

• Numero 21 – Gennaio 2014 •



Landscape in Yehliu Geo-Park by Carrie Kellenberger  
<https://www.flickr.com/photos/globetrotteri/2579155581/>

## Come proporre un contributo

### *Istruzioni per gli autori*

La rivista pubblica articoli, interviste, buone pratiche e giochi relativamente alla matematica e alle sue applicazioni.

Lo stile, la terminologia e le idee espresse devono essere chiari e accessibili a tutti.

Gli articoli saranno valutati da uno o più collaboratori esperti in materia. La redazione si riserva, dopo ponderato esame, la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore.

È possibile che la redazione subordini la pubblicazione dell'articolo a modifiche anche sostanziali che devono essere fatte dall'autore. I contributi devono essere inviati in forma elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato .doc, .docx, .rtf, .odt o formati analoghi. Le formule possono essere in Microsoft Equation Editor, MathType, Open office math o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati e inviati in file a parte. Di ogni elemento non testuale deve essere indicata la posizione precisa all'interno del testo. Se le immagini utilizzate sono protette da diritti d'autore, sarà cura dell'autore dell'articolo ottenere le autorizzazioni necessarie.

Nella prima pagina andranno indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale e istituzione o ambiente professionale di appartenenza, indirizzo e-mail.

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (5-10 righe) preferibilmente in italiano e in inglese, e dovrà terminare con una bibliografia.

I riferimenti bibliografici devono essere indicati all'interno del testo nel seguente modo: [3] oppure [Ba], se si deve indicare la pagina usare [Ba, p.15].

Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia.

I contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

La redazione non garantisce la correttezza scientifica del contenuto degli articoli. Gli autori sono responsabili del contenuto dei testi inviati per la pubblicazione.

Se l'articolo è stato pubblicato in altra sede l'autore deve richiederne l'autorizzazione a chi ha pubblicato per primo l'articolo e fornire le coordinate alla redazione.

I testi pubblicati in questa rivista, se non diversamente indicato, sono soggetti a licenza Creative Commons Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate 3.0: la riproduzione, distribuzione e divulgazione dei testi sono consentite a condizione che vengano citati i nomi degli autori e della rivista Matematicamente.it Magazine; l'uso commerciale e le opere derivate non sono consentiti.

### MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

*Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito*  
www.matematicamente.it

Registrazione del 19.12.2006 al n.953 del Tribunale di Lecce  
ISSN 2035-0449

#### *Direttore responsabile*

Antonio Bernardo  
antoniobernardo@matematicamente.it

#### *Vicedirettore*

Luca Lussardi  
lucalussardi@matematicamente.it

#### *Redazione*

Flavio Cimolin  
flaviocimolin@matematicamente.it  
Diego Alberto - Luca Barletta - Michele Mazzucato - Nicola Chiriano

#### *Hanno collaborato a questo numero*

Luigi Boscaino, Francesco Daddi, Michele T. Mazzucato, Nicola De Nitti, Enrico Maranzana, Raffaella Gigante, Sebastiano Ferraris.

# Sommario

|   |    |
|---|----|
| <b>194.</b> Una semplice relazione tra i coefficienti di un'equazione . . . . .                             | 5  |
| Luigi Boscaïno  |    |
| <b>195.</b> La spirale aurea e l'algebra lineare . . . . .  | 9  |
| Francesco Daddi   |    |
| <b>196.</b> Programmare giochi in 3D . . . . .  | 15 |
| Rosa Marincola  |    |
| <b>197.</b> Coordinate geografiche e cartesiane. Un metodo di trasformazione . . . . .                      | 28 |
| Michele T. Mazzucato  |    |
| <b>198.</b> An Introduction to Game Theory and its Applications . . . . .                                   | 31 |
| Nicola De Nitti   |    |
| <b>199.</b> La progettazione educativa fa fiorire la matematica . . . . .                                   | 39 |
| Enrico Maranzana  |    |
| <b>200.</b> Dal Paradosso di Achille e la tartaruga alle serie numeriche: un intervento didattico . . . . . | 45 |
| Raffaella Gigante   |    |
| <b>201.</b> Una breve presentazione del teorema di Frobenius ed alcune applicazioni . . . . .               | 56 |
| Sebastiano Ferraris   |    |
| <b>202.</b> Lo scaffale dei libri . . . . .   | 90 |



# 194. Una semplice relazione tra i coefficienti di un'equazione

di Luigi Boscaino

Un problema che ricorre nell'esercizio della professione docente è senza dubbio quello delle verifiche in itinere. La divisione trimestrale dell'anno scolastico spesso mette in ansia discenti e docenti nel disperato tentativo di giungere a una valutazione oggettiva. In queste fasi concitate si avvicinano alla lavagna gli studenti dell'ultima ora, che raramente si ha il piacere di coinvolgere nel corso del trimestre.

La prassi prevede un intenso periodo di verifiche con domande che finiscono col somigliarsi sempre di più. I vecchi libri di testo, nei vaghi ricordi che ho da studente, fornivano un prezioso supporto alle esercitazioni in classe. I testi moderni, sebbene di ottima fattura, investono meno risorse in tecnicismi e nel calcolo che spesso è considerato fine a se stesso. Vista dunque la pochezza di esercizi presenti nelle pagine del testo, procedo in modo estemporaneo inventando di volta in volta le disequazioni da sottoporre agli studenti. Nella risoluzione delle disequazioni algebriche di grado non superiore al quinto chiedo spesso agli studenti di rappresentare nel piano cartesiano le curve coerenti con l'algebra loro assegnata. Per fare ciò è opportuno sottoporre alla loro attenzione polinomi aventi zeri razionali o comunque reali, tali da fornire più riferimenti per la rappresentazione della curva. Risolta la disequazione chiedo agli alunni di verificare, con l'ausilio di Wolfram Alpha, la coerenza della rappresentazione della curva e degli intervalli reali che soddisfano la disequazione. In uno di questi frangenti, stanco di far quadrare i conti (per quadratura dei conti intendo la dettatura di disequazioni di grado  $n$  con  $n$  radici reali, anzi, meglio se razionali), ho cominciato a fantasticare. Seguendo i dettami del pensiero divergente, soprattutto perché sopraffatto dalla stanchezza, ho osservato le strutture polinomiali con la superficialità di un profano, apprezzando l'estetica delle forme algebriche piuttosto che il contenuto, privilegiando l'aspetto puramente creativo a fronte di una ragionata valutazione matematica. Così, in una classe terza, trattando le disequazioni algebriche di grado superiore al secondo, ho rimuginato su metodi o processi che potessero sostituire il calcolo mentale del discriminante e condurre più rapidamente all'individuazione di disequazioni con radici razionali. Ho dettato, alla studentessa di turno, una disequazione di quarto grado composta da due fattori di secondo grado in forma trinomia. Osservando entrambi i trinomi, o meglio i coefficienti di ognuno, mi sono accorto che la somma dei due estremi ( $a$ ,  $c$ ) corrispondeva al valore del coefficiente intermedio (coefficiente del termine di primo grado  $b$ ) nel primo trinomio, e che la stessa coincidenza si verificava anche nel secondo trinomio. Per non spezzare il ritmo serrato delle verifiche ho solo costruito, con successo misto a malriposta meraviglia, altre disequazioni con lo stesso algoritmo.

Tornato a casa non ho esitato nel prendere carta e penna. Seguendo un modello algebrico deduttivo e non più empirico ho constatato la veridicità della congettura formulata in classe. La strada seguita è stata praticamente dettata dagli eventi. Sono partito dal trinomio di secondo grado e ho sviluppato, mediante sostituzioni, la procedura risolutiva delle equazioni in forma completa. Purtroppo è proprio questo approccio entusiastico che la matematica, con profondo sadismo, condanna e punisce. Giacché vorrei che si apprezzasse appieno il susseguirsi cronologico degli eventi, faccio una premessa riguardo al metodo risolutivo delle equazioni di secondo grado.

La forma trinomia o completa di un'equazione di secondo si presenta generalmente come segue:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

In essa sono presenti tre coefficienti genericamente indicati con  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Tale equazione, come molti lettori ricorderanno, si può risolvere grazie all'applicazione della formula risolutiva. Quest'ultima è il risultato di alcuni passaggi algebrici fatti sull'equazione di partenza. Moltiplicando ambo i membri dell'equazione di secondo grado per  $4a$ , nel rispetto del secondo principio di equivalenza, si ottiene

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

A questo punto trasferiamo  $4ac$  al secondo membro della nostra relazione

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Successivamente, sfruttando il primo principio, si aggiunge  $b^2$  ad ambo i membri al fine di ottenere al primo membro un trinomio come quadrato di binomio,

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Riportiamo il trinomio al primo membro nella sua forma scomposta

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

e risolviamo, rispetto al quadrato di binomio, per abbassare di grado la  $x$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Da qui, trasportiamo il termine noto  $b$  al secondo membro al fine di isolare il termine in  $x$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

infine dividiamo per  $2a$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ed ecco, in pochi passaggi, la formula risolutiva delle equazioni trinomie di secondo grado. In essa desta particolare interesse la quantità sotto radice quadrata. Altrimenti contrassegnata con la lettera greca  $\Delta$  (*delta*), la quantità  $b^2 - 4ac$ , è detta discriminante in quanto assolve al prezioso compito di distinguere fra tre classi di soluzioni possibili. Infatti, appare evidente che il discriminante si presenta sotto una radice ad indice pari e quindi, come tutti sanno, esiste nel campo dei numeri reali solo se assume valore numerico positivo o nullo. Infatti, se il delta assume valore negativo risulta compromesso il calcolo della radice quadrata e si dice che l'equazione non ammette soluzioni reali. Schematizzando:

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\Rightarrow \text{due soluzioni reali e distinte} \Rightarrow x_1, x_2 \in R: x_1 \neq x_2 \\ \Delta = 0 &\Rightarrow \text{due soluzioni reali e coincidenti} \Rightarrow x_1, x_2 \in R: x_1 = x_2 \\ \Delta < 0 &\Rightarrow \text{nessuna soluzione reale} \Rightarrow \nexists x \in R \end{aligned}$$

Dopo questa breve premessa introduciamo, come già annunciato, l'elemento di novità finalizzato a costruire **equazioni con due soluzioni razionali e distinte**. Pertanto procediamo con la ricostruzione matematica della relazione tra coefficienti e discriminante delle equazioni di secondo grado.

RELAZIONE:

Data l'equazione di secondo grado in forma trinomia:

Se si verifica che  $a + c = \pm b$  allora  $b^2 - 4ac = (a - c)^2$  da cui deriva:  $x_1 = \pm 1; x_2 = \pm \frac{c}{a}$ .

Dimostrazione:

Sulla base delle ipotesi formulate ( $a + c = \pm b$ ) è possibile operare opportune sostituzioni nel discriminante. Infatti, giacché

$$b^2 = (a + c)^2$$

il delta, dopo aver effettuato la sostituzione, avrà come forma equivalente  $(a + c)^2 - 4ac$ , pertanto

$$b^2 - 4ac = (a + c)^2 - 4ac$$

da qui, sviluppando il quadrato del binomio presente al secondo membro

$$b^2 - 4ac = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac,$$

sommando i monomi simili  $2ac - 4ac$ , presenti al secondo membro, si ha

$$b^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2$$

Infine, dato che il trinomio ottenuto al secondo membro, esprime il quadrato di un binomio si può scrivere

$$b^2 - 4ac = (a - c)^2$$

che soddisfa quanto dichiarato nella relazione iniziale. Dunque, sulla base di questo asserto, la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado diventa:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm |a - c|}{2a}$$

Sostituendo ancora alla lettera  $b$  il valore equivalente  $\pm(a + c)$  si ha  $x_{1,2} = \frac{\mp(a+c) \pm |a-c|}{2a}$  da cui

$$x_1 = \pm \frac{2a}{2a}; \text{ e } x_2 = \pm \frac{2c}{2a}$$

ovvero

$$x_1 = \pm 1; \text{ e } x_2 = \pm \frac{c}{a}$$

Il segno della soluzione unitaria è positivo se i primi due coefficienti (a, b) sono discordi, negativo in caso contrario. Per quanto concerne la seconda radice si confrontano i segni del secondo e terzo coefficiente (b, c). Se essi hanno segni concordi  $x_2$  assume valore negativo, sarà positivo in caso contrario (regola di Cartesio).

N.B. il valore assoluto del binomio “a-c” ricopre un ruolo formale in quanto risultante dall'estrazione di radice, tuttavia non cambia la sostanza delle soluzioni.

Vediamo degli esempi:

- $9x^2 + 13x + 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm |9 - 4|}{18}$$

$$x_1 = -1; x_2 = -\frac{4}{9}$$

- $\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{10}x + \frac{1}{5} = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{7}{10} \pm \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right|}{\frac{2}{2}}$$

$$x_1 = -1; x_2 = -\frac{2}{5}$$

- $171x^2 - 100x - 71 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{100 \pm |171 + 71|}{342}$$

$$x_1 = 1; x_2 = -\frac{71}{171}$$

A questo punto il cerchio sembra chiudersi e ad eccezione di chi ha già compreso la semplicità che si nasconde dietro alla relazione da cui tutto il processo ha avuto origine, altri hanno apprezzato, come d'altronde è accaduto nel mio caso, la precedente dimostrazione che appare di indubbia efficacia e attendibilità. Ebbene, qualche giorno dopo aver concepito il lavoro che avete letto sinora, ho fatto altre riflessioni. Mi sono messo a pensare: se la somma algebrica dei due coefficienti estremi è uguale a più o meno il coefficiente del termine di primo grado, vale a dire  $a + c = \pm b$ , allora l'equazione trinomia  $ax^2 + bx + c = 0$ , potrà essere anche rappresentata nel modo seguente:

$$ax^2 \mp (a + c)x + c = 0$$

Da cui, moltiplicando si ha

$$ax^2 \mp ax \mp cx + c = 0$$

A questo punto applichiamo la semplice regola del raccoglimento a fattor comune per parti e il gioco è fatto.

$$ax(x \mp 1) \mp c(x \mp 1) = 0$$

$$(ax \mp c)(x \mp 1) = 0$$

Applicando la legge di annullamento del prodotto si ottengono le due soluzioni

$$x_1 = \pm 1; \text{ e } x_2 = \pm \frac{c}{a}$$

Vediamo uno degli esempi precedenti:

- $9x^2 + 13x + 4 = 0$

$$9x^2 + (9 + 4)x + 4 = 0$$

$$9x^2 + 9x + 4x + 4 = 0$$

$$9x(x + 1) + 4(x + 1) = 0$$

$$(9x + 4)(x + 1) = 0 \quad \begin{array}{l} 9x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{9} \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{array}$$

... più facile di così?

Inoltre, indicato con P il polinomio di secondo grado e sapendo che una delle soluzioni è uguale a 1 o a -1, vale il teorema del resto per cui risulta  $P(1)=0$  o  $P(-1)=0$ . Da ciò la possibilità di scomporre mediante regola di Ruffini.

**Conclusione:** quando pensi di aver fatto, grazie a una fortuita coincidenza, una piccola scoperta e indaghi sui possibili percorsi per dimostrarne la veridicità ti capita di ignorare l'evidenza andando all'ostinata ricerca di strade tortuose atte a valorizzare, in apparenza, gli sforzi da te realizzati. Ma la matematica, grazie a Dio, ci riporta con i piedi per terra, obbligandoci a un salutare bagno d'umiltà.

## 195. La spirale aurea e l'algebra lineare

Francesco Daddi  
Liceo Scientifico "XXV Aprile" Pontedera

È molto interessante scoprire le inaspettate applicazioni dell'algebra lineare alle più diverse branche della matematica. Ad esempio si veda [1] dove si trova una formula chiusa per la successione di Padovan. Nel presente articolo si mostra come l'algebra lineare porti all'equazione di spirali auree; infine viene proposto un approccio alternativo, utilizzando i numeri complessi.

Indicata con  $\phi$  la sezione aurea  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , ricordiamo che una **spirale aurea** è una particolare *spirale logaritmica* (si veda [2]) che ammette, in un opportuno sistema di riferimento polare, un'equazione del tipo  $\rho = \rho_0 \phi^{-\frac{2}{\pi}\theta}$ . Ad ogni variazione di un angolo di ampiezza  $\pi/2$  in senso antiorario la distanza dal polo si ottiene da quella precedente mediante la moltiplicazione per il fattore  $1/\phi$ ; in un sistema di riferimento cartesiano una spirale aurea, in generale, ha equazioni parametriche della forma

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\phi^t} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \beta\right) + x_0 \\ y = \frac{a}{\phi^t} \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \beta\right) + y_0 \end{cases} \quad \text{con } t \text{ parametro reale} \quad (1)$$

dove  $(x_0, y_0)$  è il *centro* della spirale a cui la curva tende per  $t \rightarrow +\infty$ .

Consideriamo il rettangolo aureo  $R_0$  di vertici

$$R_0 : \{A_0 = (0, 0), B_0 = (\phi, 0), C_0 = (\phi, 1), D_0 = (0, 1)\}$$

e determiniamo le equazioni della similitudine diretta  $S$  che lo trasforma nel rettangolo (ancora aureo) di vertici rispettivamente

$$R_1 : \{A_1 = B_0 = (\phi, 0), B_1 = C_0 = (\phi, 1), C_1 = (1, 1), D_1 = (1, 0)\};$$

con semplici calcoli si trova

$$S : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\phi} \\ \frac{1}{\phi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'unico punto fisso della trasformazione  $S$  è

$$\Omega = \left( \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}, \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right),$$

che si può determinare anche intersecando i segmenti  $A_0C_0$  e  $A_1C_1$ .

Se applichiamo la trasformazione  $S$  al rettangolo  $R_1$ , ovvero se applichiamo  $S^2$  al rettangolo  $R_0$ , si ottiene il rettangolo (si ricordi che  $\phi^n = F_n \phi + F_{n-1}$  dove  $F_k$  è il  $k$ -esimo numero della successione di Fibonacci)

$$R_2 : \left\{ A_2 = B_1, B_2 = C_1, C_2 = \left( 1, \frac{1}{\phi} \right), D_2 = \left( \phi, \frac{1}{\phi} \right) \right\}$$

e successivamente, applicando di nuovo  $S$  al rettangolo  $R_2$  (ovvero applicando  $S^3$  al rettangolo  $R_0$ ), si ricava

$$R_3 : \left\{ A_3 = B_2, B_3 = C_2, C_3 = \left( \frac{2}{\phi}, \frac{1}{\phi} \right), D_3 = \left( \frac{2}{\phi}, 1 \right) \right\};$$

analogamente si ottengono i rettangoli

$$R_4 : \left\{ A_4 = B_3, B_4 = C_3, C_4 = \left( \frac{2}{\phi}, \frac{2}{\phi^2} \right), D_4 = \left( 1, \frac{2}{\phi^2} \right) \right\},$$

$$R_5 : \left\{ A_5 = B_4, B_5 = C_4, C_5 = \left( \frac{3}{\phi^2}, \frac{2}{\phi^2} \right), D_5 = \left( \frac{3}{\phi^2}, \frac{1}{\phi} \right) \right\} \text{ e così via...}$$

La successione dei rettangoli  $R_i$  è descritta nella figura seguente:

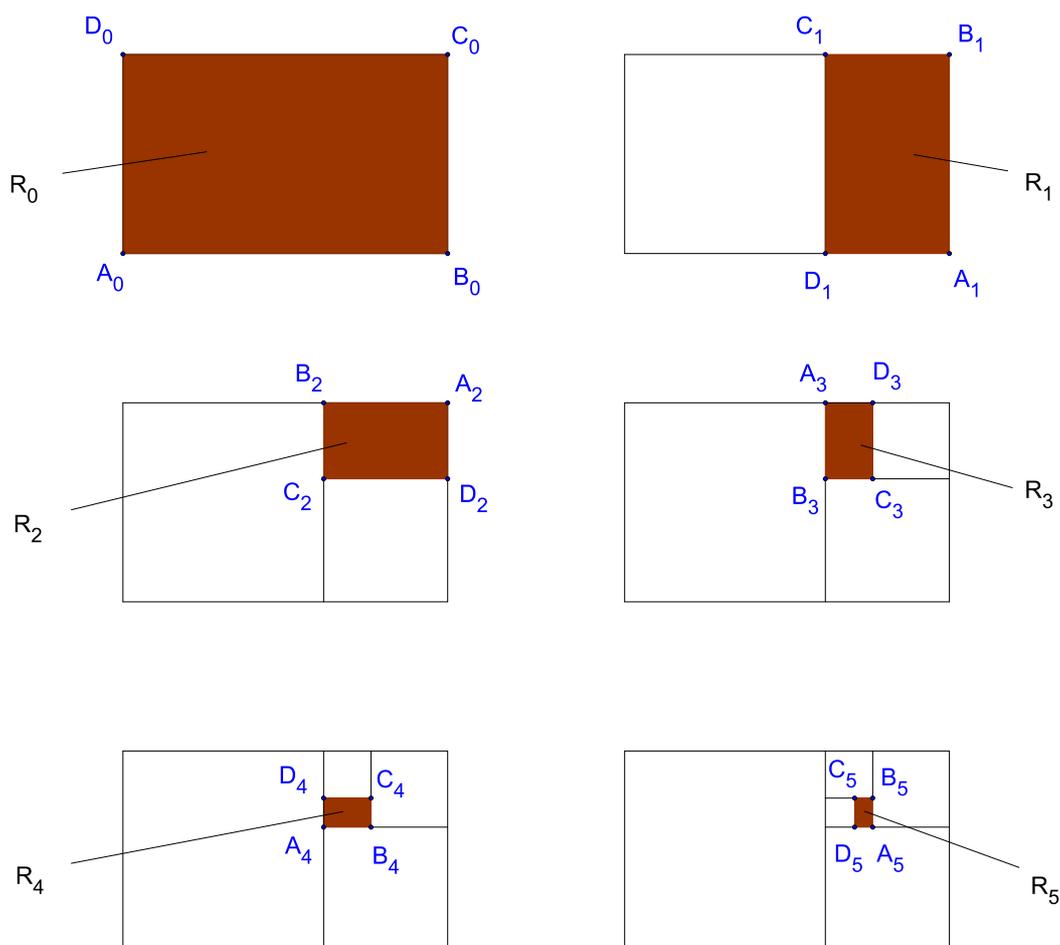


Figura 1: Successione dei rettangoli aurei.

Riscrivendo le equazioni della trasformazione  $S$  nella forma ( $\Omega$  è punto fisso di  $S$ )

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\phi} \\ \frac{1}{\phi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_\Omega \\ y - y_\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix},$$

le coordinate dell'immagine  $A_k$  del punto  $A_0 = (0, 0)$  mediante la trasformazione  $S^k$  sono

$$\begin{pmatrix} x_{A_k} \\ y_{A_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\phi} \\ \frac{1}{\phi} & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 0 - x_\Omega \\ 0 - y_\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$$

mentre per le coordinate di  $D_k$ , immagine di  $D_0$  mediante la trasformazione  $S^k$ , si ha

$$\begin{pmatrix} x_{D_k} \\ y_{D_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\phi} \\ \frac{1}{\phi} & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 0 - x_\Omega \\ 1 - y_\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}.$$

Per determinare in modo semplice la generica potenza  $k$ -esima della matrice è sufficiente osservare che

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\phi} \\ \frac{1}{\phi} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\phi} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \quad \text{da cui} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\phi} \\ \frac{1}{\phi} & 0 \end{pmatrix}^k = \frac{1}{\phi^k} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) \end{pmatrix}.$$

Considerando  $k$  reale (*nessuno infatti ci vieta di estendere il dominio di  $k$* ), la curva alla quale appartengono i punti  $A_k$  ha equazioni parametriche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\phi^k} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ -\frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ \frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\phi^k} \cdot \left[ -\frac{5+3\sqrt{5}}{10} \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + \frac{5+\sqrt{5}}{10} \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right] + \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ y = \frac{1}{\phi^k} \cdot \left[ -\frac{5+3\sqrt{5}}{10} \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) - \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right] + \frac{5+\sqrt{5}}{10}. \end{cases} \quad (2)$$

Scegliendo  $\beta$  tale che  $\cos \beta = -\frac{x_\Omega}{\sqrt{x_\Omega^2 + y_\Omega^2}}$ ,  $\sin \beta = -\frac{y_\Omega}{\sqrt{x_\Omega^2 + y_\Omega^2}}$  e tenendo conto delle formule trigonometriche di addizione, le equazioni (2) diventano

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{x_{\Omega}^2 + y_{\Omega}^2}}{\phi^k} \cos\left(\frac{\pi}{2}k + \beta\right) + x_{\Omega} \\ y = \frac{\sqrt{x_{\Omega}^2 + y_{\Omega}^2}}{\phi^k} \sin\left(\frac{\pi}{2}k + \beta\right) + y_{\Omega}; \end{cases}$$

dal confronto con le equazioni (1) si deduce che la curva (2) è pertanto una *spirale aurea avente centro nel punto*  $\Omega$  (detto “occhio di Dio” da Clifford A. Pickover); nella figura 2 questa spirale è la curva tratteggiata.

Allo stesso modo si trova che la curva che passa per tutti i punti  $D_k$  ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\phi^k} \cdot \left[ -\frac{5+3\sqrt{5}}{10} \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) - \frac{5-\sqrt{5}}{10} \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right] + \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ y = \frac{1}{\phi^k} \cdot \left[ -\frac{5+3\sqrt{5}}{10} \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right] + \frac{5+\sqrt{5}}{10}; \end{cases} \quad (3)$$

anch'essa è una spirale aurea di centro  $\Omega$ ; nella figura 2 questa spirale è la curva a tratto continuo.

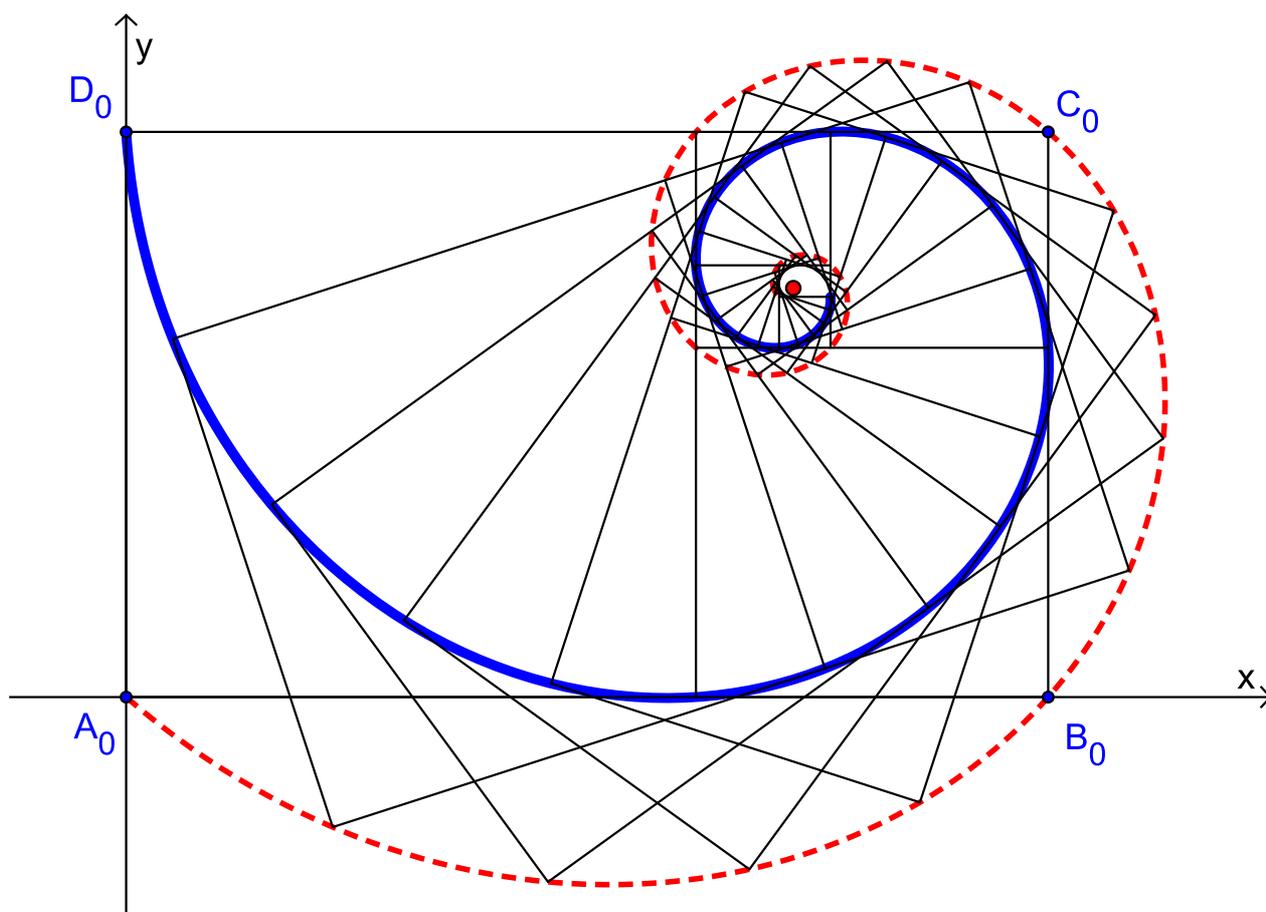


Figura 2: Sono disegnati tutti i rettangoli immagini del rettangolo iniziale  $R_0$  fino a  $k = 6$ , con passo  $\Delta k = 0,2$ . Le due spirali sono state disegnate per  $0 \leq k \leq 6$ .

