}$ che è differenziabile per definizione di gruppo di Lie e che $a(H \times H) \subseteq H$, essendo H sottogruppo. Quindi dal lemma $\tilde{a}$ è differenziabile. $\square$

5.2 Tre conseguenze del teorema di corrispondenza

Corollario 5.2 [16] *Siano G ed H gruppi di Lie connessi e siano $\mathfrak{g} = Lie(G)$ e $\mathfrak{h} = Lie(H)$. Allora per ogni omomorfismo di algebre di Lie*

$$\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$$

esiste un unico omomorfismo di gruppi di Lie

$$\phi : G \longrightarrow H$$

tale che $\phi_\star = \varphi$.

Sorvolando sull'abuso di notazione, il corollario può essere riassunto dal seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\forall\ \varphi"] \arrow[d, dashed] & \mathfrak{h} \arrow[d, dashed] \\ G \arrow[r, "\exists!\ \phi\ :\ \phi_\star = \varphi"] & H \end{tikzcd}$$

[16]Teorema 15.32 pag 396 Lee [3].

Si può osservare che la tesi è ragionevole, dato che per definizione di push forward

$$\phi_\star : T_eG \longrightarrow T_eH$$

è una mappa fra due strutture equivalenti a $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$.

Dimostrazione: La strategia iniziale della dimostrazione si basa sul considerare il gruppo prodotto $G \times H$ e l'algebra prodotto $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$.
Sia $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ l'algebra definita dal grafico di φ:

$$\mathfrak{t} = \{(X, \varphi X) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} : X \in \mathfrak{g}\}$$

1. $\mathfrak{t}$ è sottospazio vettoriale.
2. $\mathfrak{t}$ è una sottoalgebra, dato che φ è un omomorfismo:

$$[(X, \varphi X), (X', \varphi X')] = ([X, X'], [\varphi X, \varphi X']) = ([X, X'], \varphi[X, X']) \in \mathfrak{t}$$

Allora dal teorema di corrispondenza di Lie 5.1 esiste un unico T sottogruppo di $G \times H$ corrispondente all'algebra $\mathfrak{t}$, cioè tale che $\mathfrak{t} = Lie(T)$. Si considerano allora le proiezioni

$$\pi_1 : G \times H \longrightarrow G \qquad \pi_2 : G \times H \longrightarrow H$$

e le restrizioni delle proiezioni al sottogruppo appena ottenuto:

$$\pi_1 \mid_T : T \longrightarrow G \qquad \pi_2 \mid_T : T \longrightarrow H$$

Risulta che $\pi_1 \mid_T$ è un isomorfismo di gruppi di Lie [17].
Allora si costruisce la funzione cercata $\phi : G \to H$ come $\phi = \pi_2 \mid_T \circ (\pi_1 \mid_T)^{-1}$.

$$\underbrace{G \xrightarrow{(\pi_1 \mid_T)^{-1}} T \xrightarrow{\pi_2 \mid_T} H}_{\phi = \pi_2 \mid_T \circ (\pi_1 \mid_T)^{-1}}$$

Equivalentemente $\pi_2 \mid_T = \phi \circ \pi_1 \mid_T$.

• Si dimostra che la funzione costruita ϕ è proprio la funzione cercata:
considerate le proiezioni sul primo e sul secondo fattore delle algebre di Lie

$$\tau_1 : \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g} \qquad \tau_2 : \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}$$

e le rispettive restrizioni.

$$\tau_1 \mid_{\mathfrak{t}} : \mathfrak{t} \longrightarrow \mathfrak{g} \qquad \tau_2 \mid_{\mathfrak{t}} : \mathfrak{t} \longrightarrow \mathfrak{h}$$

[17] Questo risultato può essere verificato utilizzando la teoria dei rivestimenti: Lee [3] pag. 396. Non si riporta la dimostrazione in questa ricerca.

Si osserva che il push forward di $\pi_2 \mid_T$ è dato da

$$(\pi_2 \mid_T)_\star = (\phi \circ \pi_1 \mid_T)_\star = \phi_\star \circ (\pi_1 \mid_T)_\star$$

e dato che $(\pi_1 \mid_T)_\star = (\tau_1 \mid_\mathfrak{t})_\star$ ed $(\pi_2 \mid_T)_\star = (\tau_2 \mid_\mathfrak{t})_\star$:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\pi_1 \mid_T"] \arrow[dr, dashed, "\pi_2 \mid_T"'] & G \arrow[d, "\phi"] \\ & H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{t} \arrow[r, "\tau_1 \mid_\mathfrak{t}"] \arrow[dr, dashed, "\tau_2 \mid_\mathfrak{t}"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\phi_\star"] \\ & \mathfrak{h} \end{tikzcd}$$

si ottiene

$$\tau_2 \mid_\mathfrak{t} = \phi_\star \circ \tau_1 \mid_\mathfrak{t}$$

Per ogni campo vettoriale $X \in \mathfrak{g}$ segue che

$$\begin{aligned} \varphi X &= \tau_2 \mid_\mathfrak{t} (X, \varphi X) \\ &= \phi_\star \circ \tau_1 \mid_\mathfrak{t} (X, \varphi X) \\ &= \phi_\star X \end{aligned}$$