In alternativa all'uso delle matrici è possibile utilizzare i numeri complessi; ricordiamo che, in generale, una generica similitudine diretta di equazioni

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{pmatrix}$$

può essere riscritta, utilizzando i numeri complessi, nel modo seguente:

$$x' + iy' = (a + ib)(x + iy) + \tau_x + i\tau_y.$$

Nel nostro caso particolare la trasformazione  $S$  ha equazione

$$z' = \frac{i}{\phi} \cdot (z - z_\Omega) + z_\Omega$$

dove  $z_\Omega = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} + i \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$ .

Calcolando le immagini di  $z_{A_0} = 0 + 0i$  mediante  $S^k$  si ha

$$z_{A_k} = \frac{i^k}{\phi^k} \cdot (z_{A_0} - z_\Omega) + z_\Omega \Rightarrow$$

$$z_{A_k} = \frac{i^k}{\phi^k} \cdot \left( -\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} - i \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right) + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} + i \frac{5 + \sqrt{5}}{10};$$

sfruttando la formula di De Moivre risulta  $i^k = \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)$ , quindi

$$z_{A_k} = \frac{1}{\phi^k} \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right) \cdot \left( -\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} - i \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right) + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} + i \frac{5 + \sqrt{5}}{10};$$

svolvendo i calcoli si ricava

$$z_{A_k} = \frac{1}{\phi^k} \cdot \left[ -\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right] + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} +$$

$$+ i \left\{ \frac{1}{\phi^k} \left[ -\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) - \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right] + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right\}$$

ritrovando così le equazioni (2).

Allo stesso modo si ricavano le immagini di  $z_{D_0} = 0 + i$  mediante  $S^k$ :

$$z_{D_k} = \frac{i^k}{\phi^k} \cdot (z_{D_0} - z_\Omega) + z_\Omega \Rightarrow$$

$$z_{D_k} = \frac{i^k}{\phi^k} \cdot \left( i - \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} - i \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right) + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} + i \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \Rightarrow$$

$$z_{D_k} = \frac{1}{\phi^k} \cdot \left[ -\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) - \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right] + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} +$$

$$+ i \left\{ \frac{1}{\phi^k} \left[ -\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right] + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right\}$$

ritrovando così le equazioni (3).

## Bibliografia e Sitografia

- [1] F. Daddi, *Una formula chiusa per i numeri di Padovan*, Archimede, 4/2011, pp. 203-207.
- [2] M. J. Vygodskij, *Manuale di matematica superiore*, Edizioni MIR, Mosca, 1978.
- [3] [http://en.wikipedia.org/wiki/Golden\\_spiral](http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_spiral)

# 196. Programmare giochi in 3D

Rosa Marincola  
rosamarincola@virgilio.it

## Premessa

In questo contributo presenterò delle attività realizzate nel mondo virtuale 3D Edmondo con la classe III A Sistemi Informativi Aziendali dell'I.I.S. "A. Guarasci" sez. Tecnico Economico di Rogliano (Cs) nell'ambito della sperimentazione d'informatica sulla land Scriptlandia [1, 2].

Si tratta di alcuni giochi classici di cui sono stati studiati gli algoritmi risolutivi e di cui è stata fatta la codifica in LSL (Linden Scripting Language), il linguaggio di programmazione simile a C, C#, Java, utilizzato nei mondi virtuali.

Il percorso didattico si colloca nell'ambito della Teoria dei Giochi di cui sono stati trattati alcuni elementi durante le ore curricolari d'informatica, con collegamenti interdisciplinari in economia aziendale e matematica.

La moderna teoria dei giochi può essere fatta coincidere con l'uscita del libro "Theory of Games and Economic Behavior" di John von Neumann e Oskar Morgenstern nel 1944 e questa disciplina rappresenta un buon modello per descrivere le interazioni strategiche tra agenti economici.

Molti risultati economici coinvolgono l'interazione strategica come ad esempio l'andamento di mercati non perfettamente competitivi, l'andamento nelle aste, l'andamento nelle negoziazioni economiche. La teoria dei giochi [3] ha applicazioni nel campo strategico-militare, nella politica, nella sociologia, nella psicologia, nell'informatica, nella biologia, nello sport. Lo studio e la costruzione di giochi si rivela un'attività didattica significativa e motivante per gli studenti.

Di seguito saranno presentati un gioco di strategia e due giochi di sorte.



Figura 1:Foto su Scriptlandia con nuove costruzioni tra cui il paraboloide iperbolico.

## Il gioco dell'undici

Caratteristiche [4]:

1. Il gioco è condotto da due giocatori che eseguono alternativamente una mossa (la mossa è obbligatoria) e ne conoscono le regole.
2. Il gioco termina con esattamente uno di due possibili risultati: o vince chi gioca per primo, o vince l'avversario, ma esiste una strategia vincente per il giocatore che gioca per primo.
3. Ogni mossa consiste in una scelta da parte del giocatore di una mossa tra un insieme di

mosse possibili.

4. Ad ogni istante del gioco, i giocatori sono informati completamente su tutte le mosse già compiute e su tutte quelle che potranno venir fatte (informazione perfetta).

5. Il numero mosse in una partita è finito.

Regole del gioco:

Ci sono undici oggetti. I due giocatori si alternano nel raccogliere 1, 2 o 3 oggetti finché non restano più oggetti sul tavolo. Il giocatore costretto a raccogliere l'ultimo oggetto perde.

Strategia vincente per il primo giocatore:

1. A raccoglie 2 oggetti.
2. B raccoglie  $K$  oggetti ( $k= 3$ )
3. A raccoglie  $4-K$  oggetti



Figura 2: Sperimentazione del gioco dell'undici, visibile il nautilus realizzato per l'esposizione dei giochi.

In Edmondo è stato costruito un oggetto (nel nostro caso un ipercubo, ma si può utilizzare una primitiva più semplice come un cubo a forma di pulsante o altro) nel cui contenuto sono stati inseriti:

- una notecard (file di testo) con le regole del gioco in modo che chiunque clicchi sull'oggetto le possa leggere;
- un tetraedro di colore rosso, in modo che ad ogni mossa vengano rezzati (costruiti), cioè appaiano tanti tetraedri quanti sono gli elementi ancora in gioco (di seguito è riportato lo script contenuto nei tetraedri perché si auto-cancellino ai clic successivi);
- lo script del gioco, in cui il PC gioca per primo, utilizza la strategia vincente e batte sempre l'avatar.

Nota: i commenti in LSL si scrivono preceduti da //

```
//Script da inserire nel tetraedro che utilizza il canale 9999 per dialogare con
//l'oggetto che lo rezza
default {
    state_entry()
    {
        llListen(9999, "", NULL_KEY, "DELETE");
    }

    listen(integer channel, string name, key id, string str)
    {
        llDie();
    }
}

//script da inserire nell'oggetto che contiene il gioco, vi sono diversi stati
string stato="iniziale";
integer n=11;
integer index;
integer handle;
integer qhandle=0;
integer i;
vector vel=ZERO_VECTOR;
rotation rot=ZERO_ROTATION;

//questa funzione rezza i tetraedri
rezzer (integer n)
{
    for(i=0;i<n;i++)
    {
        //I tetraedri vengono disposti intorno all'oggetto
        vector pos=llGetPos()+<(llFrand(1)-0.5)*3, 1, 1>;
        llRezAtRoot("tetraedro", pos, vel, rot, 5555);
    }
    llSleep(5);
    llShout(9999, "DELETE");
    if(qhandle!=0) llListenRemove(qhandle);
    return;}

default
{
    state_entry()
    {
        llSetText("Clicca per giocare \n al gioco dell'11 contro il PC",<1,1,1>,1);
        llShout(9999, "DELETE");
        stato="primo";
    }
}

touch_start(integer total_number)
{
    llShout(9999, "DELETE");
    if(qhandle!=0) llListenRemove(qhandle);
    key id=llDetectedKey(0);
    if(stato=="primo")
    {
        rezzer (n);
    }
    //al clic viene rilasciata la notecard con le regole, contenuta nell'inventario
    dell'oggetto
    llGiveInventory(id, llGetInventoryName(INVENTORY_NOTECARD, 0));
}
```

```

        handle=llListen(-1,"",id,"");
        llSay(0, "il PC fa la prima mossa");
        n=n-2;
        llSay(0, "PC: ho tolto 2, ci sono " +(string)n +" elementi, clicca per
continuaire!");
        rezzer (n);
        stato="secondo";
        return;
    }

    if (stato=="secondo")
    {
        handle=llListen(-1,"",id,"");
        llSetTimerEvent(10);
//Si apre una finestra di dialogo con l'utente per consentirgli di fare la sua
mossa
        llDialog(id,"Quanti elementi vuoi togliere?",[ "1","2","3" ],-1);
        stato ="terzo";
        return;
    }
}

listen(integer channel, string name, key id,string str)
{
    llListenRemove(qhandle); qhandle=0;
    llShout(9999,"DELETE");
    llListenRemove(handle);
    llSetTimerEvent(0);
    if(stato=="terzo")
    {
        while (n>1)
        {
            index=(integer) (str);
            llSay(0,"Hai tolto " +(string) index);
            n=n-index;
            llSay(0,"Ora gli elementi sono " +(string)n);
            rezzer (n);
            n=n-(4-index);
            llSay(0,"PC: ho mosso, ora gli elementi sono " +(string)n);
            rezzer (n);
            if (n==1)
            {llSay(0, "Puoi togliere solo l'ultimo elemento, quindi hai
perso");}

            else
            {
                stato="secondo";
                return;
            }
        }
    }

    llResetScript();
}
timer()
{
    llListenRemove(handle);
    llSetTimerEvent(0);
    llResetScript();
}
}

```

## Il gioco dei dadi craps

Si tratta di un gioco di sorte basato sul lancio di due dadi cubici.

Regole del gioco:

Ogni volta che i dadi vengono gettati, ne vengono sommati i punteggi ottenuti.

Il giocatore vince immediatamente se ottiene come punteggio 7 oppure 11;

perde se ottiene 2, 3 oppure 12.

Se ottiene 4, 5, 6, 8, 9, 10 deve ricordare questo punteggio P

e ripetere il lancio dei dadi finché vince ottenendo di nuovo il punteggio P, oppure perde ottenendo 7.

Per la realizzazione del gioco è stato costruito: un oggetto (nel nostro caso un altro ipercubo) nel cui contenuto o stati inseriti:

- un oggetto (nel nostro caso un altro ipercubo) nel cui contenuto è stata inserita una notecard con le regole del gioco in modo che chi clicca sull'oggetto le può leggere;
- due dadi cubici cui sono state applicate le texture delle facce dei dadi (realizzate singolarmente con un programma di grafica), nel cui contenuto è stato inserito lo script per farli ruotare nello spazio (simulazione del lancio);
- lo script dell'oggetto che esegue il programma del gioco e dialoga con i cubi;
- i dadi e l'oggetto costituiscono un link-set di cui l'oggetto ipercubo è la radice.



Figura 3: Sperimentazione del gioco dei dadi craps

Per realizzare la costruzione dei dadi è stato necessario individuare il numero che individua ciascuna faccia di un cubo (non immediatamente individuabile), per applicarle la texture con il numero punti giusti in modo che l'animazione ponesse, guardando il dado dall'alto (come avviene nella realtà), la faccia col numero casuale corrispondente, generato dallo script. Abbiamo utilizzato il seguente script per colorare e dunque individuare il numero di ogni singola faccia per applicare l'immagine corretta.

```
default
{
    touch_start(integer total_number)
    {
        //dopo aver individuato la faccia numero 4, ad essa viene applicata la texture
        con 4 punti
    }
}
```

```

        llSetColor(<llFrاند(1), llFrاند(1), llFrاند(1)>, 4);
    }
}

```

Nei due dadi è stato inserito lo stesso script (l'unica differenza è che la scritta sul prim indica la dicitura "dado 2"). Esso consente di eseguire una lista di rotazioni su comando dell'oggetto radice. Il link-set crea cliccando nell'ordine sugli oggetti: dado 1, dado 2, poi sulla radice e poi sono stati si clicca contemporaneamente sui tasti Ctrl+L..

```

list rotations=[
    <270,0,0>,
    <0, 270, 0>,
    <270,0, 180>,
    <180,270,0>,
    <180,0,0>,
    <0,0,0>
];

setFrame(integer i)
{
    vector euler=llList2Vector(rotations,i-1);
    //è stato inserito i-1 perché il primo elemento delle liste in LSL occupano il
    posto zero

    rotation rot=llEuler2Rot(DEG_TO_RAD*euler);
    llSetLocalRot(rot);
}

default
{
    state_entry()
    {
        llSetText("Dado 2",<1,0,0>,1 );
        setFrame(0);
    }
    link_message(integer sender, integer channel, string str, key id)
    {
        //llSay(0,"received "+str);
        integer tick=(integer)str;
        setFrame(tick);
    }
}

```



Figura 4: I giochi posizionati nel nautilus.

Il codice che esegue il gioco, dialoga con l'utente e mette in movimento i dadi è il seguente:

```
// nella radice del gioco dei dadi craps
integer dadol;
integer dado2;
integer totale;
integer tot;
integer t;

//questa funzione genera due numeri casuali da 1 a 6 che comunica ai due dadi
rispettivamente sul canale 90, calcola il punteggio totale e lo mostra in chat

integer lancia()
{
    dadol=(integer)(llFrand(6)+1);
    llSay(0, "Dado 1: "+ (string)dadol);
    llMessageLinked(3,90,(string)dadol, NULL_KEY);
    dado2=(integer)(llFrand(6)+1);
    llSay(0, "Dado 2: "+ (string)dado2);
    llMessageLinked(2,90,(string)dado2, NULL_KEY);
    totale = dadol + dado2;
    llSay (0, "Totale: "+ (string)totale);
    return totale;}

//questa funzione ritenta il lancio e secondo le regole del gioco fornisce gli
esiti
integer ritenta(integer input)
{
    llSay(0, "Ritenta!");
    do
    {
        t=lancia();
        llSay(0, "Al rilancio hai totalizzato " + (string)t);
        if(t==7)
            {llSay(0, "Hai perso! Al rilancio hai riottenuto 7 "); return
t;}else {
                if (t==input) {llSay(0, "Hai vinto! Al rilancio riottenuto lo
stesso punteggio iniziale "+(string)tot); return t;}
            }
    }
    while (t!=input && t!=7);
return t;}

```

```

default
{
    touch_start(integer total_number)
    {
        key id=llDetectedKey(0);
//viene rilasciata la notecard con le istruzioni
        llGiveInventory(id, llGetInventoryName(INVENTORY_NOTECARD, 0));
        llSetTimerEvent(15);
//istruzione di chiamata della funzione che simula il lancio
        tot=lancia();

        if (tot==7 || tot==11)          {llSay(0, "Nuova partita. Hai vinto, hai
totalizzato "+ (string)totale);}
        else {
            if (tot==2 || tot==3 ||tot==12)  { llSay(0, "Nuova partita. Hai
perso, hai totalizzato "+ (string)totale);}
            else {ritenta(tot);
                }
        }
    }
}
    }
}

```

Ho scelto il gioco dei dadi craps perché di facile comprensione, molto presente nei casinò online e in alcuni siti è presentato come un gioco in cui si vince facilmente.

Questo lavoro ha fornito l'occasione non solo per trattare di programmazione in modo ludico, ma per discutere di probabilità e sfatare l'illusione di poter realizzare facili guadagni col gioco d'azzardo. Abbiamo definito insieme lo spazio degli eventi e avvalendoci di una ricerca su Internet è stato possibile trovare un'immagine con le coppie di valori che si possono presentare sulle facce di due dadi cubici perfettamente equilibrati. Per ciascuno dei punteggi totali abbiamo calcolato la probabilità secondo l'impostazione classica ed è stato subito evidente che non tutti i punteggi totali presentano lo stesso numero di casi elementari favorevoli (in figura è visibile un'immagine con lo spazio degli eventi e la distribuzione di probabilità).

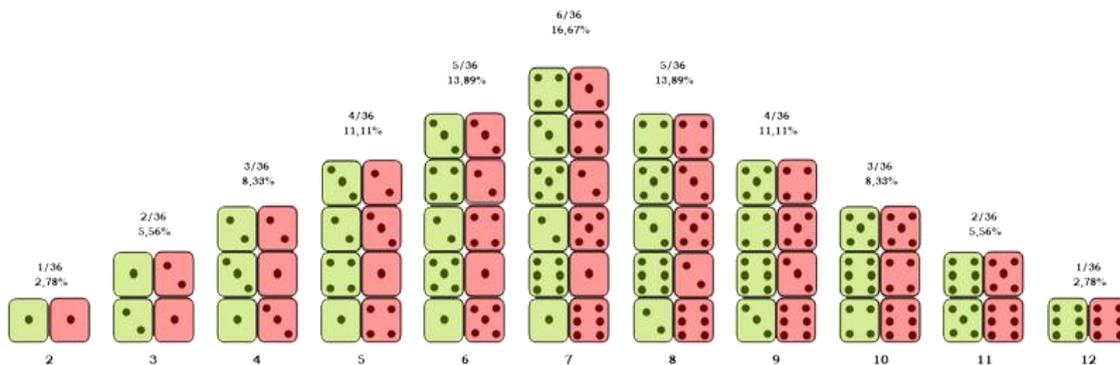


Figura 5 immagine tratta da: [http://www.optionclub.it/probabilita\\_2\\_.html](http://www.optionclub.it/probabilita_2_.html)

## Il gioco della morra cinese

Questo è un classico gioco di mano molto popolare in cui il numero delle situazioni possibili è finito. La strategia tra giocatori umani riguarda solo l'uso della psicologia per predire o influenzare le scelte dell'avversario [cfr. 7].

I due giocatori tengono la mano chiusa a pugno e la fanno dondolare, al "Via" ogni giocatore cambia immediatamente il pugno in una delle tre possibili "mani" (o armi):

- Sasso: la mano chiusa a pugno.
- Carta: la mano aperta con tutte le dita stese.
- Forbice: mano chiusa con indice e medio estesi a formare una V.

Lo scopo è sconfiggere l'avversario scegliendo un segno in grado di battere quella dell'altro, secondo le seguenti regole:

1. Il sasso spezza le forbici (vince il sasso)
2. Le forbici tagliano la carta (vincono le forbici )
3. La carta avvolge il sasso (vince la carta)

Se i due giocatori scelgono la stessa arma, il gioco è pari e si gioca di nuovo.

- 0 corrisponde al pugno chiuso, cioè “Sasso”;
- 1 rappresenta la mano tesa, cioè “Carta”;
- 2 rappresenta le due dita indice e medio, cioè ”Forbici”;

Le situazioni possibili sono:

| Giocatore 1 | Giocatore 2 | Vincitore   |
|-------------|-------------|-------------|
| 0           | 0           | Pari        |
| 0           | 1           | Giocatore 2 |
| 1           | 0           | Giocatore 1 |
| 1           | 1           | Pari        |
| 0           | 2           | Giocatore 1 |
| 2           | 0           | Giocatore 2 |
| 2           | 2           | Pari        |
| 2           | 1           | Giocatore 1 |
| 1           | 2           | Giocatore 2 |



Figura 6: La realizzazione del gioco della morra cinese, visibili la notecard e la finestra di dialogo.

Lo script da inserire nella radice del link-set è il seguente:

```
integer giocatore1;
integer giocatore2;
integer index;
integer handle;
default
{
    state_entry()
    {
        llSetText("Clicca per giocare\n alla morra cinese \n contro il
PC", <1,1,1>, 1);
        llMessageLinked(2, 10, "giocatore", "");
        llMessageLinked(3, 10, "giocatore", "");
    }

    touch_start(integer total_number)
    {
        llSay(0, "Lancio casuale, il PC è il giocatore 1");
        //il PC gioca contro l'avatar e genera la sua arma in modo casuale
        giocatore1=(integer) (llFrand(3));
        llSay(0, "Il giocatore 1 ha lanciato "+(string)giocatore1);
        key id=llDetectedKey(0);
        llGiveInventory(id, llGetInventoryName(INVENTORY_NOTECARD, 0));
        handle=llListen(-1, "", id, "");
        llSetTimerEvent(10);
        //la finestra di dialogo consente all'utente di scegliere cosa lanciare
        llDialog(id, "Lancia:0 è sasso;1 è carta; 2 è forbici", [ "0", "1", "2" ], -1);
    }

    listen(integer channel, string name, key id, string str)
    {
        llListenRemove(handle); llSetTimerEvent(0);
    }
}
```

```

index=(integer)(str);
giocatore2=index;
llSay(0,"Il giocatore 2 ha lanciato "+(string)giocatore2);

//in base al numero generato in modo casuale e alla scelta effettuata dal
giocatore sulle due carte appare l'immagine corrispondente, il dialogo avviene
sul canale 10
    if(giocatore1==0)
        llMessageLinked(2,10,"sasso","");
    if(giocatore1==1)
        llMessageLinked(2,10,"carta","");
    if(giocatore1==2)
        llMessageLinked(2,10,"forbici","");
    if(index==0)
        llMessageLinked(3,10,"sasso","");
    if(index==1)
        llMessageLinked(3,10,"carta","");
    if(index==2)
        llMessageLinked(3,10,"forbici","");
llSetTimerEvent(0);

    if(giocatore1==giocatore2) {llSay(0, "Pari");}
    else
    {
        if ((giocatore1==0 && giocatore2==1) || (giocatore1==1 &&
giocatore2==2) || (giocatore1==2 &&
giocatore2==0))
            {llSay(0,llDetectedName(0)+"Hai vinto tu");}
        else
            {llSay(0, "Ha vinto il giocatore 1 cioè
il PC");}

            llSleep(8);
            llMessageLinked(2,10,"giocatore","");
            llMessageLinked(3,10,"giocatore","");}

llResetScript();
}
}

```



Figura 7: il gioco ormai funzionante posto nel nautilus.

Le due carte della morra sono state costruite a partire da una primitiva a forma di cubo, poi deformata modificandone le dimensioni (è stata azzerata la quota e modificata l'ascissa) in modo da ottenere un rettangolo. Nel contenuto sono state inserite 4 immagini (texture): una con un disegno tipico delle corte da gioco (come in figura 7) e le immagini rappresentanti “Sasso”, “Carta”, “Forbici”. Per creare il link-set occorre cliccare nell'ordine sulle due carte e poi sulla radice e selezionare contemporaneamente i tasti Ctrl+L. Nelle carte è stato inserito anche il seguente script:

```
string texture;
default
{
    link_message(integer sender_num, integer num, string mess, key id)
    {
        if(mess=="giocatore")
            {texture ="giocatore"; llSetText(texture, ALL_SIDES);}
        if(mess=="sasso")
            {texture ="sasso"; llSetText(texture, ALL_SIDES);}
        if(mess=="carta")
            {texture ="carta"; llSetText(texture, ALL_SIDES);}
        if(mess=="forbici") {texture ="forbici";
                                llSetText(texture, ALL_SIDES);}
    }
}
```

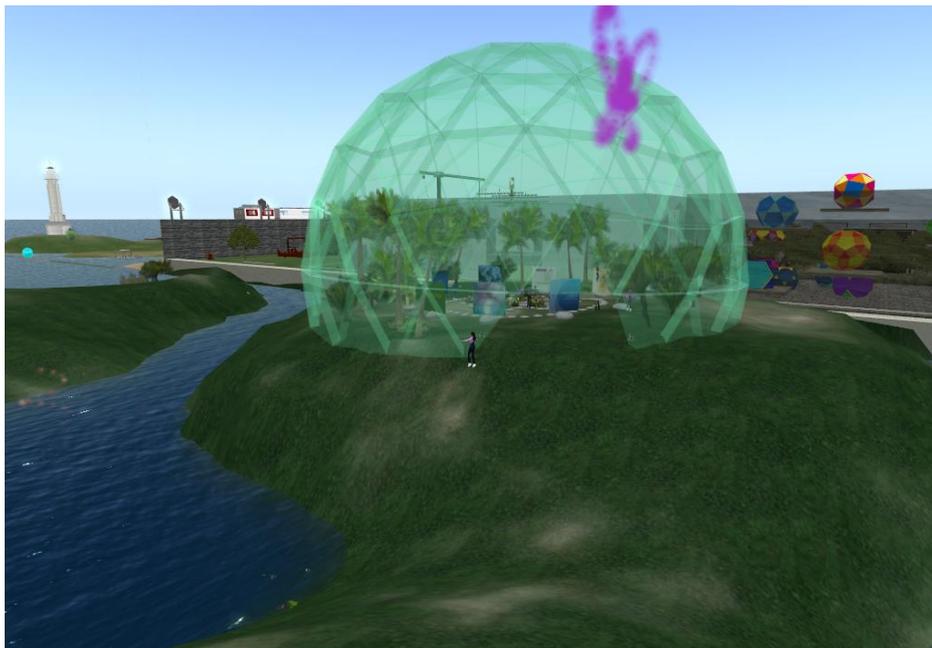


Figura 8: Foto su Scriptlandia, visibile la cupola geodetica per gentile concessione dell'ing. Luca Galletti.

## Conclusioni e ringraziamenti

Realizzare i giochi è stato un modo efficace per far riflettere gli studenti sui vari aspetti dei problemi legati alla stesura degli algoritmi risolutivi e alla codifica in LSL, ma, oltre a questi aspetti classici della programmazione, essi hanno dovuto anche costruire gli oggetti, curare le animazioni e gestire la corretta comunicazione tra prim mediante appositi canali. L'utilizzo dei mondi virtuali, quindi, consente un arricchimento e un ampliamento degli elementi da gestire rispetto a quanto avviene utilizzando altri ambienti di programmazione. Il contesto offre sempre nuovi spunti per attività con gli studenti, che, trovandosi in un ambiente a loro familiare, molto simile a quello di alcuni videogames che abitualmente

utilizzano, dimostrano una maggiore determinazione nel voler sperimentare e realizzare dei lavori significativi. I luoghi virtuali, consentono anche di realizzare costruzioni sempre nuove e rinnovare l'aspetto delle land con nuovi spazi espositivi.

Ringrazio l'ing. Luca Galletti per averci concesso la sua cupola geodetica (vedi figura 8) e per aver importato con mesh triangolare il nautilus e il paraboloide iperbolico da me modellati col software free Blender, poiché i file con esso generati, non sono visibili con alcuni viewer come Imprudence (software con cui si accede ai mondi virtuali).

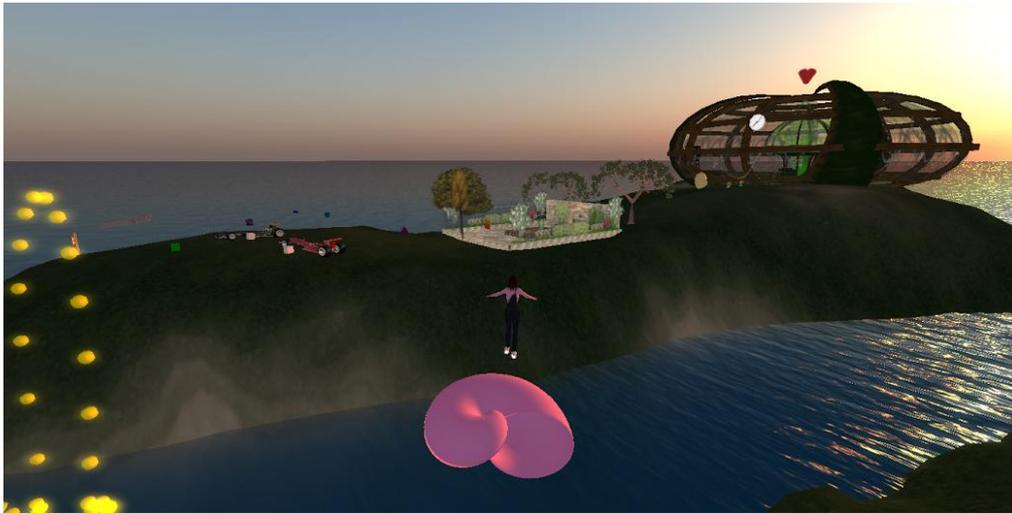


Figura 9: La mesh del nautilus da me realizzata con Blender

## Sitografia essenziale

[1] Lezioni di scripting in LSL a Scriptlandia

<http://www.matematicamente.it/magazine/18dic2012/177marincola-scriptlandia.pdf>

[2] Curve algebriche: gioielli virtuali

<http://www.matematicamente.it/magazine/19aprile2013/179-Maricola-Curve.pdf>

[3] Teoria dei giochi

[http://it.wikipedia.org/wiki/Teoria\\_dei\\_giochi](http://it.wikipedia.org/wiki/Teoria_dei_giochi)

[4] Dispensa di Fondamenti di Informatica

<http://www.di.uniba.it/~plantamura/DispenseFI0506/Algoritmi%20per%20giochi.pdf>

[5] Procedure e funzioni

[http://www.dsi.unive.it/~prog1/Esercizi\\_in\\_aula/Esercizi5.pdf](http://www.dsi.unive.it/~prog1/Esercizi_in_aula/Esercizi5.pdf)

[6] Introduzione al metodo Monte Carlo

[didattica.dma.unifi.it/WebWrite/pub/Fisica/.../Metodi\\_MonteCarlo.odt](http://didattica.dma.unifi.it/WebWrite/pub/Fisica/.../Metodi_MonteCarlo.odt)

[7] Morra cinese

[http://it.wikipedia.org/wiki/Morra\\_cinese](http://it.wikipedia.org/wiki/Morra_cinese)

[8] Blender, software free di modellazione 3D

<http://www.blender.org/>

# 197. Coordinate geografiche e cartesiane. Un metodo di trasformazione

di Michele T. Mazzucato  
mazzucatomichele@tiscali.it

*Hoc unum scio, me nihil scire*  
(So una sola cosa, di non saper nulla)  
*Apologia di Socrate, Platone (V-IV sec. a.C.)*

La trasformazione dalle coordinate geografiche a quelle cartesiane, sia diretta sia inversa, molto importante in geodesia. Il passaggio diretto, da coordinate geografiche a quelle cartesiane ortogonali nello spazio, non presenta particolare difficoltà ed è effettuabile mediante le note formule qui di seguito riportate:

Trasformazione di coordinate  
da geografiche ( $\varphi;\lambda;h$ ) a cartesiane ortogonali nello spazio (X;Y;Z)  
problema diretto

$$X = (N + h) \times \cos\varphi \times \cos\lambda \quad [1]$$

$$Y = (N + h) \times \cos\varphi \times \sin\lambda \quad [2]$$

$$Z = (N - e^2 \times N + h) \times \sin\varphi \quad [3]$$

$$\text{con } e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad \text{e } N = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \times \sin^2\varphi)}}$$

dove

a = raggio equatoriale

b = raggio polare

e = eccentricità prima

N = raggio di curvatura della sezione in primo verticale (gran normale)

$\varphi$  = latitudine

$\lambda$  = longitudine

h = altitudine

Non è facile il passaggio inverso, ossia da cartesiane ortogonali nello spazio a geografiche, poiché presenta alcune difficoltà dovute principalmente al fatto che N dipende dalla latitudine. Per quest'ultimo caso numerose sono le soluzioni proposte in letteratura sia di tipo iterativo come quella proposta da Weikko Aleksanteri Heiskanen e Helmut Moritz (1967) oppure ricorrendo alla risoluzione di equazioni algebriche di 4° grado tramite procedure di calcolo numeriche come quelle di Valentino Tomellieri (1970), di Marco Unguendoli (1974) e di Edward J. Krakiwsky e Petr Vaníček (1982) sia di tipo chiuso come quella di Piero Bencini (1968), di M.K. Paul (1973), di Jun Yong Chen (1981) e di Kazimierz M. Borkowski (1989), solo per citarne qualcuna. Tra le tante soluzioni si riporta il semplice metodo non iterativo proposto da Bernard Russel Bowring nel 1976, per la latitudine, e nel 1985, per l'altezza:

Trasformazione di coordinate  
 da cartesiane ortogonali nello spazio (X;Y;Z) a geografiche ( $\varphi$ ;  $\lambda$ ; h)  
 problema inverso  
 Formule di B. R. BOWRING, 1976 per il calcolo della latitudine  $\varphi$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(Z + e'^2 \times b \times \sin^3 \mu)}{(r - e^2 \times a \times \cos^3 \mu)} \quad [4]$$

$$\text{con } e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \quad \operatorname{tg}\mu = \frac{a \times Z}{b \times r} \quad \text{e } r = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

dove

$e'$  = eccentricità seconda

$r$  = raggio del parallelo

$\mu$  = latitudine ridotta



Il matematico e geodeta Bernard Russel Bowring (1925-2006). Il collega Buford K. Meade (1909-2004), in riferimento al lavoro *Total inverse solutions for the geodesic and great elliptic* (Bowring, 1996) scrisse che la: "Geodesic Inverse Solution is superior to other methods".

Formule di B.R. BOWRING, 1985 per il calcolo dell'altezza h

$$h = r \times \cos\varphi + Z \times \sin\varphi - a\sqrt{(1 - e^2 \times \sin^2\varphi)} \quad [5]$$

Per il calcolo della longitudine  $\lambda$  si utilizza la seguente espressione che resta valida per tutte le soluzioni proposte

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{Y}{X}$$

Alle nostre latitudini essa fornisce direttamente il valore della longitudine a est da Greenwich mentre per il caso generale occorre, ovviamente, tener conto dei segni algebrici delle coordinate cartesiane ortogonali nello spazio X e Y ricavabili dalla sottostante tabella nella quale viene dato l'intervallo di variabilità della longitudine:

|      |            |              |              |                |
|------|------------|--------------|--------------|----------------|
| Y    | +          | +            | -            | -              |
| X    | +          | -            | +            | -              |
| long | Est 0°-90° | Est 90°-180° | Ovest 0°-90° | Ovest 90°-180° |

Mentre con la seguente formula, proposta da Edward J. Krakiwsky e Petr Vaniček (1982), si può calcolare la longitudine senza bisogno di definirne il segno e quindi il suo fuso:

$$\lambda = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X + r}\right) \quad [6]$$

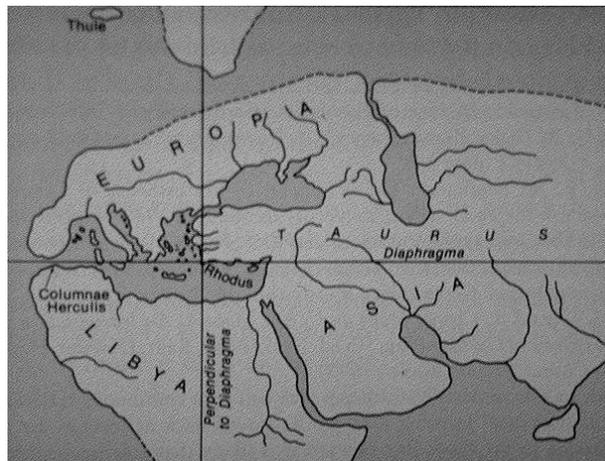
Non risulta difficile a questo punto realizzare un programma informatico che utilizzi le formule [1], [2] e [3] per il calcolo, rispettivamente, della X, Y e Z (problema diretto) e le formule [4], [5] e [6] per il calcolo della latitudine  $\varphi$ , longitudine  $\lambda$  e altezza ellissoidica h (problema inverso).

I parametri ellissoidici **a** (raggio equatoriale), **b** (raggio polare), **e<sup>2</sup>** (eccentricità prima al quadrato) ed **e'<sup>2</sup>** (eccentricità seconda al quadrato) variano in base all'ellissoide di riferimento utilizzato. Essi valgono:

$$\begin{aligned} a &= 6\,378\,388.000 & b &= 6\,356\,911.946 & e^2 &= 0.006\,722\,670\,022 & e'^2 &= 0.006\,768\,170\,197 \\ & & & & & & & \text{(per l'ellissoide internazionale di Hayford, 1924)} \\ a &= 6\,378\,137.000 & b &= 6\,356\,752.314 & e^2 &= 0.006\,694\,379\,990 & e'^2 &= 0.006\,739\,496\,742 \\ & & & & & & & \text{(per l'ellissoide del WGS, 1984)} \end{aligned}$$

L'aggettivo cartesiane nelle coordinate si riferisce al matematico e filosofo francese René Descartes (1596-1650) che, riprendendo studi del connazionale medievale Nicolas d'Oresme (1323-1382) contenuti nell'opera mai stampata *Tractatus de configuratione qualitatum et motuum* (1355) ma compendiata da Johannes de Sancto Martino nell'unica fonte di studio delle idee matematiche d'Oresme con il titolo di *Tractatus latitudinibus formarum* (1482), operò la fusione dell'algebra con la geometria euclidea introducendo le basi della geometria analitica e influenzò nello sviluppo del calcolo infinitesimale. L'idea di individuare la posizione di un punto su una superficie mediante l'intersecazione di due rette come strumenti di misura, venne sviluppata ed esposta da Cartesio nel 1637 nell'opera *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences Plus la Dioptrique, les Meteores, et la Geometrie qui sont des essais de cete Methode*.

Le coordinate geografiche (latitudine  $\varphi$  e longitudine  $\lambda$ ) vennero introdotte da Dicearco da Messina (350-290 a.C.), filosofo della scuola peripatetica allievo di Aristotele (384-322 a.C.), nell'opera *Itinerario intorno al mondo* dove, per la prima volta, il globo terrestre allora conosciuto venne suddiviso da una linea orizzontale (parallelo) e una linea verticale (meridiano), un primo e semplice abbozzo di quello che nel proseguo dei tempi diverrà il reticolo geografico. Le coordinate geografiche sono sostanzialmente un tipo particolare di coordinate sferiche che altro non sono che coordinate polari nello spazio.



Una ricostruzione della carta di Dicearco.

## Bibliografia

- Barbarella, M. - Gatti, M., *Note sulla trasformazione da sistema geocentrico a sistema ellissoidico*, Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, n. 2/1993, pp. 109-132
- Bowring, B.R., *Transformation from spatial to geographical coordinates*, Survey Review, vol. 23 July 1976, pp. 323-327
- Bowring, B.R., *The accuracy of geodetic latitude and height equations*, Survey Review, vol. 28 October 1985, pp. 202-206
- Krakiwsky E. J. e P. Vaniček, *Geodesy: The Concept* (1982).
- Mazzucato, M.T., *Globo terrestre*, BIROMA Galliera V.ta, Padova 1996
- Mazzucato, M.T., *La Figura della Terra*, CLUP Milano 2003
- Strang van Hees, G.L., *Method Bowring for the computation of latitude  $\varphi$  from rectangular coordinates (X,Y,Z)*, Bulletin of the International Geoid Service, n. 5 December 1996, pp. 25-30

# 198. An Introduction to Game Theory and its Applications

Nicola De Nitti  
nicoladenitti@gmail.com

## I Introduction

Game theory is formally defined as “the study of mathematical models of conflict and cooperation between intelligent rational decision-makers” (Myerson, 2001, p. 1). One alternative definition, proposed “as a more descriptive name for the discipline”, is “interactive decision theory” (Aumann, 2008, Abstract). In other words, it is the analysis (by means of mathematical reasoning) of a conflict of interest to find the optimal choices for reaching the desired outcome, under given conditions. Basically, it is the study of the ways to ‘win’ in a situation given certain circumstances.

Putting its limitations to one side, game theory has been profitably applied to many situations in the field of economics, biology, sociology, and political sciences, to predict important trends. This paper aims to offer a brief, clear overview of the main aspects of game theory and its wider applications.

## II Core concepts

### **i. Game and players**

The object of studying in game theory is the ‘game’, which is defined as a formal model of an interactive situation in which at least one agent can maximise his utility by anticipating the responses to his actions of one (or more) other agents. A game normally involves several agents (which are referred to as ‘players’), but some require only one player (so-called ‘decision problems’). The ‘formal definition’ of a game offers information about the players, their preferences, the information and the strategic actions available to them, and their influence on the outcome.

### **ii. Rationality**

The most significant (and conceivably one of the most controversial) assumption of game theory is that the players are ‘rational’. Players are referred to as ‘rational’ if they have precise and consistent preferences over the set of possible outcomes and are able to faultlessly determine and adopt the best available strategy to reach them.

If taken literally, the assumption of ‘rationality’ is incontestably an unrealistic one, and – if applied to specific cases – it may produce results seemingly at odds with reality. Game theorists are well-aware of the limitations imposed by this assumption. Indeed, for this reason, there are many research groups studying the implications of a “less demanding form of rationality” (known as “bounded rationality”).

### **iii. Move**

A ‘move’ is defined as the way in which a game progresses between states through exchange of information. The moves available to each player are defined by the rules of the game: they can be the result of a choice or made by chance; they may be made in consecutive fashion, or may occur concurrently for all players, or continuously for a single player until he reaches a certain state or declines to move further. In particular, ‘simultaneous games’ are games where both players move simultaneously (or, if they do not move simultaneously, each player chooses his action without knowledge of the actions chosen by the other players). On the contrary, a ‘sequential game’ is a game where one player chooses his action before the others choose theirs (NB: the later players must have some information of the first’s choice, otherwise the difference in time would have no strategic effect).

#### **iv. Information**

A game is said to have ‘perfect information’ when at any point in time only one player makes a move, and he is aware of all the actions made until that moment. Only sequential games can be games of perfect information, since players in simultaneous games do not know the actions of the other players. However, most games studied in game theory are imperfect-information games. The concept of ‘perfect information’ is frequently confused with the similar one of ‘complete information’: the attribute ‘complete information’ implies that every player is aware of the strategies and the payoffs available to the other players, but not necessarily of the actions taken by them.

#### **v. Payoff**

In any game, the payoffs are numbers which represent the ‘motivations’ of players: in fact, they may represent profit or other continuous measures (i.e. ‘cardinal payoffs’), or may simply rank the desirability of the outcomes (i.e. ‘ordinal payoffs’).

#### **vi. Strategy**

A strategy defines a set of moves or actions a player will follow in a given game.

#### **vii. Dominating strategy**

A strategy ‘dominates’ another strategy if it always provides a better payoff to that player, regardless of the other players’ actions. A strategy is said to ‘weakly dominate’ another one if it is at least as good.

#### **viii. Nash equilibrium**

A ‘Nash equilibrium’, also known as ‘strategic equilibrium’, is a list of strategies, one for each player, which has the property that no player can unilaterally change his strategy and obtain a better payoff.

#### **ix. $n$ -person games**

Games can be classified according to certain significant features. The most straightforward one is the number of players (it must be noticed that a player need not be an individual: it might be a nation, or a team comprising many people with shared interests). A game can be classified as being a one-person, two-person, or  $n$ -person (with  $n$  greater than two) game.

#### **x. Constant-sum and variable-sum games**

‘Constant-sum games’ are games of ‘total conflict’ (also known as games of ‘pure competition’), in which the sum of all players’ payoffs is the same for any outcome. This condition implies that a gain for one participant is always at the expense of another. For instance, poker is a constant-sum game for the combined wealth of the players remains constant, although its distribution can shift during the game.

On the other side, in a ‘variable-sum game’, the sum of all players’ payoffs is not constant (and may vary depending on the strategies adopted by them). Therefore, players in constant-sum games have completely opposed interests, whereas in variable-sum games they may all be winners or losers.

#### **xi. Zero-sum and non-zero-sum games**

A zero-sum game, which is a particular type of constant-sum games, is a model of a situation in which a participant’s gain (or loss) is exactly balanced by the losses (or gains) of the other participant(s): therefore, if the total gains of the participants are added up, and the total losses are subtracted, they will amount to zero.

On the other side, non-zero-sum games describe a situation in which the interacting parties’ summed gains and losses are either less than or more than zero.

#### **xii. Cooperative and non-cooperative games**

Variable-sum games can be further categorised as being either ‘cooperative’ or ‘non-cooperative’. In cooperative games players can communicate and, more importantly, make binding agreements; in non-cooperative games players can communicate, but they cannot stipulate such deals.

#### **xiii. Normal (or strategic) and extensive form**

A game can be described either in ‘normal’ form or in ‘extensive’ form. The strategic (or normal) form is a matrix representation of a simultaneous game. The payoffs are illustrated by a ‘payoff matrix’,

wherein each row refers the strategy of one player and each column to the strategy of the other player. The matrix entry at the intersection of each row and column gives the outcome of each player choosing the corresponding strategy.

On the other hand, the extensive form (also known as ‘game tree’) is a graphical representation of a sequential game. It provides information about the players, payoffs, strategies, and the order of moves. The game tree is made up of nodes (or vertices), representing the points at which players can take actions, connected by edges, representing the actions that can be taken at that node. The initial node represents the first decision to be made, and every set of edges from the first node eventually arrives at a terminal node (“an end” of the game). Each terminal node is labelled with the payoffs earned by each player (if the game ends there).

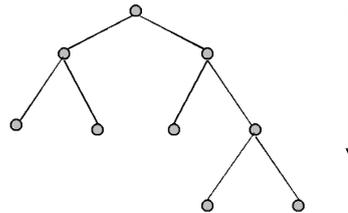


Figure 1

### III A simple example

The ‘Prisoner’s Dilemma’ — a non-zero-sum game — is a canonical example of a game analysed in game theory. It was originally shaped by Merrill Flood and Melvin Dresher in 1950, but it was Albert W. Tucker who formalised it.

#### i. The Prisoner’s Dilemma

The name of the Prisoner’s Dilemma game derives from the following hypothetical situation classically used to illustrate it. Suppose that the police have arrested two people whom they know have committed a robbery together. However, they lack enough admissible evidence for a conviction, but they do have enough evidence to send each prisoner away for two years for the theft of the getaway car. Having separated both prisoners, the inspector makes the following offer to each of them.: if you testify for the prosecution against the other, and he does not also confess, then you will go free and he will be condemned to ten years. If you both confess, you will each receive a five-year sentence. If neither of you confess, then you will each get two years for the auto theft.

The two players in the game can choose between two moves, either ‘cooperate’ or ‘defect’, without having information about which will be the other’s ‘move’. The key idea is that each player gains if both cooperate, but if only one of them cooperates, the other one, who defects, will gain more. If both defect, they both lose (or at least gain very little) but not as much as the cooperator whose cooperation is not returned.

The situation can be described by a payoff matrix, wherein each cell gives the payoffs to both players for each combination of actions.

|                                  |                    |                                   |                |
|----------------------------------|--------------------|-----------------------------------|----------------|
|                                  |                    | <b>Prisoner B<br/>(Player II)</b> |                |
|                                  |                    | <b>Stay Silent</b>                | <b>Confess</b> |
| <b>Prisoner A<br/>(Player I)</b> | <b>Stay Silent</b> | 3,3                               | 0,4            |
|                                  | <b>Confess</b>     | 4,0                               | 2,2            |

Table 1

Go free >> 4  
 2 years >> 3  
 5 years >> 2  
 10 years >> 0

If Player II confesses then Player I obtains a payoff of 2 by confessing and a payoff of 0 by refusing to testify. If Player II refuses to defect, then Player I gets a payoff of 4 by confessing and a payoff of 3 by staying silent. Consequently, in this game, regardless of the other player's choice, each player always receives a better payoff by defecting: in other words, defecting is the 'strictly dominant' strategy. Hence, both players will confess, and both will go to prison for five years.

## ii. Solution concepts and equilibria

In the Prisoner's Dilemma, the outcome represented as mutual defection is said to be the 'solution' of the game. Borrowing a term from economists and physicists, game theorists refer to the solutions of games as 'equilibria'. Indeed, when a physical system is said to be in equilibrium, it means that it is in an endogenously stable state: that is, all the forces internal to the system balance each other out, therefore leaving it 'at rest' until and unless it is perturbed by some external forces. Likewise, economists read economic systems as being networks of mutually constraining (often causal) relations – just like physical systems – and the equilibria of such systems are then their endogenously stable states.

What has been referred to as the 'solution' of the Prisoner's Dilemma is the unique Nash equilibrium of the game (where the 'Nash' refers to John Nash, the Nobel Laureate mathematician). Nash equilibrium applies – or fails to apply, as the case might be – to whole sets of strategies: a set of strategies is a Nash equilibrium if no player can improve his payoff, given the strategies of all other players in the game, by changing his strategy.

It is possible to specify one class of games in which Nash equilibrium is always not only necessary but sufficient as a solution concept: these are 'finite' (i.e. with finitely many players, each of which has a finite set of strategies) perfect-information games that are also zero-sum. However, most games do not have this property.

## IV Applications of game theory

### i. Description and modelling of population dynamics

A well-known use of game theory is to describe and model the human populations' behaviour. In fact, some researchers are positive that by finding the equilibria of certain games they can predict the behaviour of an actual human population, when confronted with situations analogous to the ones in the games studied. However, this particular view of game theory has recently come under criticism, mostly because in the real world the assumptions of game theorists are often violated: human behaviour often deviates from 'rationality' for several reasons (e.g. altruism).

### ii. Economics and business

Game theory is an effective method used in mathematical economics and business for modelling the patterns of behaviour of interacting agents. Its applications comprise a wide range of economic phenomena such as auctions, bargaining, fair division, social network formation, voting systems (Tsefatian, 2006), and can be also found in areas such as experimental economics (V. L. Smith, 1992, pp. 241-282), behavioural economics (Camerer, 1997), and political economy (Shubik, 1981). In these kinds of models, it happens quite often that the payoffs represent money, which most probably corresponds to an individual's utility.

### iii. Political science

The application of game theory in political science is focused on the areas of fair division, political economy, war bargaining, and social choice theory. In each of these fields, scholars have developed models in which the players are (for example) voters, states, special interest groups, or politicians (see Downs, 1957).

### iv. Biology

John Maynard Smith (a British theoretical evolutionary biologist and geneticist) — in the preface to *Evolution and the Theory of Games* (1982) — writes, "paradoxically, it has turned out that game theory is more readily applied to biology than to the field of economic behaviour for which it was originally

designed". Certainly, in biology, game theory has been used to analyse many seemingly incongruous natural phenomena.

One of the main applications of game theory in biology is the study of the so-called 'biological altruism', a behaviour that occurs when an individual ('the donor') performs an action in order to help another organism ('the recipient') with no apparent advantage (or even at a cost) to itself. The costs and benefits are calculated in terms of 'reproductive fitness' (i.e. the expected number of progeny): by behaving self-sacrificingly, an individual reduces the number of offspring it is likely to produce itself, but increases the number of progeny that other animals are likely to produce.

From a Darwinian perspective, the existence of altruism in nature seems perplexing and incongruous: natural selection should lead individuals to behave in order to increase their own chances of survival and reproduction, instead of those of others. Yet instances of altruistic patterns of behaviour can be found in various species ranging from vampire bats that regurgitate blood they have gained and donate it to group members who have failed to find food, to Vervet monkeys that warn group members of a predator's approach, even if it endangers that individual's chances of survival. Moreover, in social insect colonies (e.g. ants, wasps, bees and termites), it happens that sterile workers devote their entire lives to other duties, such as protecting the queen, constructing and defending the nest, looking for food, and nursing the larvae.

Arguably, the problem of altruism is closely associated with questions about the level at which natural selection acts: if selection acts exclusively at the individual level, favouring some individuals over others, then it seems clear that altruism cannot evolve: altruists are at a selective disadvantage compared to the egoistic members of their group since behaving altruistically is detrimental for the individual itself, by definition. However, the fitness of the group as a whole will be enhanced by the presence of altruists, as a group composed of many altruists may have a survival advantage over a group composed predominantly or exclusively of selfish organisms. Therefore, it has been hypothesised that the altruistic behaviour may evolve by 'between-group selection', despite the fact that, within each group, selection favours 'egoistic' individuals. This idea was first proposed by Darwin himself, and later it was appreciated by the founders of modern neodarwinism, although they questioned the importance of this evolutionary mechanism.

Game theory offers another interesting framework for the evolution of 'reciprocal altruism', by modelling biological interactions by means of so called 'Iterated Prisoner's Dilemma'. Indeed, for biological interactions, it is assumed that the same individuals will interact more than once, and if two players play the Prisoner's Dilemma more than once in succession (and they can remember the previous actions of their opponent and change their strategy accordingly) the resulting game is named 'Iterated Prisoner's Dilemma'. The concept of cooperation and altruism — as it is analysed by evolutionary biology — is close to the notion of 'tit for tat' (an English saying meaning 'equivalent retaliation'), which is an effective strategy first introduced by Anatol Rapoport (in the two tournaments held by Robert Axelrod around 1980 in order to find the best strategy for the Prisoner's Dilemma). An agent adopting this strategy will first cooperate, then subsequently replicate the opponent's previous action: if the opponent has been cooperative, the agent will be cooperative; otherwise, the agent will not be cooperative.

A noteworthy explanation for the evolution of altruistic behaviour which does not necessarily depend on game theory is 'inclusive fitness theory', named and developed by British evolutionary biologist William Donald Hamilton. It explains how altruistic patterns of behaviour could evolve without the need for group-level selection: altruistic genes increase in a population by natural selection only if the cost to the altruistic individual is less than the reproductive benefit of the recipient multiplied by the likelihood of the recipient passing on the altruistic gene to its progeny ("Hamilton's Rule"). Inclusive fitness is often associated with 'kin selection', because closely related organisms more likely share the same genes (in this case, the altruistic gene). Nevertheless, altruism genes can be found in non-related individuals: consequently, 'relatedness' is not considered a strict requirement of inclusive fitness.

## v. Philosophy

Philosophers have increasingly become interested in game theory since it offers a way of interpreting the thoughts of philosophers such as Immanuel Kant, Thomas Hobbes, Jean-Jacques Rousseau, and many other social and political theorists.

### a) Kant's categorical imperative

Immanuel Kant's categorical imperative, which was meant to be the fundamental principle of morality, declares: “Act only according to that maxim whereby you can at the same time will that it should become a universal law without contradiction” (Immanuel Kant, *Grounding for the Metaphysics of Morals*). In terms of game theory, this statement can be paraphrased as follows: “Choose only a strategy which, if you could will it to be chosen by all the players, would yield a better outcome from your point of view than any other”. This statement represents a ‘moral solution’ to the Prisoner's Dilemma. Only a cooperative choice is acceptable, since the choice of defecting, if “made universal”, is in contradiction to one's personal interest.

### b) Hobbes's and Rousseau's social contract

Through the use of game theory, Thomas Hobbes' argument for absolute monarchy – afterwards made popular by Jean-Jacques Rousseau – can be made clearer. Hobbes argued that, without some form of external constraint on people's pattern of behaviour, anarchy would ensue and cooperation among people would be impossible (as people act only to maximise individual prosperity instead of the welfare of their society). Surely, there will exist altruists who limit their self-interests for the good of others. Nevertheless, if even one self-interested person exists, he will be able to profit from the altruist's constraints: as a result, if there is just one narrowly self-interested person, no altruist will survive (unless he becomes egoistic too). Obviously, in such an environment – known as a ‘State of Nature’ – a person has to be always ready to pre-empt attacks in order to maximise his own welfare. Each such conflict between people in a State of Nature has been named as ‘Hobbesian Dilemma’, which, in the field of game theory, has the same structure as a ‘Prisoner's Dilemma’. Hobbes believed that the ‘Hobbesian Dilemma’ results in a State of Nature because morality is an unstable enforcer of social cooperation. However, according to Hobbes, as cooperation among people is biologically necessary, a stable enforcer must exist, and an all-powerful sovereign represents the best form of social enforcement.

## V Conclusion

An enormous range of further applications of game theory has been developed, and, regardless of the brevity of the introduction, hopefully, it has been provided enough to persuade the reader of the remarkable, continuously expanding utility of this tool.

The readers whose appetite for more has been aroused should find that they now have a sufficient grasp of the rudiments to be able to work through a large literature on this topic, of which some highlights are listed below.