L'unicità di ϕ è conseguenza dell'unicità di T. $\square$

Corollario 5.3 *Siano G ed H due gruppi di Lie. Se $Lie(G)$ è isomorfa a $Lie(H)$ allora G è isomorfo ad H.*

Dimostrazione: Si indicano con $\mathfrak{g} = Lie(G)$ e $\mathfrak{h} = Lie(H)$. Sia $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ isomorfismo di algebre di Lie.
Dal corollario 5.2 precedente esistono e sono univocamente determinate i morfismi ϕ e ψ tali che $(\phi)_\star = \varphi$ ed $(\psi)_\star = \varphi^{-1}$:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dashed] & \mathfrak{h} \arrow[d, dashed] \\ G \arrow[r, "\phi"] & H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{h} \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, dashed] & \mathfrak{g} \arrow[d, dashed] \\ H \arrow[r, "\psi"] & G \end{tikzcd}$$

Dal momento che $(\phi \circ \psi)_\star = (\phi)_\star \circ (\psi)_\star = Id_\mathfrak{g}$ ed $(\psi \circ \phi)_\star = (\psi)_\star \circ (\phi)_\star = Id_\mathfrak{h}$ allora, dall'unicità di ϕ e ψ e del push forward, si ha che $\phi \circ \psi = Id_G$ ed $\psi \circ \phi = Id_H$ $\square$

Il seguente corollario prende il nome di **teorema di Lie** e stabilisce formalmente quello che si era potuto solo intuire nell'esempio 4.3.

Corollario 5.4 *Due gruppi di Lie sono localmente isomorfi se e solo se hanno algebre di Lie isomorfe.*

Dimostrazione: Siano G ed H due gruppi di Lie e $\mathfrak{g} = Lie(G)$ ed $\mathfrak{h} = Lie(H)$ le loro rispettive algebre di Lie. Si considera il gruppo di Lie definito da $G \times H$ la cui algebra di lie è data da $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$. G ed H sono sottogruppi di $G \times H$ e $\mathfrak{g}$ ed $\mathfrak{h}$ sono sottoalgebre di $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$. Allora dal teorema di corrispondenza di Lie 5.1 esistono

$$\sigma_g : G \longrightarrow \mathfrak{g} \qquad\qquad \sigma_h : H \longrightarrow \mathfrak{h}$$

biiezioni, come si riassume nel seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rrr, "\sigma_g"] & & & \mathfrak{g} \\
& G \times H \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[dl, "\pi_2"'] \arrow[r, dashed, "Lie()"] & \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \arrow[ur, "\tau_1"] \arrow[dr, "\tau_2"'] & \\
H \arrow[rrr, "\sigma_h"] & & & \mathfrak{h}
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$) Se per ipotesi esiste φ isomorfismo locale [18] di gruppi fra G ed H, allora si completa il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rrr, "\sigma_g"] \arrow[dd, "\varphi"'] & & & \mathfrak{g} \\
& G \times H \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[dl, "\pi_2"'] \arrow[r, dashed, "Lie()"] & \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \arrow[ur, "\tau_1"] \arrow[dr, "\tau_2"'] & \\
H \arrow[rrr, "\sigma_h"] & & & \mathfrak{h}
\end{tikzcd}$$

e l'isomorfismo di algebre cercato è $\sigma_h \circ \varphi \circ \sigma_g^{-1}$.

$\Leftarrow$) Il viceversa segue direttamente dal corollario 5.3 precedente, oppure osservando che il diagramma viene completato dall'altro lato da un isomorfismo ϕ fra le due algebre

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rrr, "\sigma_g"] & & & \mathfrak{g} \arrow[dd, "\phi"] \\
& G \times H \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[dl, "\pi_2"'] \arrow[r, dashed, "Lie()"] & \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \arrow[ur, "\tau_1"] \arrow[dr, "\tau_2"'] & \\
H \arrow[rrr, "\sigma_h"] & & & \mathfrak{h}
\end{tikzcd}$$

e quindi l'isomorfismo di gruppi cercato è $\sigma_h^{-1} \circ \phi \circ \sigma_g$. $\square$

[18] Il fatto che l'isomorfismo fra gruppi sia locale non pone restrizioni: se l'isomorfismo locale non fosse definito sull'intorno di e ma sull'intorno di un generico punto q, la tesi varrebbe comunque in virtù della left-invarianza: $T_qG = T_eG$.

Riferimenti bibliografici

[1] H. Abbaspour, M. Moskovitz, *Basic Lie Theory*, Online.

[2] Alexander Kirillow Jr, *Introduction to Lie groups and Lie algebras*, Online.

[3] John M. Lee *Introduction to Manifold*, University of Washington 2000.

[4] Shigeyuki Morita, *Geometry of Differential Forms*, AMS, Volume 201.

[5] Frank W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Group*, Springer Verlag.