## Bibliography

- AUMANN, R. J., *Game theory, Introduction* in “The New Palgrave Dictionary of Economics” (2nd Edition), 2008.
- AXELROD, R., *The Evolution of Cooperation*, 1984, New York, Basic Books.
- BAIRD, D., GERTNER, R., and PICKER, R., *Game Theory and the Law*, 1994, Cambridge (MA), Harvard University Press.
- BARRY, B., *Political Argument, International library of philosophy and scientific method*, 1965, London, Routledge & Kegan Paul.
- BICCHIERI, C., *Rationality and Coordination*, 1993, Cambridge, Cambridge University Press
- BINMORE, K., KIRMAN, A., and TANI, P., *Frontiers of Game Theory*, 1993, Cambridge (MA), MIT Press.
- BINMORE, K., *Natural Justice*, 2005, New York, Oxford University Press.
- BINMORE, K., *Does Game Theory Work? The Bargaining Challenge*, 2007, Cambridge (MA), MIT Press.
- BINMORE, K., *Rational Decisions*, 2009, Princeton, Princeton University Press.

- CAMERER., C. F., *Progress in Behavioral Game Theory*, in “Journal of Economic Perspectives”, 1997, 11(4), 167-188.
- CHEN, J., LU, S., and VEKHTER, D., *Game Theory*,  
URL = <<http://cs.stanford.edu/people/eroberts/courses/soco/projects/1998-99/game-theory/index.html>>
- DARWIN, C., *On the Origin of Species by Means of Natural Selection*, 1859, London, John Murray.
- DARWIN, C., *The Descent of Man and Selection in Relation to Sex*, 1871, New York, Appleton.
- DAWKINS, R., *The Selfish Gene*, 1976, Oxford, Oxford University Press.
- DOWNS, A., *An Economic Theory of Democracy*, 1957, New York, Harper.
- DUGATKIN, L. A., *Cooperation among Animals: an Evolutionary Perspective*, 1997, Oxford, Oxford University Press.
- DUGATKIN, L. A., *The Altruism Equation*, 2006, Princeton, Princeton University Press.
- FUDENBERG, D. and TIROLE, J., *Game Theory*, 1991, Cambridge (MA), MIT Press.
- GAUTHIER, D., *Morals By Agreement*, 1986, Oxford, Oxford University Press.
- GHEMAWAT, P., *Games Businesses Play*, 1997, Cambridge (MA), MIT Press.
- GINITS, H., *Game Theory Evolving*, 2000, Princeton, Princeton University Press.
- HAMILTON, W. D., *The Genetical Evolution of Social Behaviour I and II*, in “Journal of Theoretical Biology”, 7,1964, 1-16, 17-52.
- HAMILTON, W. D., *Selfish and Spiteful Behaviour in an Evolutionary Model*, in “Nature”, 228, 1970, 1218-1220.
- HAMILTON, W. D., *Altruism and Related Phenomena, mainly in the Social Insects*, in “Annual Review of Ecology and Systematics”, 3, 1972, 193-232.
- HOFBAUER, J. and SIGMUND, K., *Evolutionary Games and Population Dynamics*, 1998, Cambridge, Cambridge University Press.
- KOONS, R., *Paradoxes of Belief and Strategic Rationality*, 1992, Cambridge, Cambridge University Press.
- KREBS, J. and DAVIES, N., *Behavioral Ecology: An Evolutionary Approach* (Second edition), 1994, Sunderland, Sinauer.
- KUHN, H., *Classics in Game Theory*, 1997, Princeton, Princeton University Press.
- KUHN, S. T., *Reflections on Ethics and Game Theory*, in “Synthese” 141(1), 2004, 1–44.
- LEWIS, D., *Convention: A Philosophical Study*, 1969, Cambridge (MA), Harvard University Press.
- MCCLENNEN, E. F., *Rationality and Dynamic Choice: Foundational Explorations*, 1994, Cambridge, Cambridge University Press.
- MCMILLAN, J., *Games, Strategies and Managers*, 1991, Oxford, Oxford University Press.
- MELE, A. and RAWLINGS P., *The Oxford Handbook of Rationality*, 2004, Oxford, Oxford University Press.
- MORRIS P., *Introduction to Game Theory*, 1994, New York, Springer-Verlag.
- MYERSON, R., *Game Theory — Analysis of Conflict*, 1991, Harvard University Press.
- NASH, J., *Equilibrium Points in n-Person Games*, in “Proceedings of the National Academy of Science”, 36, 48–49.
- NASH, J., *The Bargaining Problem*, in “Econometrica” 18(2), 1950, 155–162.
- NEUMANN, J. v., *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, in “Mathematische Annalen” 100 (1), 1928, 295–320.
- OKASHA, S., *Evolution and the Levels of Selection*, 2006, Oxford, Oxford University Press.
- OKASHA, S., *Biological Altruism*, in “The Stanford Encyclopedia of Philosophy” (Winter 2009 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<http://plato.stanford.edu/archives/win2009/entries/altruism-biological/>>.
- ORDESHOOK, P., *Game Theory and Political Theory*, 1986, Cambridge University Press.
- POUNDSTONE, W., *Prisoner's Dilemma*, 1992, New York, Doubleday.
- QUELLER, D. C., *A General Model for Kin Selection*, in “Evolution”, 46, 1992, 376-380.
- ROSS, DON, *Game Theory*, in “The Stanford Encyclopedia of Philosophy” (Winter 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/game-theory/>>
- SAMUELSON, L., *Evolutionary Games and Equilibrium Selection*, 1997, Cambridge (MA), MIT Press.

- SCHELLING, T., *Strategy of Conflict*, 1960, Cambridge (MA), Harvard University Press.
- SHAPLEY, L. S., *Some Topics in Two-Person Games*, in “Advances in Game Theory” (Annals of Mathematics Studies, 52), 1-28, 1964, Princeton, Princeton University Press.
- SHUBIK, M., *Game Theory Models and Methods in Political Economy*, in “Handbook of Mathematical Economics”, 1981, v. 1, 285-330.
- SIGMUND, K., *Games of Life*, 1993, Oxford, Oxford University Press.
- SKYRMS, B., *Evolution of the Social Contract*, 1996, Cambridge, Cambridge University Press.
- SMITH, J. M., *Evolution and the Theory of Games*, 1982, Cambridge, Cambridge University Press.
- SMITH, V. L., *Game Theory and Experimental Economics: Beginnings and Early Influences*, in E. R. Weintraub, ed., “Towards a History of Game Theory”, 1992.
- SOBER, E. and WILSON, D. S., *Unto Others: The Evolution and Psychology of Unselfish Behavior*, 1998, Cambridge (MA), Harvard University Press.
- TESFATSION, L., *Agent-Based Computational Economics: A Constructive Approach to Economic Theory*, in “Handbook of Computational Economics”, 2006, v. 2, 831-880.
- VERBEEK, B., *Instrumental Rationality and Moral Philosophy: an essay on the virtues of cooperation*, 2002, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.
- VON NEUMANN, J. and MORGENSTERN, O., *The Theory of Games and Economic Behavior*, 1944, Princeton, Princeton University Press.
- WEIBULL, J., *Evolutionary Game Theory*, 1995, Cambridge (MA), MIT Press.
- WILKINSON, G. S., *Reciprocal Food Sharing in the Vampire Bat*, in *Nature*, 308, 1984, 181-184.
- WILSON, D. S., *On the Relationship between Evolutionary and Psychological Definitions of Altruism and Egoism*, in “Biology and Philosophy”, 7, 1991, 61-68.
- WILSON, D. S. and DUGATKIN, L. A., 1992, *Altruism: Contemporary Debates*, in “Keywords in Evolutionary Biology”, E. F. Keller and E. A. Lloyd (eds.), Cambridge (MA), Harvard University Press.
- YOUNG, H.P., *Individual Strategy and Social Structure*, 1998, Princeton, Princeton University Press.

# 199. La progettazione educativa fa fiorire la matematica

Enrico Maranzana

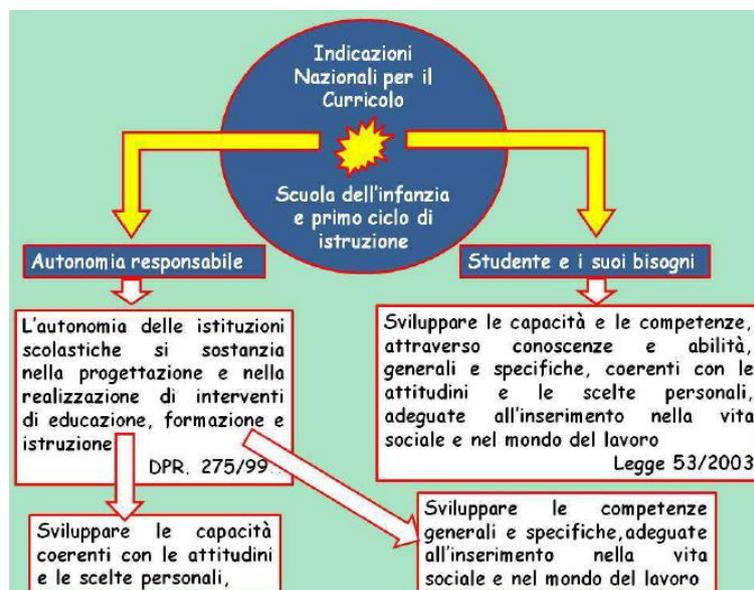
Gli studenti italiani non hanno successo nei test di matematica. Tutti “sanno” individuare le carenze del sistema scolastico e propongono ricette per superarle. Tra questi il ministro Francesco Profumo che ha affermato che le carenze che viciano la formazione matematica dei giovani dipendono dalle procedure di selezione del personale docente: solo chi ha la laurea specifica dovrebbe essere titolare dell’insegnamento [Bolzano – convegno sull’innovazione – settembre 2012].

Una plausibile spiegazione della “verità in tasca” che tutti presumono d’avere deriva dal loro riferimento culturale: l’insegnamento universitario. Il servizio scolastico, invece, ha una natura e un orientamento proprio: la conoscenza è strumentale rispetto alla promozione e al consolidamento delle qualità dei giovani.

Le recenti indicazioni Nazionali per il Curricolo per la scuola di base [2013] e i programmi di matematica del Piano Nazionale dell’Informatica [1991] forniscono elementi probanti del

- disallineamento rispetto al sistema normativo,
- l’incongruenza tra le finalità dichiarate e le scelte effettuate,
- la concezione statica delle discipline,
- la frammentazione e la non-finalizzazione dell’impianto logico.

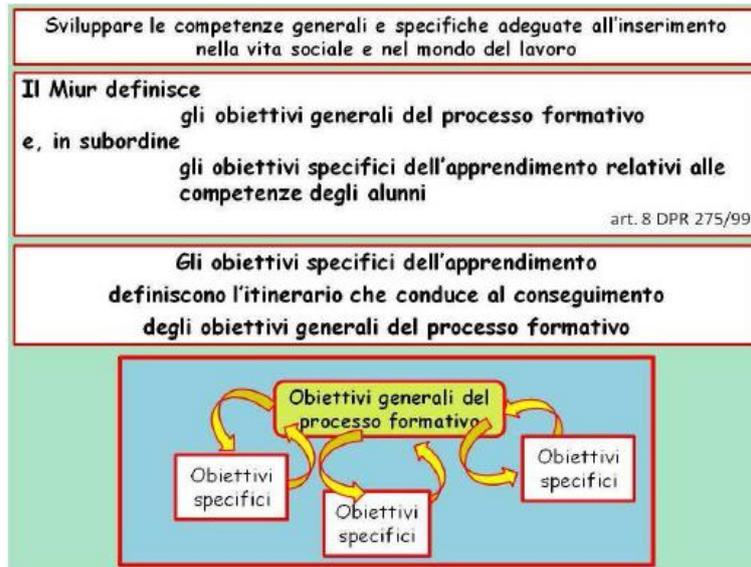
«Al centro delle nuove Indicazioni per la scuola di base c’è l’autonomia responsabile delle scuole», ha detto il ministro Profumo, “le Indicazioni rafforzano l’inclusione scolastica mettendo al centro lo studente e i suoi bisogni”.



Il legislatore ha dato un’esplicita, chiara indicazione: la progettazione formativa deve svilupparsi seguendo un procedimento per approssimazioni successive. Prima sono da individuare le competenze generali e successivamente, solo dopo aver formulato la strategia per il loro conseguimento, si elaborano le competenze specifiche per realizzare la finalità del sistema.

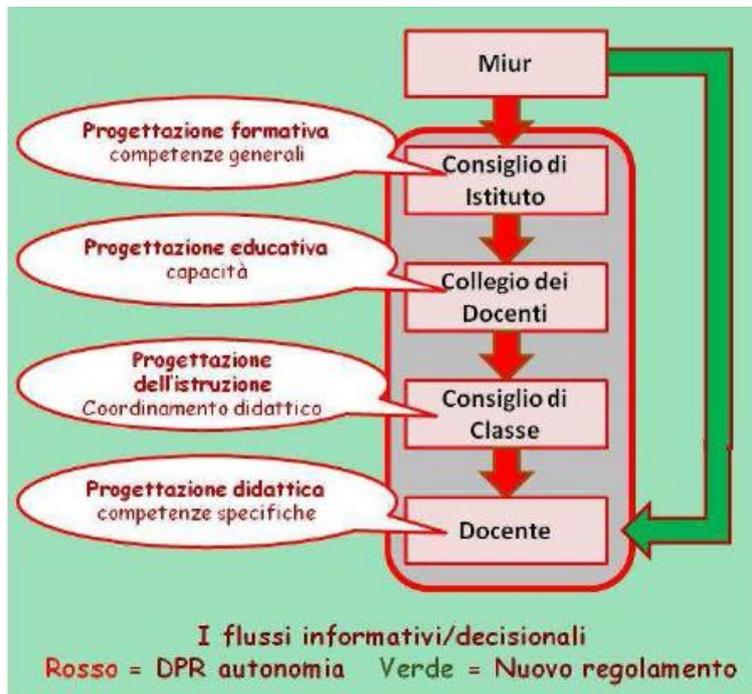
La legge attribuisce al Consiglio di Istituto il compito “elaborare e adottare” le competenze generali rilasciate dal Ministero per integrarle, adattandole al contesto locale. Nella scuola dell’autonomia le competenze generali sono il *trait d’union* tra il Miur e gli organismi di governo della scuola.

Nel nuovo regolamento le competenze specifiche sono l’oggetto della comunicazione destinata al singolo docente.



Il documento ministeriale prevede che

- le competenze specifiche ne siano l'asse portante:
  - un collegamento diretto è costituito tra il ministero e i docenti: gli organismi collegiali sono bypassati e la visione sistemica è sacrificata;
  - la progettazione, sostanza dell'autonomia, è soffocata: la funzione docente è dequalificata e mortificata;
  - il punto di vista delle singole discipline determina la loro sostanza: meno visibile per la scuola primaria, evidente per la secondaria come, ad esempio, per matematica;
  - il mandato conferito all'insegnante prelude alla valutazione individuale dei docenti;
- le competenze generali siano quelle elaborate in sede europea.
- 



Non è casuale che il legislatore abbia sostituito il termine “Scuola” con “Sistema educativo di istruzione e di formazione”, da cui:

|                                      |    |   |
|--------------------------------------|----|---|
| frammentazione                       | Vs | unitarietà  |
| separatezza                          | Vs | interdipendenza   |
| progettazione individuale            | Vs | coordinamento didattico   |
| le parti sono autonomamente definite | Vs | il tutto definisce le parti   |
| valutazione dei singoli apporti      | Vs | valutazione del risultato complessivo   |
| bottom-up                            | Vs | top-down  |
| metodo assiomatico                   | Vs | metodo sperimentale   |
| insegnamento                         | Vs | progettazione<br>formativa<br>educativa<br>dell'istruzione<br>dell'insegnamento |

Contrapposizioni sintetizzate dal confronto tra i “*contenuti chiave*” del regolamento con la finalità del sistema:

- “*dialogo tra discipline: insegnare a ricomporre i grandi oggetti della conoscenza in prospettiva complessa; Essenzialità: ricerca dei nuclei fondamentali delle discipline*”
- “*sviluppare capacità e competenze ATTRAVERSO conoscenze e abilità*”.

Non si tratta di “*contenuti chiave*” ma di contenuti nocivi, figli di una visione disciplinare anacronistica, statica, agli antipodi di quella trasmessa dal profilo dello studente liceale [marzo - 2010] che sostiene la necessità di privilegiare l'aspetto dinamico.

Nel documento di riordino, infatti, gli argomenti sono presentati come la fase finale del processo che ha inizio con la percezione e la definizione di un problema, prosegue con l'applicazione del metodo risolutivo per concludersi con la conquista del nuovo sapere.



“Se correttamente interpretate, tutte le discipline curriculari - sia pure in forme diverse - promuovono nell'allievo comportamenti cognitivi, gli propongono la soluzione di problemi, gli chiedono di produrre risultati verificabili, esigono che l'organizzazione concettuale e la verifica degli apprendimenti siano consolidate mediante linguaggi appropriati.

Nella loro differenziata specificità **le discipline sono, dunque, strumento e occasione per uno sviluppo unitario, ma articolato e ricco, di funzioni, conoscenze, capacità e orientamenti indispensabili alla maturazione di persone responsabili e in grado di compiere scelte.** Si tratta del resto di soddisfare l'esigenza che il preadolescente manifesta, passando da esperienze di vita più globali e di cultura più indifferenziate, proprie della scuola primaria, a quelle più

articolate e specifiche della scuola secondaria di primo grado, sulla linea della necessaria e appropriata pluralità delle discipline e dei contributi che esse forniscono”.

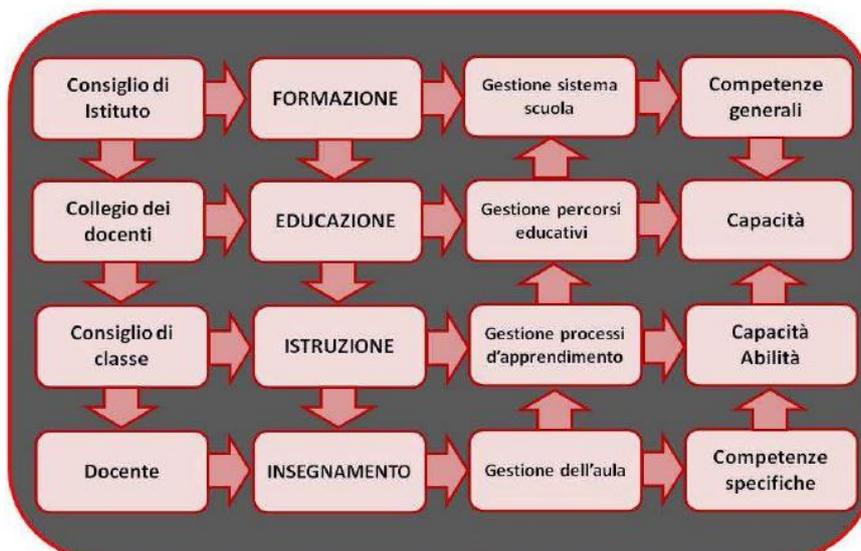
Si tratta di un paragrafo del programma per la scuola media del febbraio 1979. Ben formulata risulta la strategia che le scuole avrebbero dovuto sviluppare per promuovere competenze:



- Un impressionante e inattuato salto di prospettiva. Una rivoluzione mancata: avrebbe autenticamente motivato gli studenti.
- Una trasformazione non accettata dai docenti che, abbandonata la sicurezza fornita loro dai libri di testo, si sarebbero ritrovati sull'incerto terreno della ricerca educativa.
- Un cambiamento che ha trovato negli accademici dei detrattori: sono stati messi fuori gioco in quanto privi d'ogni esperienza in materia.
- Una novità che avrebbe richiesto ai dirigenti scolastici di farsi parte diligente per “animare” adeguatamente gli organismi collegiali.
- Una sfida, un cambiamento che tutte le scuole hanno osteggiato: i programmi ministeriali del 79 sono stati sistematicamente elusi, nel disinteresse generale.

In questo contesto è da interpretare quanto Marco Rossi Doria ha affermato nella presentazione ufficiale: *“Le Indicazioni Nazionali per il Curricolo sono un testo di riferimento unico per tutte le scuole autonome che sostituisce quelli che, un tempo, si chiamavano programmi ministeriali.”*

Assurdo e colposo il fatto che non si sia riflettuto sul fatto che i programmi del 79 si incastonano perfettamente all'interno dell'attuale sistema normativo, che non siano state ricercate, individuate, rimosse le cause della loro sterilizzazione, che la loro abrogazione sia di rinforzo a negligenze, trasgressioni, assenza di professionalità.



TU 297/94

Il programma di matematica del biennio della scuola secondaria superiore del 1991 fornisce una seconda, solida base per l'argomentazione. Per cogliere il suo significato è necessario contestualizzarlo, collocandolo all'interno della struttura decisionale che il legislatore ha concepito:

La disposizione ministeriale, che si trascrive, presenta la disciplina matematica scomponendola in cinque grandi temi, associando a ognuna le potenzialità educative, espresse in termini di capacità.

**Tema 1 Geometria del piano.** *Si suggerisce l'adozione di un metodo che, facendo leva sulle conoscenze intuitive riapprese dall'allievo nella scuola media, proceda allo sviluppo razionale di limitate catene di deduzioni; è tuttavia necessario che ogni ipotesi o ammissione cui si farà ricorso sia chiaramente riconosciuta e formulata in modo esplicito. In tal modo si condurrà l'allievo a familiarizzarsi con il metodo ipotetico-deduttivo.*

**Tema 2 Insiemi numerici e calcolo.** *Un terreno su cui praticare il calcolo approssimato in cui sarà posto l'accento sulla significatività delle cifre, anche al fine di far vedere come il risultato del calcolo possa essere illusorio in assenza di una corretta valutazione dell'errore. Si metteranno in luce la permanenza della proprietà formali e della relazione d'ordine.*

**Tema 3 Relazioni e funzioni.** *Il concetto di funzione, fondamentale per stabilire relazioni di dipendenza, consentirà di visualizzare leggi e fenomeni in connessione interdisciplinare con altri ambiti.*

**Tema 4 Elementi di probabilità e di statistica.** *Al concetto di probabilità si perverrà da vari punti di vista, avvalendosi di opportune esemplificazioni tratte da situazioni reali. L'analisi dei problemi sarà facilitata da appropriate rappresentazioni*

**Tema 5 Elementi di logica e di informatica.** *Uso appropriato del linguaggio, a esprimere correttamente le proposizioni matematiche e a concatenarle "logicamente" per dimostrare teoremi. Cogliere le differenze tra il piano linguistico e il piano metalinguistico, tra il livello sintattico e il livello semantico, particolarmente evidenziate dalla pratica al calcolatore.*

*Laboratorio di informatica in cui si avvia l'allievo alla costruzione di modelli formali di situazioni problematiche che ne consentano una soluzione reale o potenziale.*

Appare evidente come Il provvedimento ministeriale

- si sviluppi seguendo le linee evolutive dell'istituzione scolastica degli ultimi quarant'anni, formalizzate dalla legge 53/2003 che ha
  - sostituito il termine scuola con sistema educativo di istruzione e di formazione;
  - finalizzato il servizio scolastico alla promozione delle capacità e delle competenze dei giovani;
  - ha distinto i fini dai mezzi necessari al loro conseguimento;
- sia conforme al quadro organizzativo delineato nel T.U. 297/94 che attribuisce al Collegio dei docenti le responsabilità relative alla
  - "programmazione dell'azione educativa";
  - "valutazione periodica dell'andamento complessivo dell'azione didattica per verificarne l'efficacia in rapporto agli orientamenti e agli obiettivi programmati, proponendo, ove necessario, opportune misure per il miglioramento dell'attività scolastica";

ciò nonostante nessun esito è stato prodotto: gli organi della scuola hanno sistematicamente eluso il mandato loro conferito.

Essenziale appare l'individuazione delle omissioni operative che hanno sterilizzato l'insegnamento della matematica.. e non solo di quello. A tal fine si devono specificare gli stati del processo attraverso cui si programma l'azione educativa.

Le parole chiave del disposto legislativo sono risolutive:

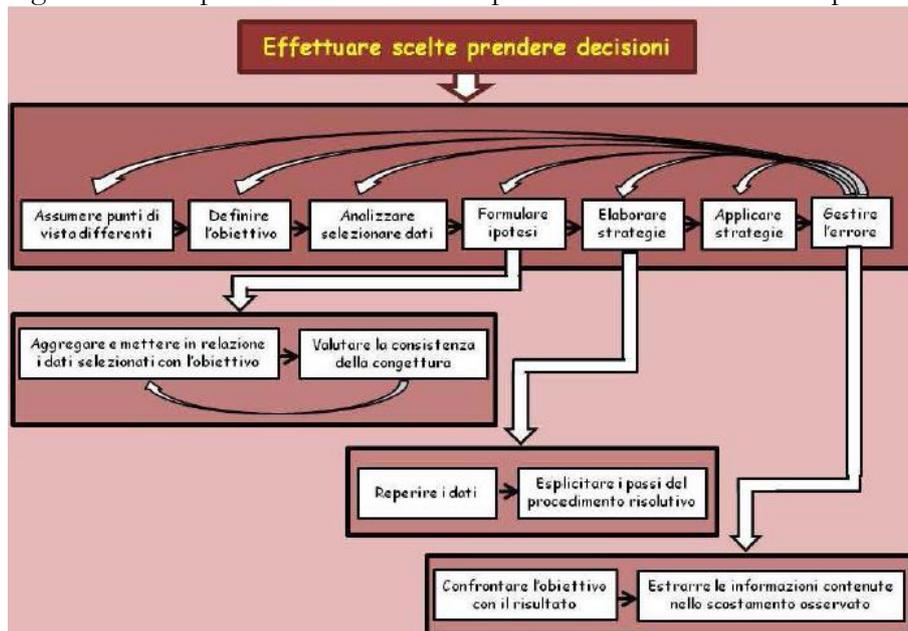
- **Obiettivi programmati:** da esprimere sotto forma di capacità;
- **Andamento complessivo:** riecheggia la cultura sistemica; tutti gli insegnamenti, sinergicamente, hanno identico orientamento.
- **Valutazione periodica;** il feed-back è praticabile se la strategia (orientamento) per l'approssimazione dei traguardi è stata formulata ed è stata temporalmente scandita.

La prima fase del processo di programmazione consiste nell'elaborazione e nell'adozione degli obiettivi qualificanti i processi d'apprendimento.

I docenti di matematica contribuiscono all'individuazione dei traguardi generali, di tutti gli insegnamenti, riformulando le indicazioni ministeriali in termini più generali: la comunicazione tra sensibilità disciplinari differenti sarà facilitata e sarà specificato l'oggetto del mandato conferito ai consigli di classe:

- Capacità d'argomentare – Capacità di formulare ipotesi [tema 1]
- Capacità di generalizzare – Capacità d'analisi – Capacità di gestire l'errore [Tema 2]
- Capacità d'assumere un'ottica sistemica [Tema 3]
- Capacità di definire un problema – Capacità di costruire modelli [Tema 4]
- Capacità di comunicare – Capacità d'argomentare – Capacità di progettare [Tema 5].

Si supponga che il Collegio abbia sintetizzato le proposte formulate dai diversi gruppi disciplinari e abbia indicato, tra gli altri, come meta di convergenza “**Effettuare scelte, prendere decisioni**”: per evitare ogni ambiguità ne ha esplicitato il contenuto esprimendolo sotto forma di processo:



La processualizzazione dei traguardi dell'apprendimento, che rappresenta il primo stadio della *programmazione dell'azione educativa*, non è sufficiente a vincolare e a coordinare le attività progettuali.

L'intensità di una capacità, infatti, dipende dalla dimensione del problema affrontato.

La formulazione dell'ipotesi educativa e la prefigurazione della tipologia delle prove per il monitoraggio dell'evoluzione delle qualità dei giovani consentiranno di superare l'impasse.

Uno scenario radicalmente diverso da quello ordinario.

La tradizionale lezione frontale è da abbandonare: le competenze, manifestazione di capacità, non possono essere insegnate.

Un'innovazione, un cambiamento raccomandato dai regolamenti di riordino del 2010 che tra “*i punti fondamentali e imprescindibili delle pratiche didattiche*” prevedono “*la pratica dei metodi di indagine propri dei diversi ambiti disciplinari*” e “*l'uso costante del laboratorio per l'insegnamento delle discipline scientifiche*”.

Anche in questo caso la figura che mostra la chiave di volta e quella che presenta l'immagine dinamica delle discipline forniscono la piattaforma di lancio della necessaria, auspicata innovazione.

## 200. Dal Paradosso di Achille e la tartaruga alle serie numeriche: un intervento didattico

Raffaella Gigante  
raffamat@yahoo.it

### Introduzione

Nello sviluppo di tale attività, ho cercato di stimolare la costruzione della conoscenza, il lavoro cooperativo, l'azione critica, la partecipazione, la discussione e il confronto, alternando le lezioni in classe con le attività di laboratorio.

Il mio obiettivo era quello di motivare i ragazzi a un apprendimento attivo e dinamico dell'Analisi Matematica e di coinvolgerli il più possibile nel percorso da realizzare. Dovendo lavorare a gruppi, interagire, e mettere a confronto le proprie idee con quelle degli altri, infatti, la scelta è stata condivisa con interesse ed entusiasmo. In alcune situazioni, inoltre, mi sono servita anche della Storia come ottimo strumento didattico, non solo per incuriosire gli studenti, ma anche per proporre didatticamente l'evoluzione storica degli studi e magari suscitare in loro curiosità sempre nuove.

### L'intervento didattico

Nello sviluppo del progetto si è tenuto conto delle indicazioni didattiche suggerite nei Programmi Ministeriali: partendo da una data situazione problematica, l'alunno sarà portato prima a formulare un'ipotesi di soluzione, poi a ricercare il procedimento risolutivo mediante il ricorso di conoscenze già acquisite ed, infine, ad inserire il risultato ottenuto in un organico quadro teorico complessivo, tenendo conto dell'uso dell'elaboratore elettronico e delle connessioni che la matematica ha con altre discipline tecniche dell'indirizzo.

Dopo aver illustrato alla classe la proposta di lavoro in termini di contenuti, obiettivi e tempi, e dopo aver giustificato le scelte effettuate, ho pensato di introdurre l'argomento offrendo loro un primo approccio di tipo storico.

La storia della matematica, infatti, si è rivelata un efficace mezzo didattico per creare una situazione problematica, cioè una situazione di apprendimento in cui gli studenti sono stati stimolati a formulare ipotesi facendo ricorso alla creatività e all'intuizione.

Siamo partiti dal celebre paradosso di "Achille e la tartaruga", formulato da Zenone di Elea intorno al 400 a. C.

*Un giorno il Più veloce Achille, passeggiando in un bosco, incontrò una tartaruga.*

*Achille le chiese: "Che cosa stai facendo?"*

*La tartaruga rispose: "Mi sto allenando per una corsa, io sono la tartaruga più veloce di questo bosco".*

*Achille si mise a ridere e volle sfidare la tartaruga, le propose così una gara che lei accettò.*

*Achille, considerandosi molto più veloce dell'avversario, decise di dare alla tartaruga un po' di vantaggio. La gara iniziò ed Achille impiegò un po' di tempo per arrivare al punto da dove era partita la tartaruga; nel frattempo lei aveva già percorso un pezzettino di strada.*

*Achille arrivò subito al nuovo punto dov'era la tartaruga, ma lei aveva già ripercorso un altro breve tratto. A questo punto entrambi si fermarono, si sedettero su una collinetta e cominciarono a parlare fra loro.*

*"Nonostante io sia più lenta per ora non sei riuscito a raggiungermi, o Achille Più veloce"*

*"Amica tartaruga, non gioire così presto; siamo solo a metà percorso, sono sicuro che prima della fine della corsa ti supererò e vincerò la sfida."*

*"E va bene, continuiamo, ma lasciamo quel piccolo vantaggio che mi hai concesso."*

*"Certo, non vorrei che la gara finisse troppo in fretta."*

*Così ripartirono, con la tartaruga in vantaggio. Si fermarono ad ogni frazione di percorso, sempre con un po' di vantaggio alla tartaruga.*

*Al traguardo la vincitrice fu proprio la tartaruga, e non Achille il Più veloce, il quale, per colpa di quel piccolissimo vantaggio, non era riuscito a raggiungerla.*

Dopo aver letto insieme alla classe il brano, abbiamo cercato di darne una semplice traduzione in termini matematici.

In una gara di corsa Achille, che indichiamo con  $A$  e la tartaruga, che indichiamo con  $T$  partono inizialmente (quindi al tempo  $t_0$ ) dalle posizioni  $x_0$  e  $x_1 > x_0$ , rispettivamente.

In un tempo  $t_1$ ,  $A$  raggiungerà la posizione  $x_1$  ma, nello stesso tempo,  $T$  avrà raggiunto una posizione  $x_2 > x_1$ .

Per arrivare a  $x_2$ ,  $A$  impiegherà un tempo  $t_2$ , ma in questo tempo  $T$  si sarà spostata in  $x_3$  e così via...

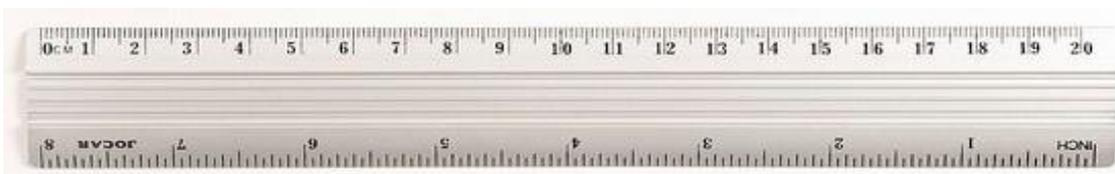
A questo punto le considerazioni sono state due:

O si ammette che la somma di infinite quantità positive:  $t_0 + t_1 + t_2 + \dots$  possa dare un risultato finito, o si deve concludere che Achille non riuscirà mai a raggiungere la Tartaruga!

D'altra parte non è così paradossale che una somma di infiniti addendi positivi, una volta che sia stata ben definita, possa dare un risultato finito.

Per convincerci di ciò abbiamo costruito insieme un semplice esempio.

Abbiamo realizzato un righello di 20 cm e abbiamo usato questo procedimento simpatico e bizzarro.



Abbiamo diviso il righello a metà e abbiamo misurato il primo pezzo: abbiamo ottenuto 10 cm; poi abbiamo diviso a metà il secondo pezzo e ne abbiamo misurato la prima parte: abbiamo ottenuto 5 cm; il rimanente pezzo l'abbiamo ancora diviso a metà ottenendo 2,5 cm ... e così via indefinitamente.

Ciò che abbiamo ottenuto non è stato altro che una somma infinita,

$$10 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 2,5 \text{ cm} + 1,25 \text{ cm} + \dots$$

la quale, secondo le aspettative formulate dai ragazzi dovrebbe avere come risultato 20 cm.

Con questi semplici e interessanti problemi – stimolo ho ottenuto l'attenzione degli studenti e, soprattutto il loro coinvolgimento ponendoli di fronte a situazioni inizialmente non 'puramente matematici'.

Il passo successivo è stato quello di far capire loro che gli esempi precedenti avevano bisogno di una formulazione matematica molto più rigorosa.

La formalizzazione dei concetti è partita da una domanda che i ragazzi si sono posti:

“Siccome ci aspettiamo che la somma precedente debba dare come risultato 20 cm, come possiamo sommare tutti i termini ottenuti?”

Mi è sembrato molto naturale dare, per prima cosa, dei “nomi” ai numeri che abbiamo trovato.

Abbiamo chiamato:

$$\begin{aligned} a_1 &= 10 \\ a_2 &= 5 \\ a_3 &= 2,5 \\ a_4 &= 1,25 \end{aligned}$$

...

il che ci ha suggerito, con molta naturalezza, che avremmo potuto fare l'operazione precedente di somma senza alterarne il significato:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

e in forma compatta, essendo una somma di infiniti termini:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

che prende il nome di SERIE NUMERICA, con  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  successione di numeri reali.

In tutto il ragionamento fatto con la classe, però, mi sono resa conto che c'era un problema che stava alla base di tutto ciò che era stato detto, principalmente perché avevo percepito una sorta di smarrimento. Il problema era:

“Se fin'ora l'operazione di somma è stata fatta sempre con un numero finito di addendi, come è possibile che si possa fare anche una somma infinita e avere come risultato un numero finito?”

La scrittura che avevamo utilizzato, infatti, rappresentava una somma infinita di addendi e, in pratica, la mente dei ragazzi si rifiutava quasi di credere che tutto ciò potesse avere senso.

L'intervento è stato più che sensato a mio parere e, per ovviare a questo problema ho dato significato al simbolo introdotto in precedenza, costruendo un'altra successione  $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  i cui termini sono così definiti:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\dots \dots \dots \\ s_k &= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Abbiamo chiamato il numero  $s_k$  somma parziale (o ridotta)  $n$ -sima della serie e alla successione  $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  e gli abbiamo dato il nome di successione delle somme parziali della serie.

Il tutto l'abbiamo condensato con un'unica scrittura sintetica:

$$s_k = \sum_{n=0}^k a_n \text{ per } k = 0, 1, 2, \dots$$

precisando che, l'indice rispetto a cui si somma è sempre un *indice muto*, cioè se si sostituisce  $n$  con  $i$  oppure  $j$ , o qualsiasi altra lettera, il valore dell'espressione non cambia.

Una volta costruita tale successione, ragionando sull'indice  $k$  della sommatoria siamo riusciti a capire che, per ottenere ciò da cui eravamo partiti (e cioè la somma infinita di termini) bisogna passare al limite di  $s_n$ , cioè:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

È stato interessante sottolineare come, l'ultima formula scritta abbia spiegato in che modo il concetto di serie abbia tradotto con precisione l'idea di “*somma di infiniti termini*”.

In particolare, con quanto detto, ho pensato che a questo punto, i ragazzi sarebbero stati pronti a capire il significato di una frase del tipo:

“Determinare il carattere di una serie”

infatti, è bastato dire che studiando il limite della successione delle somme parziali, non avremmo fatto altro che stabilire la convergenza, divergenza o irregolarità di una serie.

In particolare ho precisato che:

- se  $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k$  è un numero finito reale  $l$  la serie sarà **convergente**

in tal caso diremo che la sua somma vale  $l$ , cioè che la somma è pari al risultato del limite;

- se  $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k$  è infinito, la serie sarà **divergente**.

In particolare se il segno di infinito è positivo divergerà positivamente, viceversa negativamente;

- se  $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k$  non esiste, la serie sarà **irregolare** o **indeterminata**.

Per convincere i ragazzi che sarebbero stati in grado di affrontare un semplice esercizio sullo studio della convergenza di una serie, abbiamo cercato di progettare insieme un esempio.

### Converge o non converge?

Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $a_n = n$ . Consideriamo cioè come successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  associata alla serie la successione che ha per termini i numeri naturali.

In pratica, per rifarci alla notazione utilizzata abbiamo scritto i primi termini esplicitamente:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \\ a_3 &= 3 \\ &\dots \dots \dots \\ a_{100} &= 100 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Abbiamo costruito, a questo punto la successione delle somme parziali  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  associata alla successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = 1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 = 1 + 2 = 3 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 3 = 6 \\ &\dots \dots \dots \\ s_8 &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

È stato simpatico notare come la classe (senza alcun suggerimento) abbia capito con questo esempio che il termine  $s_n$  non era altro che la somma dei primi  $n$  termini della successione dei numeri naturali, cioè la famosa **somma di Gauss**:

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Per quanto detto prima, per determinare il carattere della serie, era sufficiente determinare:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$$

Dunque all'unanimità la risposta dei ragazzi è stata: “La nostra serie diverge positivamente”.

Ma era davvero tutto così semplice e ovvio, quasi come se fosse un gioco lo studio del carattere di una serie?

La risposta a questa domanda (quasi aspettata dalla classe) ha bloccato un po' l'entusiasmo dei ragazzi, poiché immaginavano bene che, una situazione quasi ideale come la precedente non poteva sempre presentarsi.

Ho dovuto sottolineare, più di una volta, che in generale, non avremmo avuto alcun limite da calcolare, poiché lo studio del carattere di una serie sarebbe andato ben oltre a tutto ciò.

### Domanda stimolo:

Mi era sembrato curioso porre alla classe il seguente quesito

“Se l'indice della serie parte da 1 oppure da un numero  $k > 1$ , cambia il carattere della serie?”

In effetti i ragazzi hanno risposto bene:

Il carattere di una serie non cambia se si trascura un numero finito di termini, specificando, però, che nel caso in cui la serie dovesse convergere ed è richiesto il calcolo della somma della serie, essa cambierebbe se vengono tralasciati alcuni termini.

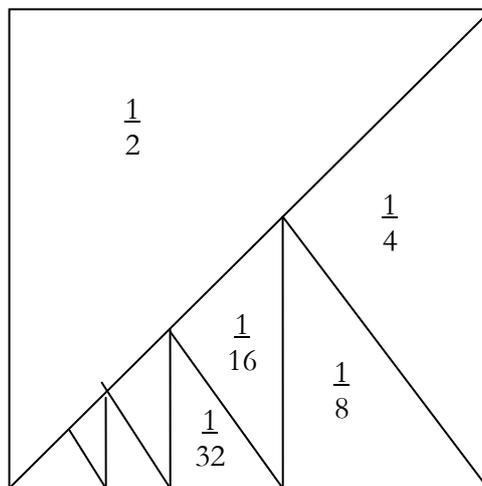
E l'osservazione non è stata fatta a caso perché a questo punto ho pensato di introdurre alcune “serie speciali”, e mettere in evidenza la proprietà appena ricavata.

### Una “serie speciale”

Partendo dal presupposto che sono sempre più convinta che l'immagine della matematica che dovremmo dare in una scuola (e, quindi, in particolare in una classe) sia quella di una disciplina creativa e dinamica, è importante imparare a proporre strategie e metodi di insegnamento – apprendimento adeguati al contesto in cui operiamo.

Quindi, in linea con il mio pensiero, e per non ‘regalare’ ai ragazzi delle definizioni che, magari a fine lezione non avrebbero più ricordato, ho pensato di introdurre la **serie geometrica**, partendo sempre da un esempio, semplice e simpatico.

Considerando un quadrato di lato 1, in cui abbiamo man mano ritagliato dei triangoli rettangoli, come in figura:



L'osservazione è stata la seguente: questi infiniti triangolini esauriscono completamente la superficie del quadrato e, dunque, la somma infinita delle loro aree è uguale all'area totale del quadrato, cioè 1.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \dots \rightarrow 1$$

Con i concetti introdotti fin'ora i ragazzi stessi hanno suggerito bene di scrivere:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

E il mio intervento mi ha permesso di dare, a questa serie, il nome di **serie geometrica**.

Necessario sempre il rigore nella formalizzazione dei concetti:

Ho spiegato alla classe che, una serie geometrica, è una serie del tipo:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$$

dove  $q$  è detta **ragione della serie**.

E tale serie:

Converge per  $|q| < 1$  e, in questo caso, converge alla somma  $\frac{1}{1-q}$

Non converge per  $q \geq 1$

Irregolare per  $q \leq -1$

La scelta di omettere la dimostrazione sullo studio delle somme parziali per determinarne il carattere, è stato preso insieme all'insegnante curricolare, poiché essendo stato questo l'ultimo argomento trattato, e dovendo introdurre altri concetti, non abbiamo voluto 'caricare' di ulteriori nozioni gli studenti.

### Le serie a Termini Positivi, la Serie Armonica e i Criteri di Convergenza

Tutto ciò che è stato detto fin'ora ha avuto l'intento di dare significato all'addizione di un numero infinito di termini, specificando sempre che alcune volte tale addizione dà come risultato un numero, altre volte non dà alcun risultato.

In particolare, dopo aver introdotto le serie a termini positivi, sono stati dati i criteri di convergenza per stabilirne il carattere.

Si chiamano **serie a termini positivi**, le serie i cui termini sono tutti positivi.

In particolare per questo tipo di serie abbiamo dato il seguente:

TEOREMA

**Una serie a termini positivi (oppure non negativi) può soltanto essere convergente oppure divergente positivamente.**

Un esempio di serie a termini positivi: la **serie armonica**.

Per questa serie ho pensato innanzitutto di raccontare brevemente un po' sul perché è stato dato questo nome.

È così chiamata poiché ogni suo termine è la media armonica del termine che lo precede e di quello che lo segue, e ho specificato che la media armonica **m** fra due numeri a e b è definita in modo che la sua inversa  $\frac{1}{m}$  sia la media aritmetica degli inversi a e b.

E che la parola 'armonia' risale ai tempi di Pitagora, quando con questo nome, i greci intendevano l'arte di ricercare un numero 'ben posizionato', cioè un medio proporzionale fra altri due numeri.

La serie armonica era esattamente questa:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

che diverge.

A questo punto i ragazzi erano pronti anche a studiare la convergenza della serie armonica **generalizzata**:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

che:

Converge per  $\alpha > 1$

Diverge per  $\alpha \leq 1$

Inoltre, sono stati esaminati quattro criteri che permettono di stabilire il carattere di una serie a termini positivi.

### Il criterio del Confronto

Siano:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad e \quad \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$$

due serie a termini non negativi e tali che:

$$a_k \leq b_k$$

definitivamente.

Allora valgono le seguenti implicazioni:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \text{ convergente} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ convergente}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ divergente} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \text{ divergente}$$

Inoltre:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$$

è detta **maggiorante**, mentre

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

è detta **minorante**.

### Il criterio del Confronto

Date le serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad e \quad \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$$

entrambi a termini positivi, se esiste finito il limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \neq 0$$

allora le due serie hanno lo stesso carattere.

### Il criterio del Rapporto

Data una serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

a termini positivi tale che esista finito il limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l$$

Se  $l < 1$ , la serie è convergente

Se  $l > 1$ , la serie è **divergente**

Se  $l = 1$ , NON è possibile decidere il carattere della serie.

### Il criterio della Radice

Data una serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

a termini positivi tale che esista finito il limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k} = l$$

Se  $l < 1$ , la serie è convergente

Se  $l > 1$ , la serie è divergente

Se  $l = 1$ , non è possibile decidere il carattere della serie.

### Didattica laboratoriale

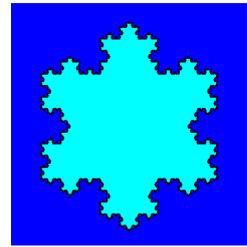
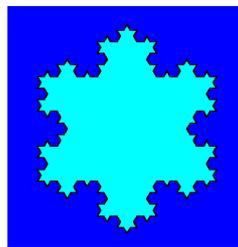
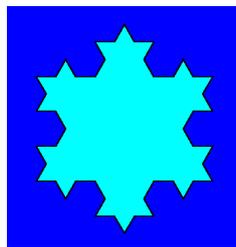
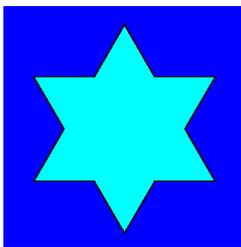
...per disegnare un semplice **fiocco di neve** con Geogebra

Seguiamo semplici passi per costruire un fiocco di neve utilizzando il software Geogebra.

Disegnare un triangolo equilatero di lato 1 e “incollare” al centro di ogni suo lato un triangolo equilatero di lato  $1/3$ ;

al centro di ogni lato della nuova figura (ora ci sono 12 lati) “incollare” un altro triangolo equilatero di lato  $1/9$  e procedere avanti così...

con pazienza si otterrà un magnifico fiocco di neve.



**OSSERVAZIONE didattica:** la particolarità di questa figura è che pur avendo perimetro infinito ha superficie finita.

Infatti, nel costruire il fiocco di neve bisogna via via “attaccare” al triangolo iniziale dei triangolini di area sempre  $1/9$  della precedente. Così procedendo si ottiene una serie geometrica di ragione minore di 1 che, dunque, converge e il nostro fiocco di neve avrà area finita. Non è così, invece, per il perimetro: si ottiene sempre una serie geometrica ma con ragione maggiore di 1 che, dunque, diverge.

### Le serie a Termini di Segno Qualunque

Dopo aver lavorato con le Serie a Termini Positivi, così come mi aspettavo, i ragazzi si sono chiesti come si potrebbe studiare una Serie che, però, non presenta queste caratteristiche.

Era chiaro che bisognava introdurre le Serie di Segno Qualunque, serie cioè i cui termini sono numeri sia positivi che negativi. In particolare, esistono serie a termini di segno alterno.

#### DEFINIZIONE

**Si chiama serie a termini di segno alterno una serie dove i termini di posto dispari sono positivi e quelli di posto pari sono negativi o viceversa.**

Una serie di questo tipo si presenta nella forma:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

..un esempio di serie a segni alterni

Avendo già studiato la convergenza della serie armonica, ho pensato di iniziare l'argomento introducendo la seguente serie e confrontarla con la precedente.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$

Domanda stimolo

Le due serie hanno lo stesso carattere considerando che il termine generale è analogo?

La risposta al quesito è ovviamente negativa e per dare conferma di ciò abbiamo introdotto in concetto di convergenza assoluta (partendo dalla definizione di serie dei moduli) e il criterio di Leibnitz.

**DEFINIZIONE**

Si dice serie dei moduli associata alla serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

la serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$$

i cui termini altro non sono se non i valori assoluti dei corrispondenti termini della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

**Osservazione 1:**

In base alla definizione di valore assoluto, la serie dei moduli è sempre una serie a termini positivi e come tale potrà solo convergere o divergere positivamente.

Detto ciò è stata data la **definizione** di convergenza assoluta:

Una serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

Si dice assolutamente convergente se la serie dei moduli ad essa associata è convergente.

E allora, come studiare la convergenza assoluta di una serie numerica?

Innanzitutto scrivendo la serie dei moduli e studiando il carattere della serie.

Come?

Essendo la serie a termini positive abbiamo potuto utilizzare tutti i criteri già visti.

... e concludendo

Se la serie dei moduli converge allora la nostra serie di partenza **convergerà assolutamente**.

E se la serie dei moduli diverge (positivamente)?

Sicuramente la serie di partenza non convergerà assolutamente. Essa potrà allora divergere o convergere ed in tal caso abbiamo parlato di convergenza semplice.

**Osservazione 2**

Quando la serie dei moduli non converge e, quindi, non si può parlare di convergenza assoluta, non si può concludere dicendo che la serie di partenza **NON** converge.

**E' un errore gravissimo!**

Riprendendo la serie proposta prima, infatti, abbiamo dimostrato insieme che, qualora non vi fosse convergenza assoluta non si può dire nulla sulla serie in esame: infatti, essa potrebbe divergere ma anche convergere semplicemente.

Alla serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$

associamo la serie dei moduli

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

Sappiamo che essa diverge positivamente, pertanto la serie di partenza non converge assolutamente, ma per il momento non possiamo dire nient'altro.

Per continuarne lo studio abbiamo dovuto introdurre il

**Criterio di Leibnitz:**

Sia

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

una serie di segno variabile, con  $a_k \geq 0$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Se valgono le seguenti ipotesi:

1. la successione  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è infinitesima, ovvero il

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$$

2. la successione  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è decrescente

Allora la serie data converge.

Senza nient'altro da aggiungere, i ragazzi stessi hanno capito che il criterio di Leibnitz è uno fra i più immediati criteri esistenti per la convergenza delle serie numeriche a segno variabile, in quanto richiede solo la verifica delle condizioni 1. e 2.

Se esse valgono possiamo affermare che la serie data converge senza fare nient'altro.

E continuando, quindi, con lo studio della precedente serie, abbiamo verificato che le condizioni sono entrambe verificate.

Infatti, poiché:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} = 0$$

e

$$\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{1}{k} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

è una successione decrescente, per il criterio di Leibnitz la nostra serie converge.

Abbiamo così un esempio di serie che non converge assolutamente ma che converge semplicemente, a testimonianza del fatto che la convergenza assoluta non ci permette di dire altro sul carattere della serie in esame.

**Riassumendo**

Se una serie è a termini positivi per studiare la convergenza si utilizzano i quattro criteri esaminati in precedenza;

Se una serie è a segno variabile si costruirà la serie dei moduli (che è a termini positivi);

Se la serie dei moduli converge allora convergerà assolutamente e quindi semplicemente (e l'esercizio terminerà);

Se la serie dei moduli non converge possiamo solo dire che non vi è convergenza assoluta e bisogna procedere con lo studio della convergenza semplice utilizzando il criterio di Leibnitz.

### **Approfondimento**

Il concetto di serie numerica, ampiamente discusso, è il primo passo per introdurre serie del tipo più generale, ossia *serie di funzioni*. In realtà questo tipo di serie, seppur trattate poco dal punto di vista matematico (scolasticamente parlando), sono molto familiari agli studenti poiché le serie di funzioni, come ad esempio le serie di Fourier, hanno una vasta gamma di applicazioni nel campo dell'elettronica, della meccanica e dell'informatica. In discipline come sistemi automatici o elettronica digitale, l'analisi di Fourier, infatti, è largamente utilizzata.

### **Bibliografia**

- [1] F. Conti, P. Acquistapace, A. Savojni. *Analisi Matematica – Teoria e Applicazioni*, McGraw – Hill.
- [2] M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa. *Analisi Matematica 1*, Zanichelli, 2009.
- [3] M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa. *Analisi Matematica 2*, Zanichelli, 2009.
- [4] M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi. *Matematica Verde – con Maths in English*, Zanichelli, 2012.
- [5] M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi. *Matematica Verde, modulo epsilon*. Serie, la serie di Fourier, la trasformata di Laplace. Zanichelli, 2012.

# 201. Una breve presentazione del teorema di Frobenius ed alcune applicazioni

Sebastiano Ferraris

sebastiano.ferraris@gmail.com

*In memoria del professor*

*Sergio Console*

## Sommario

Così come sotto determinate condizioni ad un punto di un campo vettoriale è possibile assegnare una curva integrale, ad una famiglia di campi vettoriali è possibile associare (certamente con altre condizioni) una sorta di “ipersuperficie integrale”, mediante l’integrazione di tale famiglia sulla varietà. Il noto teorema di Cauchy (o di Picard-Lindelöf) fornisce le condizioni necessarie e sufficienti per integrare un campo vettoriale; il teorema di Frobenius, tema principale di questo articolo, fornisce invece le condizioni necessarie e sufficienti per integrare la famiglia di campi vettoriali. Oltre che sui campi vettoriali, il teorema di Frobenius può essere formulato anche sulla loro struttura gemellare, cioè le forme differenziali. Ogni forma differenziale può infatti essere vista come l’applicazione locale di un campo vettoriale e viceversa ogni campo vettoriale è una visione globale di una forma differenziale. Dopo una introduzione sulle definizioni fondamentali, si arriva, nel terzo paragrafo, alla dimostrazione del teorema di Frobenius, mentre nel terzo paragrafo sono introdotti i gruppi e le algebre di Lie; in analogia al dualismo campo vettoriale - forma differenziale le algebre di Lie vengono considerate come una visione locale dei gruppi di Lie. Nel quinto paragrafo si presenta il teorema di corrispondenza di Lie, conseguenza notevole del teorema di Frobenius, seguito da tre corollari.

## 1 Campi vettoriali

### 1.1 Definizioni principali

**Definizione 1.1** *Sia  $M$  varietà differenziabile  $C^\infty$  di dimensione  $n$ . Un **campo vettoriale** su  $M$  è una assegnazione di un vettore tangente  $X_p \in T_p M$  ad ogni punto  $p \in M$  tale che  $X_p$  sia differenziabile rispetto a  $p$ .*

Sia  $(U; x_1, \dots, x_n)$  carta locale di  $M$ , intorno di  $p$ , allora per ogni  $p \in M$  un campo vettoriale  $X$  può essere formulato mediante la sua **espressione locale**:

$$X_p = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

dove le funzioni  $a_i$  appartengono a  $\mathcal{C}^\infty(U)$ , e definiscono il campo vettoriale nella base  $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ . Sia  $(V; y_1, \dots, y_n)$  un'altra carta locale, con  $p \in V$ , allora

$$X_p = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \Big|_p \right) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_p$$

L'insieme di tutti i campi vettoriali sulla varietà  $M$  è indicato con  $\mathfrak{X}(M)$ . Si può definire in modo naturale una somma, come somma di vettori nei piani tangenti ed un prodotto scalare, come prodotto di un reale per un vettore tangente:

$\mathfrak{X}(M)$  è spazio vettoriale sui reali:

$$\begin{aligned} (X + Y)_p &= X_p + Y_p & \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \\ (\lambda X)_p &= \lambda X_p & \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dal fatto che  $X$  è definito su ogni punto di  $M$ , può essere considerato assieme ad una funzione continua sulla varietà mediante prodotto<sup>1</sup>: si ha quindi una struttura di  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -modulo

$$(fX)_p = f(p)X_p \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M) \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

Inoltre da ogni funzione  $f$  continua e definita in  $p$  e da ogni vettore in  $T_pM$  si può calcolare la derivata direzionale; segue che i campi vettoriali agiscono su  $\mathcal{C}^\infty(M)$  come:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \\ (X, f) &\longmapsto Xf : \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto (Xf)(p) = X_p f \end{aligned}$$

Nella carta locale lo scalare  $X_p f$  si calcola come

$$(Xf)(p) = X_p f = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p$$

e rappresenta la derivata direzionale di  $f(p)$  lungo il vettore  $X_p \in T_pM$ . Questo concetto è alla base della notazione  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  per indicare i versori della base del campo vettoriale  $X$ .

L'azione di  $\mathfrak{X}(M)$  su  $\mathcal{C}^\infty(M)$  è una derivazione, cioè:

$$\begin{aligned} X(\lambda f + \mu g) &= \lambda Xf + \mu Xg & \forall X \in \mathfrak{X}(M) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ X(fg) &= fXg + gXf & \forall X \in \mathfrak{X}(M) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M) \end{aligned}$$

Il modo in cui un campo vettoriale si comporta agendo sulla funzione  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  determina completamente tale campo:

<sup>1</sup>Se ad esempio  $M$  è un conduttore,  $X$  è la densità di corrente che attraversa  $M$  e  $f(p)$  è l'area della sezione di  $M$  perpendicolare a  $X_p$ , allora  $f(p)X_p$  è la formula dell'intensità di corrente.

**Proprietà 1.1** Sia  $M$  varietà differenziabile  $C^\infty$  di dimensione  $n$ , siano  $X, Y$  campi vettoriali su tale varietà ed  $f \in C^\infty(M)$ . Se  $Xf = Yf$  allora  $X = Y$ .

**Dimostrazione:** E' sufficiente provare che vale la tesi su un punto generico della varietà. Sia allora  $p \in M$  ed  $(U; x_1, \dots, x_n)$ , carta locale ed intorno di  $p$ . Siano

$$X_p = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \quad Y_p = \sum_{i=1}^n b_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

le espressioni locali di due campi vettoriali  $X$  ed  $Y$ . Dal lemma di estensione (pag. 26 Morita [4]), esiste  $V$  aperto,  $p \in \bar{V} \subset U$ , ed esistono le funzioni  $\tilde{x}_i$  estensioni di  $x_i$  a tutta la varietà  $M$  tali che  $x_i = \tilde{x}_i$  su  $V$  e tali che  $\tilde{x}_i = 0$  su  $M \setminus U$ .

Allora, per ogni  $i$  compreso fra 1 ed  $n$  si ha

$$X_p \tilde{x}_i = \sum_{j=1}^n a_j(p) \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} \Big|_p = a_i(p)$$

$$Y_p \tilde{x}_i = \sum_{j=1}^n b_j(p) \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} \Big|_p = b_i(p)$$

Per ipotesi  $X_p \tilde{x}_i = Y_p \tilde{x}_i$  quindi  $a_i(p) = b_i(p)$  per ogni  $i$ . □

### 1.1.1 Definizione alternativa di campo vettoriale

Data una curva  $C^\infty$  tracciata su  $M$   $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ , si definisce <sup>2</sup> campo vettoriale  $X$  sulla curva  $\sigma$  la mappa  $X : [a, b] \rightarrow TM$  che solleva  $\sigma$ , cioè tale che  $\pi \circ X = \sigma$ , dove  $\pi : TM \rightarrow M$  proiezione canonica dal fibrato tangente alla varietà.

## 1.2 Bracket di campi vettoriali

**Definizione 1.2** Dati  $X$  ed  $Y$  campi vettoriali sulla varietà differenziabile  $M$  allora si definisce **bracket di campi vettoriali** la funzione:

$$[X, Y] : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

$$f \mapsto [X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

$[X, Y]$  è una derivazione. Infatti per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , per ogni  $f, g \in C^\infty(M)$  e per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , valgono

$$[X, Y](\lambda f + \mu g) = \lambda[X, Y]f + \mu[X, Y]g$$

$$[X, Y](fg) = f[X, Y]g + g[X, Y]f$$

<sup>2</sup>Come fatto ad esempio nel Warner [5].

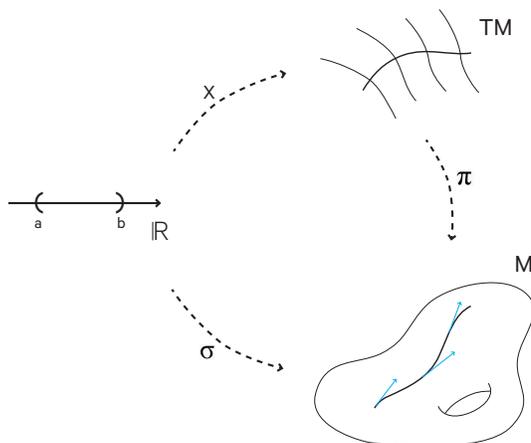


Figura 1: Campo vettoriale come sollevamento di una curva tracciata

Ed essendo una derivazione, soddisfa la definizione (nella formulazione analitica [3], cioè non basata sui germi) di vettore tangente e quindi

$$\forall p \in M \quad [X, Y]_p \in T_p M$$

Ma questo non basta per poter dire che  $[X, Y]$  è un campo vettoriale definito su  $M$ : è necessario anche dimostrare che è  $\mathcal{C}^\infty$  rispetto a  $p \in M$ .

**Proprietà 1.2** *Siano  $X$  ed  $Y$  campi vettoriali definiti sulla varietà differenziabile  $M$ , allora  $[X, Y]$  è  $\mathcal{C}^\infty(M)$ .*

**Dimostrazione:** Si considera l'espressione locale di  $[X, Y]$ : siano

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

si verifica che

$$\begin{aligned} [X, Y] &= XY - YX \\ &= \sum_{j=1}^n (Xb_j) \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^n (Ya_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Sia ora fissata  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , segue che:

$$[X, Y]f = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Calcolata nel punto  $p \in M$  risulta

$$[X, Y]_p f = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \Big|_p - \sum_{i=1}^n b_i(p) \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \Big|_p \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_p$$

Per  $X, Y$  campi vettoriali ed  $f \in C^\infty$  fissati sulla varietà, al variare di  $p$  in  $M$   $[X, Y]_p f$  è composizione di funzioni differenziabili e quindi è differenziabile.  $\square$

**Corollario 1.1** *Siano  $X$  ed  $Y$  campi vettoriali definiti sulla varietà differenziabile  $M$ , allora  $[X, Y]$  è un campo vettoriale.*

La seguente proprietà, che può essere verificata mediante calcoli diretti, caratterizza i bracket di campi vettoriali:

**Proprietà 1.3** *Siano  $X, X', Y, Y'$  e  $Z$  campi vettoriali,  $f$  e  $g$  funzioni differenziabili su  $M$  ed  $\lambda$  e  $\mu$  scalari, allora valgono:*

1. *Linearità rispetto alla struttura di spazio vettoriale, per entrambi i campi del bracket:*

$$[\lambda X + \mu X', Y] = \lambda[X, Y] + \mu[X', Y]$$

$$[\lambda X + \mu X', Y] = \lambda[X, Y] + \mu[X', Y]$$

2. *Proprietà antisimmetrica:*

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

3. *Identità di Jacobi:*

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

4. *Non linearità per la struttura di  $C^\infty(M)$ -modulo:*

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

I primi 3 punti della proprietà precedente affermano che l'insieme dei campi vettoriali su una varietà differenziabile  $M$ , con  $[\cdot, \cdot]$  è un'algebra di Lie sui reali. Pertanto i bracket di campi vettoriali sono anche chiamati **bracket di Lie**.

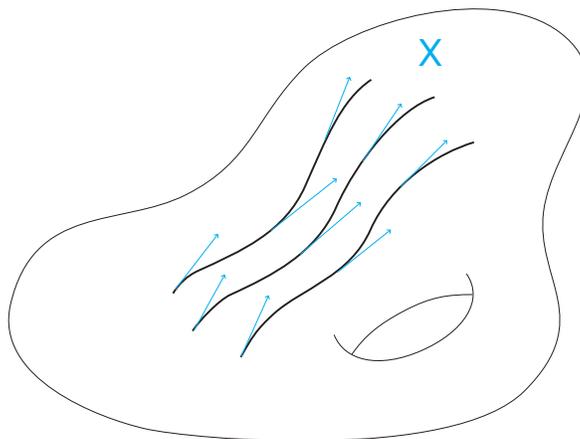


Figura 2: Curve integrali del campo vettoriale  $X$  su  $M$

### 1.3 Curve integrali di campi vettoriali

**Definizione 1.3** Sia  $M$  una varietà differenziabile,  $X$  un campo vettoriale definito su  $M$ , allora una curva  $c : (a, b) \rightarrow M$  è chiamata **curva integrale di  $X$**  se la velocità vettoriale

$$\dot{c}(t) \in T_{c(t)}M \quad t \in (a, b)$$

coincide con il vettore definito da  $X$  nel punto  $c(t)$ :

$$\dot{c}(t) = X_{c(t)} \quad t \in (a, b)$$

Le curve integrali sono quindi i percorsi di elementi puntiformi sulla varietà lasciati liberi di muoversi sotto all'azione del campo vettoriale definito su di essa.

In generale, due curve integrali distinte dello stesso campo vettoriale non hanno intersezioni. Nella definizione alternativa di campi vettoriali data nel paragrafo 1.1.1, si definiscono già i campi vettoriali sulle varietà a partire dalle curve integrali. Il Warner [5] definisce le cose in modo più “economico”, ma meno intuitivo.

**Come ricavare le equazioni delle curve integrali dati  $X$  ed  $M$ .**

Sia  $(U; y_1, \dots, y_n)$  carta locale di  $M$ ,  $p \in U$ . Allora  $X$  può essere espresso localmente su  $U$  come

$$X_q = \sum_{i=1}^n a_i(q) \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_q \quad \forall q \in U \quad a_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$$

Sia  $c : (a, b) \rightarrow U \subset M$  curva integrale cercata, parametrizzata per semplicità in modo tale che  $c(0) = p$ . Allora nel sistema di coordinate locali si può descrivere la posizione di  $c(t)$  come

$c(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \frac{\partial}{\partial y_i}$ . La sua velocità vettoriale è data da

$$\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad t \in c^{-1}(U)$$

e ponendo  $\dot{c}(t) = X_{c(t)}$  otteniamo:

$$\sum_{i=1}^n \frac{dx_i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^n a_i(c(t)) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

che equivale al sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad i = 1, \dots, n$$

Le condizioni iniziali del sistema di equazioni differenziali sono fornite dalla condizione posta sulla parametrizzazione:  $x_i(0) = p_i$  per  $p_i$  coordinate locali di  $p$ .

**Osservazione 1.1** *Se si sceglie un diverso punto iniziale  $q \in U$ , variano le condizioni iniziali, ma non il sistema di equazioni differenziali.*

L'esistenza e l'unicità delle curve integrali per  $X$  su  $M$  è garantita dal teorema di Cauchy, infatti  $a_i \in C^\infty(U)$  cioè le funzioni che definiscono il campo vettoriale sono continue e quindi lipschitziane.

## 1.4 Campi vettoriali commutativi e gruppo ad un parametro

**Definizione 1.4** *Sia  $M$  varietà differenziabile, due campi vettoriali  $X$  ed  $Y$  su  $M$  sono detti commutativi se  $[X, Y] = 0$ .*

**Esempio 1.1**  $X = y \frac{\partial}{\partial x} - 2xy^2 \frac{\partial}{\partial y}$  ed  $Y = \frac{\partial}{\partial y}$  campi vettoriali definiti sulla varietà  $\mathbb{R}^2$ . Il loro bracket di Lie è dato da

$$[X, Y] = -\frac{\partial}{\partial x} - 4xy \frac{\partial}{\partial y}$$

*I due campi non sono commutativi.*

I campi vettoriali commutativi hanno proprietà particolari se confrontati con il gruppo ad un parametro, che sarà introdotto in questo paragrafo per due tipologie distinte di curve integrali.

**Osservazione 1.2** *Una curva integrale su  $M$  del campo vettoriale  $X$  è definita in generale sull'intervallo aperto  $(a, b)$  contenuto nella retta reale, la cui immagine può coinvolgere diverse carte; ma non è sempre possibile estendere  $(a, b)$  a tutta la retta reale.*

Dall'osservazione precedente è possibile distinguere due tipologie di campi vettoriali.

**Definizione 1.5** *Un campo vettoriale  $X$  sulla varietà differenziabile  $M$  è detto **completo** se ogni curva integrale è definita su tutta la retta reale.*

Definiamo il gruppo ad un parametro per trasformazioni locali generato da  $X$ , inizialmente nel caso di  $X$  completo; subito dopo, con le opportune restrizioni, per  $X$  generico.

• Sia  $X$  campo vettoriale completo su  $M$ , allora si può definire una applicazione

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, p) &\longmapsto \Phi(t, p) = c(p)(t) \end{aligned}$$

dove per  $c(p)(t)$  si intende la curva integrale del campo  $X$  definita sul punto  $p$  al punto  $t$  della curva. E' una funzione legata al campo vettoriale  $X$  che fornisce la posizione di un punto  $p$  lasciato libero di muoversi nel campo vettoriale dopo un tempo pari a  $t$ .

Può anche essere interpretato algebricamente come l'azione del gruppo  $(\mathbb{R}, +)$  su  $M$ .

Per  $p$  fissato  $\Phi(t, p)$  è l'orbita del punto sotto all'azione e coincide con la curva integrale del campo passante per  $p$ . Dato che le orbite di una azione sono disgiunte, si ha la conferma del fatto che due curve integrali diverse non hanno punti in comune e sono semplici. L'applicazione  $\Phi$  è ben definita, suriettiva ed è chiamata **flusso associato al campo vettoriale**.

Fissando invece  $t$  è possibile definire una famiglia di applicazioni  $\varphi_t(p)$  come

$$\varphi_t(p) = \Phi(t, p) \quad p \in M$$

Allora il flusso risulta essere definito dall'insieme

$$G = \{\varphi_t : M \rightarrow M \mid t \in \mathbb{R}\}$$

e può essere considerato con l'operazione di composizione, che equivale alla somma di due intervalli di tempo sulle curve integrali. Valgono quindi

1.  $\varphi_0 = id_M$
2.  $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$

L'insieme  $G$  con l'operazione introdotta definisce un gruppo detto **gruppo ad un parametro di trasformazioni** generato da  $X$ .

La 1 e la 2 dicono che l'evoluzione del flusso per un tempo nullo è l'identità e che l'evoluzione del flusso per un tempo pari a  $s + t$  è pari all'applicazione successiva delle due evoluzioni.

• Sia  $X$  campo vettoriale generico su  $M$ , si deve allora restringere il dominio del flusso per poter definire il gruppo ad un parametro.

Dato  $p \in M$  si ha che la curva integrale di  $X$  in  $p$  è data da

$$c : (a_p, b_p) \longrightarrow M \quad c(p) = 0 \quad a_p \in (-\infty, 0) \quad b_p \in (0, \infty)$$

Dove  $a_p$  e  $b_p$  sono gli estremi del dominio della curva integrale del campo vettoriale  $X$  definito nel punto  $p$ .

Si considera l'insieme

$$W = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M \mid a_p < t < b_p \text{ per } (a_p, b_p) = \text{Dom}(c(p))\} \subseteq \mathbb{R} \times M$$

Quindi il flusso associato al campo vettoriale è dato da

$$\begin{aligned} \Phi : W &\longrightarrow M \\ (t, p) &\longmapsto \Phi(t, p) = c(p)(t) \end{aligned}$$

dove  $c(p)(t)$  è definito come prima.

$W$  è un insieme aperto di  $\mathbb{R} \times M$ , intorno di  $\{0\} \times M$  e  $\Phi$  è di classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Come nel caso precedente si può definire una famiglia di applicazioni

$$\varphi_t(p) = \Phi(t, p)$$

e, facendo variare  $p$  in  $M_t$ , dove

$$M_t = \{p \in M \mid a_p < t < b_p \text{ per } (a_p, b_p) = \text{Dom}(c(p))\} \subset M$$

Si ha quindi che il gruppo ad un parametro di trasformazioni è definito, nel caso generico come

$$G = \{\varphi_t : M_t \rightarrow M \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Anche avendo ristretto il dominio dei suoi elementi,  $G$  risulta comunque essere un gruppo, e valgono le stesse osservazioni del caso precedente.

$G$  è detto **gruppo ad un parametro di trasformazioni locali** generato da  $X$ .

Riassumendo, ogni campo vettoriale  $X$  su  $M$  definisce un flusso associato, dal quale si può ricavare il gruppo ad un parametro.

Viceversa si può dimostrare che ogni flusso che ammette gruppo ad un parametro globale su  $M$ , definisce un campo vettoriale  $X$  detto generatore infinitesimo (che non sarà ulteriormente approfondito in queste pagine). Se il campo vettoriale  $X$  è completo, allora  $G$  è sottogruppo commutativo del gruppo degli endomorfismi di  $M$ . Da questa considerazione otteniamo una definizione alternativa di campi vettoriali completi.

**Definizione 1.6** *Un campo vettoriale  $X$  sulla varietà  $M$  si dice **completo** se ogni elemento del gruppo ad un parametro associato ad  $X$  è definito su tutto  $M$ , cioè se  $M_t = M$ .*

## 1.5 Push forward

In questa sezione viene introdotto uno strumento che sarà utilizzato nei capitoli successivi: consente fondamentalmente ad un campo vettoriale  $X$  definito su una varietà  $M$  di agire come derivazione su un'altra varietà  $N$ , purché sia definita la mappa  $F : M \rightarrow N$ .

**Definizione 1.7** Sia  $F : M \rightarrow N$  una mappa fra varietà differenziabili, allora per ogni  $p \in M$  la funzione fra gli spazi tangenti

$$\begin{aligned} F_* : T_p M &\longrightarrow T_{F(p)} N \\ X_p &\longmapsto (F_* X_p) : \mathcal{C}^\infty(N) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &f \longmapsto (F_* X_p)(f) = X_p(f \circ F) \end{aligned}$$

per  $X_p$  vettore in  $T_p M$  e per ogni  $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$  è chiamata **push forward**<sup>3</sup> di  $F$  in  $p$ .

La definizione può essere visualizzata con il diagramma seguente

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}^\infty(M) : X_p \in T_p M & \xrightarrow{F_*} & T_{F(p)} N \ni F_* X_p : \mathcal{C}^\infty(N) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R} & & M & \xrightarrow{F} & N & & \mathbb{R} \\ \downarrow \ddot{g} & & \downarrow g & \searrow f \circ F & \downarrow f & & \downarrow \ddot{f} \\ X_p(g) & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & X_p(f \circ F) \end{array}$$

Quindi il vettore tangente in  $p$  ad  $M$  che non potrebbe essere applicato ad  $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$  come derivata direzionale, può invece essere applicato ad  $f \circ F \in \mathcal{C}^\infty(M)$ <sup>4</sup>. L'operatore  $(F_* X_p)$  è lineare ed è una derivazione. Il push forward della composizione di due mappe  $F : M \rightarrow N$ ,  $G : N \rightarrow P$  fra varietà è la composizione dei push forward delle mappe.

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$$

Cioè

$$\begin{array}{ccccc} & & \overbrace{\hspace{10em}}^{(G \circ F)_*} & & \\ T_p M & \xrightarrow{F_*} & T_p N & \xrightarrow{G_*} & T_p P \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{F} & N & \xrightarrow{G} & P \\ & & \underbrace{\hspace{10em}}_{G \circ F} & & \end{array}$$

Per  $(U_p; x_1, \dots, x_m)$  e  $(V_p; x_1, \dots, x_m)$  carte locali di  $M$  che contengono  $p$ , coordinate locali del push forward del cambiamento di base sono

$$F_* \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

<sup>3</sup>Def di push forward pag. 46, Lee [3]. Pag. 33 e pag. 72 Morita [4].

<sup>4</sup>Sul Morita [4] il push forward viene chiamato differenziale di  $F$  in  $p$ , ed è indicato occasionalmente con  $dF_p$

Il seguente lemma introduce altre due proprietà del push forward, le cui dimostrazioni possono essere ricavate dagli strumenti presentati in queste pagine.

**Lemma 1.1** *Sia  $F : M \rightarrow N$  mappa fra varietà differenziabili, allora valgono*

1.  $(Id_M)_* : T_p M \rightarrow T_p M$  equivale a  $Id_{T_p M}$ .
2. Se  $F$  è un diffeomorfismo, allora  $F_*$  è un isomorfismo.

Si conclude il paragrafo con una proprietà<sup>5</sup> che servirà a dimostrare il teorema di Frobenius.

**Proprietà 1.4** *Siano  $X$  ed  $Y$  campi vettoriali  $C^\infty$  su  $M$  varietà differenziabile e siano  $\{\varphi_t \mid t \in (a_1, b_1) \subseteq \mathbb{R}\}$  e  $\{\psi_t \mid t \in (a_2, b_2) \subseteq \mathbb{R}\}$  gruppi ad un parametro di trasformazioni locali di  $X$  ed  $Y$  rispettivamente, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1.  $X$  ed  $Y$  sono commutativi, cioè  $[X, Y] = 0$ .
2.  $Y$  è invariante rispetto a  $\varphi_t$ , cioè per ogni  $t \in (a_1, b_1) \subseteq \mathbb{R}$   $(\varphi_t)_*(Y) = Y$ .
3.  $\varphi_t$  e  $\psi_t$  sono commutativi, cioè per ogni  $t, s \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) \subseteq \mathbb{R}$

$$\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$$

L'idea della commutatività degli elementi dei gruppi ad un parametro definiti da campi vettoriali distinti giocherà un ruolo cruciale nella dimostrazione del teorema di Frobenius. Siano  $p, q \in M$  tali che

$$q = (\varphi_t \circ \psi_s)(p) = (\psi_s \circ \varphi_t)(p)$$

allora la commutatività implica che un corpuscolo che si muove sulla varietà dal punto  $p$  e segue per  $t$  secondi il campo  $X$  e dopo per  $s$  secondi il campo  $Y$  o per  $s$  secondi il campo  $Y$  e dopo per  $t$  secondi il campo  $X$  raggiunge sempre lo stesso punto  $q$ .

## 2 Varietà integrali

Come visto nella sezione precedente, un campo vettoriale su una varietà associa ad ogni punto della varietà un vettore e l'insieme di questi vettori definiscono un insieme di curve integrali tramite la risoluzione di un problema di Cauchy.

$$X : M \longrightarrow TM$$

$$p \longmapsto X_p = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \subseteq T_p M$$

Cosa succede se si definiscono due campi vettoriali sulla stessa varietà anziché uno solo e se si prova ad integrare una superficie su questi campi?

Posso cioè generalizzare il concetto di curva integrale al concetto di “superficie integrale”?

<sup>5</sup>Prop. 2.18, pag 82, Morita [4].

## 2.1 Distribuzioni completamente integrabili

**Definizione 2.1** Sia  $M$  varietà differenziabile di dimensione  $n$ , una **distribuzione  $r$ -dimensionale**  $\mathcal{D}$  su  $M$  (chiamata anche *sottofibrato tangente*), è una funzione che ad ogni punto  $p \in M$  associa un sottospazio vettoriale  $r$ -dimensionale di  $T_pM$  indicato con  $\mathcal{D}_p$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto \mathcal{D}_p \subseteq T_pM \end{aligned}$$

$\mathcal{D}_p$  è detto di **di classe  $C^\infty$**  rispetto a  $p$  se esiste una  $r$ -upla di campi vettoriali  $C^\infty$ ,  $X^1, \dots, X^r$  definiti in un intorno di  $p$ ,  $U_p$ , tali che siano una base di  $\mathcal{D}_q$  per ogni  $q \in U_p$ . Se  $\mathcal{D}_p$  è di classe  $C^\infty$ , per ogni  $p \in M$  allora  $\mathcal{D}$  è detta **distribuzione di classe  $C^\infty$**

**Definizione 2.2** Sia  $\mathcal{D}$  distribuzione  $r$ -dimensionale di classe  $C^\infty$ , una sottovarietà  $N$  di  $M$  è detta **varietà integrale** di  $\mathcal{D}$  se  $T_pN = \mathcal{D}_p$  per ogni  $p \in N$ .

Se  $N$  è la varietà integrale di  $\mathcal{D}$  allora il suo spazio tangente ha  $r$  vettori linearmente indipendenti.

**Definizione 2.3** Sia  $\mathcal{D}$  distribuzione su  $M$ . Se per ogni  $p \in M$  esiste una varietà integrale di  $\mathcal{D}$ , allora la distribuzione  $\mathcal{D}$  è detta **completamente integrabile**.

**Osservazione 2.1** Una distribuzione  $C^\infty$ , di dimensione 1 è un campo vettoriale, ed in particolare è sempre completamente integrabile.

**Definizione 2.4** Sia  $M$  varietà  $C^\infty$ . Si dice che un campo vettoriale  $X$  su  $M$  **appartiene ad una distribuzione  $\mathcal{D}$**  se  $X_p \in \mathcal{D}_p$  per ogni  $p \in M$ .

**Esempio 2.1** Si propongono alcuni esempi di distribuzioni:

1. Sia  $X$  campo vettoriale sulla varietà  $M$ , allora  $X$  è anche una distribuzione 1-dimensionale.
2. In  $\mathbb{R}^n$  il campo vettoriale generato da  $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k})$  è una distribuzione  $k$ -dimensionale, avente come varietà integrale la sottovarietà  $\mathbb{R}^k$  di  $\mathbb{R}^n$ .
3. Sia  $\mathcal{D}_p$  lo spazio tangente alla sfera centrata nell'origine e passante per  $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , allora  $\mathcal{D}_p$  è localmente generata dai vettori  $(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi})$  in coordinate sferiche per punti diversi dal polo nord e dal polo sud. Per ogni punto  $(x, 0, 0)$  con  $x \in \mathbb{R}_+$  passa una superficie sferica concentrica che corrisponde ad una varietà integrale della distribuzione.

Si conclude il paragrafo con una proprietà <sup>6</sup> basilare per la dimostrazione del teorema di Frobenius, nella formulazione per campi vettoriali:

**Proprietà 2.1** Sia  $\mathcal{D}$  distribuzione  $r$ -dimensionale di classe  $C^\infty$  sulla varietà differenziabile  $M$ . Se  $\mathcal{D}$  è completamente integrabile, allora per ogni  $X, Y$  appartenenti a  $\mathcal{D}$  segue che il campo vettoriale  $[X, Y]$  appartiene a  $\mathcal{D}$ .

<sup>6</sup>Prop 2.15 pag. 80 Morita [4].

**Dimostrazione:** Dal fatto che  $\mathcal{D}$  è completamente integrabile, si hanno due conseguenze:

1. Esiste  $N$  sottovarietà di  $M$  di dimensione  $r$  tale che  $T_p N = \mathcal{D}_p$  per ogni  $p \in M$ .
2. Sia  $(U; x_1, \dots, x_n)$  carta locale per  $U$  intorno di  $p$  e siano  $X$  ed  $Y$  campi vettoriali su  $M$ , la cui espressione locale è data da

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Nell'intesezione della carta locale sulla sottovarietà  $N \cap U$  e dalla definizione di sottovarietà, segue che

$$\forall q \in N \cap U \quad x_{r+1}(q) = x_{r+2}(q) = \dots = x_n(q) = 0$$

inoltre dal punto 1

$$T_q N = \text{span}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r}\right) = \mathcal{D}_q$$

quindi segue che i campi vettoriali  $X$  ed  $Y$  su  $N \cap U$  sono caratterizzati da

$$a_i = b_i = 0 \quad \forall i > r$$

La tesi si ottiene dimostrando che per ogni  $p \in M$   $[X, Y]_p \in \mathcal{D}_p$ . Considero

$$[X, Y]_p = \sum_{i,j=1}^n \left( a_i(p) \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \Big|_p - b_i(p) \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \Big|_p \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p$$

Ed essendo  $X, Y \in \mathcal{D}$ , dal punto 2, segue che

$$a_i(p) \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \Big|_p - b_i(p) \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \Big|_p = 0 \quad \forall i > r$$

Quindi

$$[X, Y]_p = \sum_{i,j=1}^r \left( a_i(p) \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \Big|_p - b_i(p) \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \Big|_p \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \in T_p N$$

che equivale alla tesi:  $[X, Y]_p \in \mathcal{D}_p$ . □

## 2.2 Distribuzioni involutive

**Definizione 2.5** Una distribuzione  $\mathcal{D}$  di classe  $\mathcal{C}^\infty$  definita su  $M$  varietà differenziabile è detta **involutiva** se per ogni  $X, Y \in \mathcal{D}$  si ha che  $[X, Y]_p \in \mathcal{D}_p$ , cioè se vale la tesi della proprietà precedente.

**Osservazione 2.2**  $\mathcal{D}$  è involutiva su  $M$  allora è involutiva anche sulla sottovarietà  $N \subset M$  tramite la restrizione  $\mathcal{D}|_N$ .

La proprietà precedente può essere riformulata con la seguente implicazione:

$$\text{Completamente integrabile} \implies \text{Involutiva}$$

Vale anche il viceversa? A questa domanda risponde il teorema di Frobenius.

## 3 Teorema di Frobenius

In queste pagine ci limitiamo a dimostrare il teorema di Frobenius formulato per campi vettoriali. Accenniamo brevemente alla formulazione per forme differenziali.

### 3.1 Teorema di Frobenius per campi vettoriali

**Teorema 3.1** Una distribuzione  $\mathcal{D}$  di classe  $\mathcal{C}^\infty$  è completamente integrabile se e solo se è involutiva.

**Dimostrazione:** La condizione necessaria è stata dimostrata in 2.1. Si procede alla dimostrazione del viceversa: sia  $\mathcal{D}$  distribuzione involutiva su  $M$  varietà differenziabile di dimensione  $n$ . Per ottenere la tesi si deve costruire una varietà integrale  $N$  di  $\mathcal{D}$ , cioè tale che  $T_p N = \mathcal{D}_p$  per ogni  $p \in M$ .

Sia  $p \in M$ ,  $(U; x_1, \dots, x_n)$  carta locale che contiene  $p$ . Dato che la distribuzione involutiva  $\mathcal{D}$  è di classe  $\mathcal{C}^\infty$ , allora esistono  $r$  campi vettoriali linearmente indipendenti su  $U$ :  $Y^1, \dots, Y^r \in \mathcal{D}$  la cui espressione locale è formulata come

$$Y^i = \sum_{j=1}^n b_j^i \frac{\partial}{\partial x_j} \quad i = 1, \dots, r$$

Ed essendo  $(Y^1, \dots, Y^r)$  campi vettoriali linearmente indipendenti (a meno di un riordinamento dei pedici), segue che per ogni  $q \in U$

$$\det(b_j^i(q)) = \det \begin{pmatrix} b_1^1(q) & b_2^1(q) & \dots & b_r^1(q) \\ b_1^2(q) & b_2^2(q) & \dots & b_r^2(q) \\ \vdots & & & \vdots \\ b_1^r(q) & b_2^r(q) & \dots & b_r^r(q) \end{pmatrix} \neq 0$$

A partire dalla matrice appena introdotta è possibile definire delle nuove funzioni  $a_j^i(q)$  e dei nuovi campi vettoriali come

$$(a_j^i(q)) = (b_j^i(q))^{-1} \quad X^i = \sum_{j=1}^r a_j^i Y^j$$

Cioè i nuovi campi  $X^i$  risultano essere  $X^i = a_1^i Y^1 + a_2^i Y^2 + \dots + a_r^i Y^r$ , e per come sono state definite le  $a_j^i(q)$  in  $U$ , segue che

$$(a_j^i) \cdot (b_j^i) = Id_{r \times r}$$

quindi

$$\begin{aligned} X^i &= a_1^i Y^1 + a_2^i Y^2 + \dots + a_i^i Y^i \dots + a_r^i Y^r \\ &= a_1^i (b_1^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b_2^1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + b_i^1 \frac{\partial}{\partial x_i} + \dots + b_n^1 \frac{\partial}{\partial x_n}) + \\ &+ a_2^i (b_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + b_2^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + b_i^2 \frac{\partial}{\partial x_i} + \dots + b_n^2 \frac{\partial}{\partial x_n}) + \\ &\dots \\ &+ a_i^i (b_1^i \frac{\partial}{\partial x_1} + b_2^i \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + b_i^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \dots + b_n^i \frac{\partial}{\partial x_n}) + \\ &\dots \\ &+ a_r^i (b_1^r \frac{\partial}{\partial x_1} + b_2^r \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + b_i^r \frac{\partial}{\partial x_i} + \dots + b_n^r \frac{\partial}{\partial x_n}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=r+1}^n c_j^i \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Dove  $c_j^i$  sono funzioni su  $U$  determinate dal cambiamento di coordinate effettuato.

(Lo scopo del procedimento è infatti quello di esprimere i campi  $Y^i$  in una nuova base, in modo tale che le prime  $r$  coordinate siano normalizzate).  $X^1, \dots, X^r$  sono linearmente indipendenti e formano una base per la distribuzione  $\mathcal{D}$  in  $U$ .

Dopo questa fase costruttiva si usa l'ipotesi:  $\mathcal{D}$  è una distribuzione involutiva, pertanto segue che

$$[X^i, X^j] = \sum_{k=1}^r f_k X^k \tag{1}$$

D'altro lato, sviluppando i calcoli di  $[X^i, X^j]$ , cioè applicando a una coppia di campi nella espressione locale  $X^i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=r+1}^n c_j^i \frac{\partial}{\partial x_j}$ , si ottiene che  $[X^i, X^j]$  è una combinazione lineare di  $\frac{\partial}{\partial x_{r+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ .

Riassumendo quanto detto:

- $[X^i, X^j]$  è combinazione lineare di  $X^1, \dots, X^r$ .
- $[X^i, X^j]$  è combinazione lineare di

$$\frac{\partial}{\partial x_{r+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$$

Allora necessariamente:

$$f_k(q) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, r \quad \forall q \in U$$

Quindi tutti gli  $X^i$  sono campi vettoriali **commutativi**. Allora dalla proprietà 1.4 del paragrafo 1.4 i gruppi ad un parametro associati ai campi vettoriali sono commutativi.

Sia  $\{\varphi_t^i \mid t \in (a_i, b_i) \subseteq \mathbb{R}\}$  per  $(a_i, b_i)$  intorno centrato nell'origine, il gruppo ad un parametro di trasformazioni locali del campo  $X^i$ :

$$\varphi_t^i \circ \varphi_s^j = \varphi_s^j \circ \varphi_t^i \quad \forall i, j = 1, \dots, r \quad \forall s, t \in (a_i, b_i) \cap (a_j, b_j)$$

A partire dai gruppi  $\{\varphi_t^i\}$  è possibile definire una mappa differenziale<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^r \supset V &\longrightarrow \text{Im}(\varphi) \subseteq M \\ (t_1, \dots, t_r) &\longmapsto \varphi(t_1, \dots, t_r) = \varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \varphi_{t_r}^r(p) \end{aligned}$$

Dove  $V = \cap_{i=1}^r (a_i, b_i)$  è un intorno dell'origine.

Considerando il push forward nell'origine di tale mappa, si ottiene

$$\begin{aligned} \varphi_* : T_0 \mathbb{R}^r &\longrightarrow T_p M \\ \frac{\partial}{\partial t_i} &\longmapsto \varphi_* \left( \frac{\partial}{\partial t_i} \right) = X_p^i \end{aligned}$$

che manda l' $i$ -esimo vettore della base nel vettore tangente alla varietà in  $p$  lungo il campo  $X^i$ . Dato che  $X^1, \dots, X^r$  sono linearmente indipendenti  $\varphi_*$  è una iniezione. Quindi  $\varphi : V \longrightarrow \text{Im}(\varphi)$  è un embedding (si verifica facilmente che è un omomorfismo e per definizione un omomorfismo con push forward iniettivo è un embedding<sup>8</sup>).

Ma l'immagine di un embedding è una sottovarietà<sup>9</sup>, quindi

$$\text{Im}(\varphi) = N \text{ è una sottovarietà di } M.$$

---

<sup>7</sup>La cui immagine definirà la sottovarietà  $N$  di  $M$  che si scoprirà essere la varietà integrale di  $\mathcal{D}$  cercata.

<sup>8</sup>Pag. 33-34 Morita [4]

<sup>9</sup>Pag. 35, teorema 1.37 Morita [4]

Dalle considerazioni precedenti si ha che  $T_p N = \text{span}(X_p^1, \dots, X_p^r) = \mathcal{D}_p$ .

L'ultima fase della dimostrazione consiste nel provare che per ogni  $q \in U$  si ha  $T_q N = \mathcal{D}_q$ .

Sia dunque  $q \in U$ , allora esiste  $(t_1, \dots, t_r) \in V$  tale che

$$q = \varphi(t_1, \dots, t_r) = \varphi_{t_1}^1 \circ \varphi_{t_2}^2 \circ \dots \circ \varphi_{t_r}^r(p)$$

e dal fatto che vale la commutatività posso sempre riscrivere la composizione degli elementi del gruppo ad un parametro, dando la precedenza all' $i$ -esimo elemento:

$$q = \varphi_{t_i}^i \circ \varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_{i-1}}^{i-1} \circ \varphi_{t_{i+1}}^{i+1} \circ \dots \circ \varphi_{t_r}^r(p) \quad (2)$$

E' sempre possibile considerare una funzione che vari solo  $t_i$  nella 2 tenendo fissati tutti i  $t_j$  per  $j \neq i$ :

$$\gamma_i : (a_i, b_i) \longrightarrow U \quad (3)$$

$$t \longmapsto \varphi_t^i \circ \varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_{i-1}}^{i-1} \circ \varphi_{t_{i+1}}^{i+1} \circ \dots \circ \varphi_{t_r}^r(p) \quad (4)$$

Ma la 3 altri non è che la curva integrale del campo vettoriale  $X^i$ , dove

$$\gamma_i(t_i) = q \quad \dot{\gamma}_i(t_i) = X_q^i$$

Questo significa che il vettore tangente a questa curva in  $q$  è  $X_q^i \in T_q N$ .

Potendo definire  $\gamma_i$  per ogni  $i = 1, \dots, r$ , allora  $X_q^i \in T_q N$  per ogni  $i = 1, \dots, r$ .

$$\implies T_q N = \mathcal{D}_q \text{ per ogni } q \in U.$$

Quindi  $N$  è una varietà integrale di  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{D}$  è completamente integrabile sulla carta locale  $U$ , quindi lo è su tutta la varietà  $M$ . □

Da quanto dimostrato si può quindi affermare che:

**Completamente integrabile  $\iff$  Involutiva**

### 3.2 Un cenno al teorema di Frobenius per forme differenziali

Una distribuzione  $r$ -dimensionale  $\mathcal{D}$  di classe  $\mathcal{C}^\infty$  su una varietà differenziabile  $M$  di dimenisione  $n$  può essere rappresentata localmente dalle equazioni

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_s = 0 \quad (5)$$

dove  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$  sono  $s = n - r$  1-forme differenziali<sup>10</sup> linearmente indipendenti su un intorno di  $p$  indicato con  $U \subset M$ .

Si ha quindi

$$\mathcal{D}_q = \{X \in T_q M \mid \omega_1(X) = \omega_2(X) = \dots = \omega_s(X) = 0\} \quad q \in U$$

Il sistema di equazioni 5 che determina la distribuzione è chiamato sistema di **equazioni pfaffiane**. Si hanno i seguenti risultati:

<sup>10</sup>Cap. 2 pag 57 Morita [4].

**Proprietà 3.1** Sia  $\mathcal{D}$  distribuzione di classe  $C^\infty$  sulla varietà differenziabile  $M$  e sia  $I(\mathcal{D})$  l'ideale dell'anello delle forme differenziali  $\mathcal{A}^*(M)$  definito dagli elementi che si annullano su  $\mathcal{D}$ . Allora  $\mathcal{D}$  è una involuzione se e solo se  $I(\mathcal{D})$  è chiuso rispetto all'operazione di differenziazione esterna<sup>11</sup>.

**Osservazione 3.1**  $I(\mathcal{D})$  è chiuso rispetto all'operazione di differenziazione esterna se, per definizione, per ogni  $\omega \in I(\mathcal{D})$  allora  $d\omega \in I(\mathcal{D})$ . Cioè  $dI(\mathcal{D}) \subseteq I(\mathcal{D})$ .

Il differenziale esterno è definito come

$$d : \mathcal{A}^k(M) \longrightarrow \mathcal{A}^{k+1}(M)$$

$$\omega \longmapsto d\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

per  $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ .

La proprietà precedentemente enunciata può essere riformulata definendo la condizione di **integrabilità** che ci porterà ad enunciare il teorema di Frobenius per forme differenziali:

**Definizione 3.1**  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s \in \mathcal{A}^1(U)$  soddisfano la **condizione di integrabilità** se esistono delle 1-forme  $\omega_{i,j}$  tali che

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^s \omega_{i,j} \wedge \omega_j \quad \forall i = 1, \dots, s$$

Si conclude quindi il paragrafo enunciando il teorema di Frobenius per forme differenziali.

**Teorema 3.2** La distribuzione  $\mathcal{D}$  di classe  $C^\infty$  definita sulla varietà differenziabile  $M$  è completamente integrabile se e solo se le equazioni pfaffiane che rappresentano  $\mathcal{D}$  soddisfano la condizione di integrabilità.

## 4 Sottoalgebre di Lie di gruppi di Lie

In questa sezione sarà presentata la definizione di gruppo di Lie, di algebra di Lie e di algebra di Lie di un gruppo di Lie, accompagnate da esempi e alcune proprietà.

### 4.1 Gruppi di Lie

Un gruppo di Lie è un insieme  $G$  dotato di due strutture compatibili fra loro: è sia un gruppo che una varietà differenziabile nel quale il prodotto e l'inversione, considerate come mappe da  $G$  in  $G$ , devono essere differenziabili. Tutti i gruppi finiti sono gruppi di Lie che possiedono una struttura differenziabile triviale.

<sup>11</sup>Proprietà 2.20 pag. 87 Morita [4].

**Definizione 4.1** Una varietà differenziabile  $G$  si dice **gruppo di Lie** se possiede due mappe differenziabili

$$\begin{aligned} m : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

dette prodotto ed inversione che soddisfano gli assiomi di gruppo.

In alternativa una varietà differenziabile dotata di una struttura di gruppo, il cui prodotto renda la mappa

$$\begin{aligned} a : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto gh^{-1} \end{aligned}$$

differenziabile è un gruppo di Lie.

**Esempio 4.1** Si propongono alcuni esempi di gruppi di Lie che saranno sviluppati nei paragrafi successivi

1. Il gruppo additivo  $\mathbb{R}$  e più in generale  $\mathbb{R}^n$  sono gruppi di Lie.
2. Il gruppo moltiplicativo  $\mathbb{R}_+$  è un gruppo di Lie.
3.  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$  con il prodotto è un gruppo di Lie.
4. Per  $\mathbb{K}$  campo a caratteristica zero i gruppi  $GL(n, \mathbb{K})$ ,  $SL(n, \mathbb{K})$ ,  $O(n, \mathbb{K})$ ,  $SO(n, \mathbb{K})$ ,  $U(n, \mathbb{K})$  ed  $SU(n, \mathbb{K})$  sono gruppi di Lie [2].
5. Ogni gruppo finito è un gruppo di Lie 0-dimensionale.

**Definizione 4.2** Un sottogruppo  $H$  di un gruppo di Lie  $G$  è detto **sottogruppo di Lie** se è anche sottovarietà differenziabile.

**Definizione 4.3** Siano  $G$  e  $G'$  due gruppi di Lie, allora una mappa fra  $G$  e  $G'$  è un **omomorfismo di gruppi di Lie** se è un omomorfismo di gruppi e se è differenziabile per la struttura di varietà. Se invece la mappa è un diffeomorfismo (che implica anche l'isomorfismo di gruppi), allora è detta **isomorfismo di gruppi di Lie**.

La componente connessa di un gruppo di Lie  $G$  che contiene l'elemento neutro indicato usualmente con  $e$  è un sottogruppo normale, ed il quoziente di  $G$  su tale componente è un gruppo discreto.

## 4.2 Algebre di Lie

**Definizione 4.4** Una algebra di Lie è uno spazio vettoriale reale  $\mathfrak{b}$  considerato congiuntamente con una applicazione bilineare  $\mathfrak{b} \times \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{b}$  denotata con  $[X, Y]$  e chiamata **bracket** di  $X$  ed  $Y$  che soddisfa le seguenti due proprietà:

1. *Antisimmetrica:*  $[X, Y] = -[Y, X]$
2. *Identità di Jacobi*  $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$

**Esempio 4.2** Si propongono alcuni esempi di algebre di Lie

1. Lo spazio vettoriale  $M(n, \mathbb{K})$  delle matrici quadrate  $n \times n$  a coefficienti reali è un'algebra di Lie con l'operazione definita dal commutatore

$$[A, B] = AB - BA$$

$(M(n, \mathbb{K}), [,])$  algebra viene usualmente denotata con  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ .

2. Il bracket di Lie definito sullo spazio dei campi vettoriali differenziabili sulla varietà  $M$ , forniscono ad  $\mathfrak{X}(M)$  la struttura di algebra di Lie.
3. Ogni spazio vettoriale  $V$  considerato con la forma bilineare triviale, che mappa ogni coppia di vettori nel vettore nullo è un'algebra di Lie chiamata algebra di Lie **abeliana**.
4. Date due algebre di Lie  $\mathfrak{g}$  ed  $\mathfrak{h}$ , allora lo spazio vettoriale prodotto  $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ , con la forma bilineare definita come

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} &\longrightarrow \mathfrak{p} \\ ((X, Y), (X', Y')) &\longmapsto [(X, Y), (X', Y')]_{\mathfrak{p}} = ([X, X']_{\mathfrak{g}}, [Y, Y']_{\mathfrak{h}}) \end{aligned}$$

è un'algebra di Lie.

**Definizione 4.5** Se  $\mathfrak{b}$  è un'algebra di Lie allora un sottospazio lineare  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$  è una **sottoalgebra di Lie** se è chiuso per l'operazione di bracket. In questo caso  $\mathfrak{a}$  eredita la struttura di algebra di Lie da  $\mathfrak{b}$  ed è a sua volta un'algebra di Lie.

**Definizione 4.6** Siano  $\mathfrak{a}$  e  $\mathfrak{b}$  due algebre di Lie, allora una mappa lineare

$L : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$  è un **omomorfismo di algebre di Lie** se è un isomorfismo di spazi vettoriali e se conserva i bracket:

$L[X, Y]_{\mathfrak{a}} = [LX, LY]_{\mathfrak{b}}$ . Se è anche invertibile è detto **isomorfismo di algebre di Lie** e le due algebre sono dette **isomorfe**.

Si verifica che il nucleo e l'immagine di un omomorfismo di algebre sono sottoalgebre e che una mappa lineare è un omomorfismo di algebre di Lie se lo è per gli elementi della base (in virtù della linearità dell'applicazione bilineare).

### 4.3 Sottolgebre left-invarianti e algebre di Lie di Gruppi di Lie

Sia  $G$  gruppo di Lie, ogni suo elemento  $g$  può definire un diffeomorfismo detto **left-traslazione** che in notazione moltiplicativa si esprime come

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto gh \end{aligned}$$

e che manda ogni elemento nel suo prodotto a sinistra per  $g$ .  
Il suo push-forward è definito da

$$\begin{aligned} (L_g)_* : T_h G &\longrightarrow T_{gh} G \\ X_h &\longmapsto (L_g)_* X_p : \mathcal{C}^\infty(N) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto (L_g)_* X_p(f) = X_p(f \circ L_g) \end{aligned}$$

Dove

$$X_p(f \circ L_g) = \sum_{i=1}^n a_i(h) \frac{\partial f \circ L_g}{\partial x_j} \Big|_h = \sum_{i=1}^n a_i(h) \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{gh}$$

**Definizione 4.7** *Un campo vettoriale  $X \in \mathfrak{X}(G)$  su un gruppo di Lie si dice **left-invariante** se è invariante per ogni left-traslazione, cioè se  $(L_g)_* X = X$ . L'insieme dei campi vettoriali left-invarianti è indicato con  $\text{left}\mathfrak{X}(G)$*

Si osserva che  $\text{left}\mathfrak{X}(G)$  è un sottospazio lineare:

$$(L_g)_*(aX + bY) = a(L_g)_*X + b(L_g)_*Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(G) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Infatti per ogni  $h \in G$  e per ogni  $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$

$$\begin{aligned} (L_g)_*(aX_h + bY_h)f &= (aX_h + bY_h)(f \circ L_g) \\ &= aX_h(f \circ L_g) + bY_h(f \circ L_g) \\ &= a(L_g)_*X_h f + b(L_g)_*Y_h f \end{aligned}$$

Ci sono due conseguenze principali della definizione:

ogni vettore  $X_h$  left-invariante definito dal campo vettoriale nel punto  $h$  al quale è applicato il push forward della left-traslazione risulta essere  $(L_g)_* X_h = X_{gh}$ .

Per ogni  $h \in G$  e per ogni  $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$

$$\begin{aligned}
 (L_g)_* X_h f &= X_h(f \circ L_g) \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i(h) \frac{\partial f \circ L_g}{\partial x_i} \Big|_h \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i(h) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{gh} \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i(gh) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{gh} \\
 &= X_{gh} f
 \end{aligned}$$

Il passaggio  $a_i(h) = a_i(gh)$  si verifica in virtù della left-invarianza<sup>12</sup> e mette in evidenza la seconda conseguenza della definizione:

dato che  $L_g$  agisce sulla varietà transitivamente si ha che il campo vettoriale left-invariante  $X$  è completamente determinato da  $X_e \in T_e G$ . Viceversa ogni vettore  $v \in T_e G$  definisce un unico campo vettoriale left-invariante come  $X_g = (L_g)_* v$ . Si può quindi stabilire una corrispondenza biunivoca fra i campi vettoriali left-invarianti ed i vettori tangenti di  $T_e G$  che è anche un isomorfismo di spazi vettoriali:

$$\begin{aligned}
 \text{left}\mathfrak{X}(G) &\longrightarrow T_e G \\
 X &\longmapsto X_e
 \end{aligned}$$

E' una iniezione, dato che ogni campo vettoriale left-invariante definisce in modo unico  $X_e$  vettore del campo calcolato nell'elemento neutro e si dimostrerà (teorema 4.1) che anche l'inversa è una iniezione ben definita, cioè che ogni vettore  $v \in T_e G$  definisce un campo vettoriale  $X$  differenziabile left-invariante:

$$(L_g)_* v = X_g \quad \forall g \in G$$

Oltre ad essere uno spazio vettoriale,  $\text{left}\mathfrak{X}(G)$  possiede anche la struttura di algebra ereditata da  $\mathfrak{X}(G)$  considerato con il bracket di Lie.

**Lemma 4.1** *Sia  $G$  gruppo di Lie e sia  $\mathfrak{b} = \text{left}\mathfrak{X}(G)$  l'insieme dei campi vettoriali left-invarianti, allora  $\mathfrak{b}$  è una sottoalgebra di  $\mathfrak{X}(G)$*

**Dimostrazione:** Si verifica immediatamente che  $\mathfrak{b}$  è sottospazio vettoriale, e come già osservato  $\mathfrak{X}(G)$  è un'algebra se considerata con i bracket di Lie. Rimane da dimostrare  $\mathfrak{b}$  è chiuso rispetto all'operazione di bracket:

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_*X, (L_g)_*Y] = [X, Y]$$

<sup>12</sup>Per dimostrare che un campo vettoriale  $X$  è left-invariante sarà quindi sufficiente dimostrare che  $(L_g)_* X_h = X_{gh}$  per ogni  $g, h \in G$ .

La prima identità segue dalla naturalità dei bracket di Lie: per ogni  $g, h \in G$ , per ogni  $X, Y \in \mathfrak{b}$  e comunque scelta  $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$  segue che

$$\begin{aligned} (L_g)_*[X, Y]_h f &= (X_h Y_h)(f \circ L_g) - (Y_h X_h)(f \circ L_g) \\ &= X_h((Y_{gh} f) \circ L_g) - Y_h((X_{gh} f) \circ L_g) \\ &= X_{gh} Y_{gh} f - Y_{gh} X_{gh} f \\ &= (L_g)_* X_h (L_g)_* Y_h f - (L_g)_* Y_h (L_g)_* X_h f \\ &= [(L_g)_* X, (L_g)_* Y]_h f \end{aligned}$$

Quindi  $\mathfrak{b}$  è una sottoalgebra. □

**Definizione 4.8** *Sia  $G$  gruppo di Lie. L'insieme  $\mathfrak{b} = \text{left}\mathfrak{X}(G)$  con la struttura di sottoalgebra ereditata da  $\mathfrak{X}(G)$  detta **algebra di Lie del gruppo di Lie  $G$** ; sarà indicata d'ora in poi con  $\text{Lie}(G)$ .*

*E' quindi il sottospazio vettoriale dei campi vettoriali su  $G$  left-invarianti considerati congiuntamente con i bracket di Lie.*

Dalle considerazioni viste sull'isomorfismo fra  $\text{Lie}(G)$  e  $T_e G$  segue che  $\text{Lie}(G)$  è uno spazio vettoriale avente la stessa dimensione di  $G$ .

Correndo il rischio di essere ridondanti, si riassume e si dimostra formalmente quanto detto fin'ora con il seguente

**Teorema 4.1 (isomorfismo fra  $\text{Lie}(G)$  e lo spazio tangente a  $G$ )** *Sia  $G$  gruppo di Lie e sia  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ . Allora la mappa di valutazione*

$$\begin{aligned} \epsilon : \mathfrak{g} &\longrightarrow T_e G \\ X &\longmapsto X_e \end{aligned}$$

*è un isomorfismo di spazi vettoriali, pertanto la dimensione di  $\mathfrak{g}$  come spazio vettoriale è pari a quella di  $G$ .*

**Dimostrazione:** La tesi si affronta costruendo l'inversa della mappa di valutazione e dimostrando che è ben definita.

Per ogni  $v \in T_e G$  e per ogni  $g \in G$  si definisce il vettore  $X_g = (L_g)_* v \in T_g G$ ; l'insieme dei vettori  $X_g$  così definito è indicato con  $X$  e dimostrando che è un campo vettoriale differenziabile left-invariante si ha che la funzione  $\tau$  definita come

$$\begin{aligned} \tau : T_e G &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ v &\longmapsto X \end{aligned}$$

è ben data ed proprio l'inversa di  $\epsilon$ . Infatti dato  $v$  vettore di  $T_e G$

$$\epsilon(\tau(v)) = \epsilon(X) = X_e = (L_e)_*(v) = v$$

e viceversa dato  $X$  campo vettoriale in  $\mathfrak{g}$

$$\tau(\epsilon(X))_g = \tau(X_e)_g = (L_g)_*(X_e) = X_g$$

Rimane quindi da dimostrare che  $\tau$  è ben definita:

•  $X$  è **campo vettoriale differenziabile**: per ogni  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$  dove  $U$  è aperto di  $G$ ,  $X$  è differenziabile<sup>13</sup> :

$\forall g \in U$

$$\begin{aligned} X_g f &= (L_g)_* v f \\ &= v(f \circ L_g) \\ &= \gamma'(0)(f \circ L_g) \\ &= \left. \frac{d}{dt} (f \circ L_g \circ \gamma)(t) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} f(g\gamma(t)) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

per  $\gamma$  curva tracciata su  $G$  tale che  $\gamma(0) = e$  e  $\gamma'(0) = v$ .

Si osserva che  $f(g\gamma(t))$  è la derivata di una composizione di  $f$ ,  $\gamma$  e del prodotto definito sul gruppo di Lie  $(g\gamma(t))$  che è differenziabile.

Cioè  $X \in TG$ .

•  $X$  è **left-invariante**: per definizione di  $X$  si ha che comunque scelti  $g, h \in G$

$$(L_h)_*(X_g) = (L_h)_*((L_g)_*v) = (L_{hg})_*v = X_{hg}$$

Quindi  $X \in \mathfrak{g}$ .

Si verifica facilmente che  $\epsilon$  e  $\tau$  sono morfismi, quindi  $\epsilon$  è un isomorfismo. □

Da questa dimostrazione risulta evidente che l'algebra di Lie di un gruppo di Lie  $G$  avrebbe potuto essere definita fin dall'inizio direttamente da  $T_e G$ , come fatto ad esempio in [1].

**Esempio 4.3** *Si propongono alcuni esempi di algebre di Lie di gruppi di Lie:*

1. In  $(\mathbb{R}^n, +)$  le left-traslazioni sono (in notazione ovviamente additiva)

$$L_g(x) = x + g \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$$

Il push forward in 0 è

$$\begin{array}{ccc} T_0 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{(L_g)_*} & T_g \mathbb{R}^n \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{L_g} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

<sup>13</sup>Il campo  $X$  è differenziabile se e solo  $Xf$  è differenziabile comunque scelta  $f$  in  $\mathcal{C}^\infty$ .

Per prima cosa si osserva che  $(L_g)_*$  è un isomorfismo fra gli spazi vettoriali tangenti ad  $\mathbb{R}^n$ . Inoltre, dato un campo vettoriale su  $G$

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad a_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

si ha che  $X$  è left-invariante se e solo se le funzioni differenziabili  $a_i$  che definiscono usualmente i coefficienti delle coordinate sono costanti.

Si vede in dettaglio questa piccola proprietà:

$\Rightarrow$ ) Sia  $X$  left-invariante, allora  $\forall g \in \mathbb{R}^n$

$$(L_g)_* X = X$$

che significa che

$$(L_g)_* X_h = X_{g+h} \tag{6}$$

Esaminando separatamente i membri della precedente equazione si ottiene, per una generica  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (L_g)_* X_h f &= X_h(f \circ L_g) = \sum_{i=1}^n a_i(h) \frac{\partial f \circ L_g}{\partial x_i} \Big|_h = \sum_{i=1}^n a_i(h) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{g+h} \\ X_{g+h} f &= \sum_{i=1}^n a_i(g+h) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{g+h} \end{aligned}$$

Dalla 6 segue quindi

$$\sum_{i=1}^n a_i(h) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{g+h} = \sum_{i=1}^n a_i(g+h) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{g+h}$$

Da cui, confrontando gli addendi, risulta

$$a_i(h) = a_i(g+h) \quad \forall i = 1 \dots n$$

Che equivale ad avere  $a_i$  costanti.

$\Leftarrow$ ) Viceversa sia

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

allora

$$(L_g)_* X_h = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f \circ L_g}{\partial x_i} \Big|_h = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{g+h} = X_{g+h} f$$

che dimostra la tesi.

Coerentemente con quanto affermato si ha che ogni campo vettoriale  $X$  left-invariante definito su  $\mathbb{R}^n$  è completamente determinato da  $X_0$  avendo infatti funzioni coordinate costanti.

Quindi

$$\text{Lie}(\mathbb{R}^n) \cong T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

Inoltre, dato che i bracket di Lie di campi vettoriali a coefficienti costanti sono sempre nulli,  $\text{Lie}(\mathbb{R}^n)$  è un'algebra di Lie abeliana.

2.  $(\mathcal{S}^1, \cdot)$  in ogni suo punto ha un solo versore tangente.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\} \\ &= \{(1, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]\} \\ &= \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\} \end{aligned}$$

Sia quindi

$$X = \frac{\partial}{\partial \theta}$$

versore tangente, definito come campo vettoriale su  $\mathcal{S}^1$ . Le left-transazioni sono definite da

$$\begin{aligned} L_\beta : \mathcal{S}^1 &\longrightarrow \mathcal{S}^1 \\ e^{i\eta} &\longmapsto e^{i(\eta+\beta)} \end{aligned}$$

Si verifica che  $X$  è left-invariante: sia  $f \in C^\infty(\mathcal{S}^1)$

$$(L_\beta)_* X_\eta f = X_\eta(f \circ L_\beta) = \left. \frac{\partial f \circ L_\beta}{\partial \theta} \right|_\eta = \left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_{\eta+\beta} = X_{\eta+\beta} f$$

Analogamente all'esempio precedente i campi vettoriali tangenti sono generati da  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  ed hanno quindi dimensione 1:

$$\text{Lie}(\mathcal{S}^1) \cong T_1\mathcal{S}^1 \cong \mathbb{R}$$

ed anche in questo caso i bracket di Lie sono nulli, quindi l'algebra di Lie è abeliana.

3. Se  $G$  ed  $H$  sono gruppi di Lie, allora il loro prodotto  $G \times H$  è ancora un gruppo di Lie. Inoltre l'algebra di Lie del gruppo prodotto  $\text{Lie}(G \times H)$  è prodotto delle algebre corrispondenti:  $\text{Lie}(G) \times \text{Lie}(H)$ .

Infatti

$$[(X, X'), (Y, Y')]_{\text{Lie}(G \times H)} = ([X, X']_{\text{Lie}(G)}, [Y, Y']_{\text{Lie}(H)})$$

4. Il toro ad  $n$  buchi  $\mathbb{T}^n$  può essere visto come il prodotto di  $\mathcal{S}^1$   $n$  volte

$$\mathbb{T}^n = \{(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_j \in [0, 2\pi]\}$$

e, dal risultato ottenuto nell'esempio precedente

$$\text{Lie}(\mathbb{T}^n) \cong \text{Lie}(\mathcal{S}^1) \times \dots \times \text{Lie}(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{R}^n$$

Anche in questo caso si tratta di un'algebra di Lie abeliana, generata, come spazio vettoriale da

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_n}$$

Dagli esempi appena visti si può affermare che

$$\text{Lie}(\mathbb{T}^n) \cong \text{Lie}(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$$

Questo risultato suggerisce una qualche relazione fra i gruppi di Lie e le rispettive algebre, che sarà approfondita nella prossima sezione.

## 5 Applicazioni del teorema di Frobenius

Il teorema di Frobenius, visto nella sezione 3 permette di dimostrare un risultato riguardante le relazioni che intercorrono fra i sottogruppi di un gruppo di Lie  $G$  e le sottoalgebre di  $\text{Lie}(G)$ , chiamato teorema di corrispondenza di Lie. Vengono inoltre dimostrate tre importanti conseguenze di questo fatto:

1. Per ogni omomorfismo di algebre di Lie di gruppi di Lie esiste un unico omomorfismo dei gruppi di Lie il cui push forward coincide con l'omomorfismo di algebre.
2. Se due gruppi di Lie hanno algebre di Lie isomorfe allora sono isomorfi.
3. Due gruppi di Lie sono localmente isomorfi se e solo se hanno algebre di Lie isomorfe.

### 5.1 Teorema di corrispondenza di Lie

Nel teorema di corrispondenza, le distribuzioni diventano uno strumento per costruire un sottogruppo di Lie da una sottoalgebra. Durante la dimostrazione del teorema si userà un risultato<sup>14</sup> richiamato nel seguente

**Lemma 5.1** *Sia  $F : M \rightarrow N$  mappa differenziabile,  $H \subseteq N$  varietà integrale della distribuzione involutiva  $k$ -dimensionale  $\mathcal{D}$  definita su  $N$ . Se  $F(M) \subseteq H$  allora anche  $\tilde{F} : M \rightarrow H$  è differenziabile.*

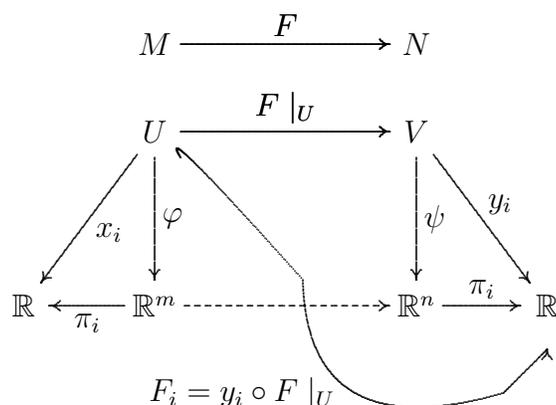
<sup>14</sup>Proposizione 17.4 pag 361 [3]

**Dimostrazione:** Sia  $p \in M$ ,  $F(p) = q \in H$ ,  $(U, \varphi) = (U; x_1, \dots, x_m)$  ed  $(V, \psi) = (V; y_1, \dots, y_n)$  intorno coordinati di  $p$  e  $q$  rispettivamente.

Allora  $F$  agisce sulle funzioni coordinate come

$$\begin{aligned} F|_U: U &\longrightarrow V \\ p &\longmapsto F(p) = q \\ (x_1(p), \dots, x_m(p)) &\longmapsto (y_1(q), \dots, y_n(q)) = (F_1(p), \dots, F_n(p)) \end{aligned}$$

dove  $F_i = y_i \circ (F|_U)$ .



Ma per ipotesi  $F(U) \subseteq H$ , quindi  $F_j(p) = y_j(q)$  sono costanti per  $j$  compreso fra  $k+1$  ed  $n$  a meno di una permutazione degli indici. Considerando allora  $\tilde{V} = V \cap H$  l'intorno in cui le coordinate costanti sono omesse si ha che la funzione

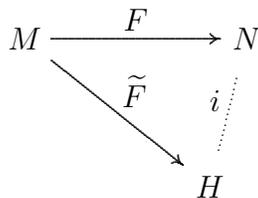
$$\begin{aligned} \tilde{F}|_U: U &\longrightarrow V \\ (x_1(p), \dots, x_m(p)) &\longmapsto (y_1(q), \dots, y_k(q)) = (F_1(p), \dots, F_k(p)) \end{aligned}$$

è differenziabile. Dato che  $\tilde{F}|_U$  è differenziabile su ogni carta di  $M$ , allora

$$\tilde{F}: M \longrightarrow H$$

è differenziabile. □

Se  $i: H \hookrightarrow N$  è la funzione di inclusione, allora quanto affermato nel lemma precedente può essere riassunto dal seguente diagramma



Ora abbiamo sotto mano tutti gli strumenti per enunciare e dimostrare il teorema di corrispondenza di Lie.

**Teorema 5.1 (di corrispondenza di Lie)** *Sia  $G$  gruppo di Lie,  $\mathfrak{g} = Lie(G)$ , allora esiste una corrispondenza biunivoca fra i sottogruppi connessi di  $G$  e le sottoalgebre di  $\mathfrak{g}$ .*

**Dimostrazione:** Sia  $H$  sottogruppo connesso del gruppo di Lie  $G$ , sia  $\mathfrak{h} = Lie(H)$ :

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} : X_e \in T_e H\}$$

Si considerano due vettori  $u, v \in T_e H$  ai quali corrispondono biunivocamente i campi vettoriali left-invarianti  $X$  ed  $Y$ , cioè  $X_e = u$  ed  $Y_e = v$  in  $\mathfrak{h}$ ; applicando il bracket di Lie a  $u$  e  $v$ , dalla naturalità dei bracket segue che

$$[u, v]_g = (L_g)_* [X, Y] \quad \forall g \in G$$

ed essendo  $[u, v]_g \in \mathfrak{h}$ , allora  $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ . Quindi ad ogni sottogruppo connesso  $H$  corrisponde naturalmente la sottoalgebra  $\mathfrak{h}$

Viceversa sia  $\mathfrak{h}$  sottoalgebra di  $\mathfrak{g}$ , per  $\mathfrak{g} = Lie(G)$ , allora si deve dimostrare che esiste un unico sottogruppo di Lie  $H$  di  $G$ , tale che  $Lie(H) = \mathfrak{h}$ .

Per questo scopo si utilizza una distribuzione integrale  $\mathcal{D}$  definita su  $G$  da tutti i campi vettoriali left-invarianti generati dai vettori di  $\mathfrak{h}$ :

$$\mathcal{D} \subset TG \quad \mathcal{D}_g = \{X_g \in T_g G : X \in \mathfrak{h}\}$$

Si verifica che  $\mathcal{D}$  è involutiva, infatti per ogni coppia di vettori  $u, v \in T_e G$  che generano univocamente i campi vettoriali left-invarianti  $X$  ed  $Y$  si ha

$$[u, v]_g = (L_g)_* [X, Y] = [L_g X, L_g Y] = [X, Y]_g \in \mathcal{D}_g$$

Allora dal teorema di Frobenius presentato nella sezione 3 la distribuzione  $\mathcal{D}$  è completamente integrabile e pertanto esiste un'unica varietà integrabile passante per  $e$ , indicata con  $H$ . Nell'insieme delle varietà integrabili siamo interessati a considerare proprio quella passante per  $e$ , che dimostreremo essere proprio il sottogruppo di  $G$  cercato.

1.  $H$ , per come è stato scelto, contiene  $e$  elemento neutro del gruppo di Lie  $G$ .
2. Dato che tutti i campi vettoriali in  $\mathcal{D}$  sono invarianti per traslazioni, anche  $H$  è invariante per traslazioni:

$$L_h(H) = H \quad \forall h \in H$$

Non si corre il rischio di applicare la left traslazione  $L_h$  ed arrivare ad una varietà integrabile di  $\mathcal{D}$  diversa da  $H$  <sup>15</sup>.

<sup>15</sup>Una dimostrazione più raffinata di questo passaggio può essere sviluppata introducendo il concetto di foliazione, Lee pag. 356 [3].

3. Comunque scelti due elementi  $h, h' \in H$  si ha

$$hh' = L_h(h') \in L_h(H) = H$$

$$h^{-1} = h^{-1}e = L_{h^{-1}}(e) \in L_{h^{-1}}(H) = H$$

Pertanto  $H$  oltre ad essere varietà differenziabile in quanto varietà integrale di una distribuzione involutiva, è anche sottogruppo di  $G$ .

Per dimostrare che è sottogruppo di Lie, rimane ancora da dimostrare che la mappa

$$\tilde{a} : H \times H \longrightarrow H$$

$$(h, h') \longmapsto h(h')^{-1}$$

è differenziabile.

Per ottenere questo risultato si usa il lemma 5.1. Considerato il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} H \times H & \xrightarrow{a} & G \\ & \searrow \tilde{a} & \vdots i \\ & & H \end{array}$$

si osserva che  $a$  è differenziabile essendo restrizione di  $G \times G \rightarrow G : (g, g') \mapsto g(g')^{-1}$  che è differenziabile per definizione di gruppo di Lie e che  $a(H \times H) \subseteq H$ , essendo  $H$  sottogruppo. Quindi dal lemma  $\tilde{a}$  è differenziabile.  $\square$

## 5.2 Tre conseguenze del teorema di corrispondenza

**Corollario 5.2** <sup>16</sup> Siano  $G$  ed  $H$  gruppi di Lie connessi e siano  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  e  $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ . Allora per ogni omomorfismo di algebre di Lie

$$\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$$

esiste un unico omomorfismo di gruppi di Lie

$$\phi : G \longrightarrow H$$

tale che  $\phi_* = \varphi$ .

Sorvolando sull'abuso di notazione, il corollario può essere riassunto dal seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\forall \varphi} & \mathfrak{h} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{\exists! \phi : \phi_* = \varphi} & H \end{array}$$

<sup>16</sup>Teorema 15.32 pag 396 Lee [3].

Si può osservare che la tesi è ragionevole, dato che per definizione di push forward

$$\phi_* : T_e G \longrightarrow T_e H$$

è una mappa fra due strutture equivalenti a  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$ .

**Dimostrazione:** La strategia iniziale della dimostrazione si basa sul considerare il gruppo prodotto  $G \times H$  e l'algebra prodotto  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ .

Sia  $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$  l'algebra definita dal grafico di  $\varphi$ :

$$\mathfrak{t} = \{(X, \varphi X) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} : X \in \mathfrak{g}\}$$

1.  $\mathfrak{t}$  è sottospazio vettoriale.
2.  $\mathfrak{t}$  è una sottoalgebra, dato che  $\varphi$  è un omomorfismo:

$$[(X, \varphi X), (X', \varphi X')] = ([X, X'], [\varphi X, \varphi X']) = ([X, X'], \varphi[X, X']) \in \mathfrak{t}$$

Allora dal teorema di corrispondenza di Lie 5.1 esiste un unico  $T$  sottogruppo di  $G \times H$  corrispondente all'algebra  $\mathfrak{t}$ , cioè tale che  $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$ . Si considerano allora le proiezioni

$$\pi_1 : G \times H \longrightarrow G \qquad \pi_2 : G \times H \longrightarrow H$$

e le restrizioni delle proiezioni al sottogruppo appena ottenuto:

$$\pi_1|_T : T \longrightarrow G \qquad \pi_2|_T : T \longrightarrow H$$

Risulta che  $\pi_1|_T$  è un isomorfismo di gruppi di Lie <sup>17</sup>.

Allora si costruisce la funzione cercata  $\phi : G \rightarrow H$  come  $\phi = \pi_2|_T \circ (\pi_1|_T)^{-1}$ .

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{(\pi_1|_T)^{-1}} & T & \xrightarrow{\pi_2|_T} & H \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\phi = \pi_2|_T \circ (\pi_1|_T)^{-1}} & & & \end{array}$$

Equivalentemente  $\pi_2|_T = \phi \circ \pi_1|_T$ .

- Si dimostra che la funzione costruita  $\phi$  è proprio la funzione cercata: considerate le proiezioni sul primo e sul secondo fattore delle algebre di Lie

$$\tau_1 : \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g} \qquad \tau_2 : \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}$$

e le rispettive restrizioni.

$$\tau_1|_{\mathfrak{t}} : \mathfrak{t} \longrightarrow \mathfrak{g} \qquad \tau_2|_{\mathfrak{t}} : \mathfrak{t} \longrightarrow \mathfrak{h}$$

---

<sup>17</sup>Questo risultato può essere verificato utilizzando la teoria dei rivestimenti: Lee [3] pag. 396. Non si riporta la dimostrazione in questa ricerca.

Si osserva che il push forward di  $\pi_2|_T$  è dato da

$$(\pi_2|_T)_* = (\phi \circ \pi_1|_T)_* = \phi_* \circ (\pi_1|_T)_*$$

e dato che  $(\pi_1|_T)_* = (\tau_1|_t)_*$  ed  $(\pi_2|_T)_* = (\tau_2|_t)_*$ :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\pi_1|_T} & G \\ & \searrow \pi_2|_T & \downarrow \phi \\ & & H \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{t} & \xrightarrow{\tau_1|_t} & \mathfrak{g} \\ & \searrow \tau_2|_t & \downarrow \phi_* \\ & & \mathfrak{h} \end{array}$$

si ottiene

$$\tau_2|_t = \phi_* \circ \tau_1|_t$$

Per ogni campo vettoriale  $X \in \mathfrak{g}$  segue che

$$\begin{aligned} \varphi X &= \tau_2|_t(X, \varphi X) \\ &= \phi_* \circ \tau_1|_t(X, \varphi X) \\ &= \phi_* X \end{aligned}$$

L'unicità di  $\phi$  è conseguenza dell'unicità di  $T$ . □

**Corollario 5.3** *Siano  $G$  ed  $H$  due gruppi di Lie. Se  $Lie(G)$  è isomorfa a  $Lie(H)$  allora  $G$  è isomorfo ad  $H$ .*

**Dimostrazione:** Si indicano con  $\mathfrak{g} = Lie(G)$  e  $\mathfrak{h} = Lie(H)$ . Sia  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  isomorfismo di algebre di Lie.

Dal corollario 5.2 precedente esistono e sono univocamente determinate i morfismi  $\phi$  e  $\psi$  tali che  $(\phi)_* = \varphi$  ed  $(\psi)_* = \varphi^{-1}$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{h} \\ \downarrow & \phi & \downarrow \\ G & \longrightarrow & H \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & \mathfrak{g} \\ \downarrow & \psi & \downarrow \\ H & \longrightarrow & G \end{array}$$

Dal momento che  $(\phi \circ \psi)_* = (\phi)_* \circ (\psi)_* = Id_{\mathfrak{g}}$  ed  $(\psi \circ \phi)_* = (\psi)_* \circ (\phi)_* = Id_{\mathfrak{h}}$  allora, dall'unicità di  $\phi$  e  $\psi$  e del push forward, si ha che  $\phi \circ \psi = Id_G$  ed  $\psi \circ \phi = Id_H$  □

Il seguente corollario prende il nome di **teorema di Lie** e stabilisce formalmente quello che si era potuto solo intuire nell'esempio 4.3.

**Corollario 5.4** *Due gruppi di Lie sono localmente isomorfi se e solo se hanno algebre di Lie isomorfe.*

**Dimostrazione:** Siano  $G$  ed  $H$  due gruppi di Lie e  $\mathfrak{g} = Lie(G)$  ed  $\mathfrak{h} = Lie(H)$  le loro rispettive algebre di Lie. Si considera il gruppo di Lie definito da  $G \times H$  la cui algebra di lie è data da  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ .  $G$  ed  $H$  sono sottogruppi di  $G \times H$  e  $\mathfrak{g}$  ed  $\mathfrak{h}$  sono sottoalgebre di  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ . Allora dal teorema di corrispondenza di Lie 5.1 esistono

$$\sigma_g : G \longrightarrow \mathfrak{g} \qquad \sigma_h : H \longrightarrow \mathfrak{h}$$

biiezioni, come si riassume nel seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\sigma_g} & \mathfrak{g} \\
 \swarrow \pi_1 & & \nearrow \tau_1 \\
 G \times H & \xrightarrow{Lie()} & \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \\
 \swarrow \pi_2 & & \searrow \tau_2 \\
 H & \xrightarrow{\sigma_h} & \mathfrak{h}
 \end{array}$$

$\Rightarrow$ ) Se per ipotesi esiste  $\varphi$  isomorfismo locale<sup>18</sup> di gruppi fra  $G$  ed  $H$ , allora si completa il diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\sigma_g} & \mathfrak{g} \\
 \swarrow \pi_1 & & \nearrow \tau_1 \\
 \downarrow \varphi & & \\
 G \times H & \xrightarrow{Lie()} & \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \\
 \swarrow \pi_2 & & \searrow \tau_2 \\
 H & \xrightarrow{\sigma_h} & \mathfrak{h}
 \end{array}$$

e l'isomorfismo di algebre cercato è  $\sigma_h \circ \varphi \circ \sigma_g^{-1}$ .

$\Leftarrow$ ) Il viceversa segue direttamente dal corollario 5.3 precedente, oppure osservando che il diagramma viene completato dall'altro lato da un isomorfismo  $\phi$  fra le due algebre

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\sigma_g} & \mathfrak{g} \\
 \swarrow \pi_1 & & \nearrow \tau_1 \\
 G \times H & \xrightarrow{Lie()} & \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \\
 \swarrow \pi_2 & & \searrow \tau_2 \\
 H & \xrightarrow{\sigma_h} & \mathfrak{h} \\
 & & \downarrow \phi
 \end{array}$$

e quindi l'isomorfismo di gruppi cercato è  $\sigma_h^{-1} \circ \phi \circ \sigma_g$ . □

<sup>18</sup>Il fatto che l'isomorfismo fra gruppi sia locale non pone restrizioni: se l'isomorfismo locale non fosse definito sull'intorno di  $e$  ma sull'intorno di un generico punto  $q$ , la tesi varrebbe comunque in virtù della left-invarianza:  $T_q G = T_e G$ .

## Riferimenti bibliografici

- [1] H. Abbaspour, M. Moskovitz, *Basic Lie Theory*, Online.
- [2] Alexander Kirillov Jr, *Introduction to Lie groups and Lie algebras*, Online.
- [3] John M. Lee *Introduction to Manifold*, University of Washington 2000.
- [4] Shigeyuki Morita, *Geometry of Differential Forms*, AMS, Volume 201.
- [5] Frank W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Group*, Springer Verlag.

## 202. Lo scaffale dei libri

### “La fisica di Superman” di James Kakalios

Si è sempre alla ricerca di nuove idee che consentano una maggiore diffusione di contenuti scientifici. Quelle materie che sui banchi di scuola risultavano complicate e pesanti, vengono trattate con altro piglio e calate in un contesto informale che libera il lettore da ogni traccia di pedanteria. Tra i vari tentativi, uno dei più riusciti è senza dubbio *La fisica dei Supereroi* di James Kakalios.

I personaggi dei fumetti offrono numerose occasioni per parlare di fisica, il ricco campionario di Supereroi consente a Kakalios di spaziare dalla meccanica alla fisica moderna e l'autore non si lascia sfuggire questa opportunità.

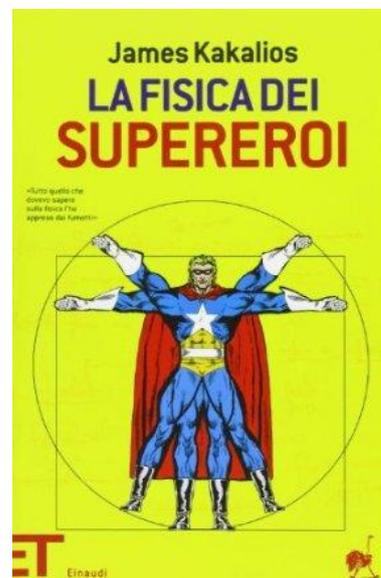
Uno degli episodi più interessanti è quello in cui si parla delle origini di Superman, cioè di quando questo personaggio non era ancora in grado di volare ma soltanto di superare grattacieli alti 200 metri con un solo salto. Determinare quale velocità deve raggiungere Superman per poter salire fino all'altezza di 200 metri è solo una questione di conservazione di energia: l'energia cinetica iniziale si trasforma in energia potenziale. La conclusione è che la velocità con cui il supereroe deve staccarsi da terra è di 62 metri al secondo, circa 225 chilometri orari.

Come fa Superman a raggiungere questa notevole velocità iniziale? Ci riesce accovacciandosi e applicando una grande forza al suolo. L'intensità di tale forza è calcolabile tramite la seconda legge della dinamica di Newton. L'accelerazione in gioco si può calcolare dividendo la variazione di velocità (62 metri al secondo) per il tempo impiegato a saltare (l'autore suppone un quarto di secondo). Il risultato porta ad avere un'accelerazione di circa 250 metri al secondo quadrato.

Se si presume che la massa di Superman sia pari a 100 chilogrammi, per la legge  $F=ma$  avremmo una forza di 25000 chilogrammi per metri al secondo quadrato. A questo punto, l'autore cerca di spiegare come sia possibile che le gambe del supereroe riescano a sviluppare una forza così intensa e la risposta risulta essere molto convincente: Superman proviene da un pianeta, Krypton, la cui gravità è certamente molto più grande di quella terrestre e quindi i suoi muscoli sono sovradimensionati per il pianeta Terra e gli consentono di superare agevolmente l'attrazione gravitazionale terrestre.

Le interessanti considerazioni di Kakalios non sono ancora finite. Tutti i dati precedentemente raccolti consentono di scoprire quale fosse la gravità del pianeta di origine di Superman e, con opportuni raffronti si riesce a concludere che la gravità di Krypton è quindici volte superiore a quella della Terra.

Quali caratteristiche deve avere un pianeta per possedere una gravità di questo tipo? Le possibilità sono due: se Krypton è grande quanto la Terra allora avrà una densità quindici volte maggiore, se invece ha la stessa densità della Terra allora sarà quindici volte più grande. Per avere una densità quindici volte più grande, il pianeta Krypton dovrebbe essere costituito da materia enormemente densa (fino a 75 grammi per centimetro cubo) e nessuna materia a noi nota è così densa. Non resta altro da fare che accettare l'idea che la maggiore gravità sia dovuta al fatto che le sue dimensioni siano quindici volte quelle della Terra,



ma anche qui sorge un problema. Un pianeta di tali dimensioni diventerebbe un gigante gassoso privo di mantello solido su cui poter costruire edifici o città e su cui auspicare vita umanoide. Anzi, oltre certe dimensioni la pressione gravitazionale darebbe il via ai processi di fusione nucleare, trasformando il pianeta in una piccola stella.

E dunque? Come si spiega la forza dei muscoli di Superman se non si può giustificare l'esistenza di un pianeta come Krypton? In realtà, secondo Kakalios, rimane un'ultima possibilità e cioè che all'interno del nucleo di Krypton ci sia stata una quantità, anche piccola, di materia altamente densa e tale materia può essere solo frutto dei resti delle esplosioni di supernovae. I residui di queste stelle sono detti stelle di neutroni e la loro densità è inferiore solo a quella dei buchi neri. Perciò, Krypton deve aver avuto al suo interno il nucleo di una stella di neutroni e questo spiega perché è esploso visto che un nucleo così denso provocherebbe enormi tensioni che impedirebbero una distribuzione stabile della materia.

Domenico Signorelli

### “Einstein e la formula di Dio” di J. R. Dos Santos

Un romanzo ricco di riferimenti alla fisica, con pagine di spiegazione delle moderne teorie; nonostante questo, il ritmo della storia è incalzante e riesce a generare nel lettore una grande curiosità. Il protagonista è Tomás Noronha, un esperto di criptoanalisi e lingue antiche, che lavora alla Fondazione Gulbenkian di Lisbona.

Mentre si trova al Cairo, per lavoro, viene abbordato da Ariana Pakravan, un'iraniana a capo del gruppo di lavoro nominato dal Ministero della Scienza, Ricerca e Tecnologia della Repubblica Islamica dell'Iran. Per ordine del suo governo, Ariana chiede a Tomás se vuole lavorare per loro alla traduzione di un importante documento, un manoscritto di Einstein, “Die Gottesformel”. Gli iraniani sono convinti che il manoscritto li guiderà nella costruzione della bomba atomica.

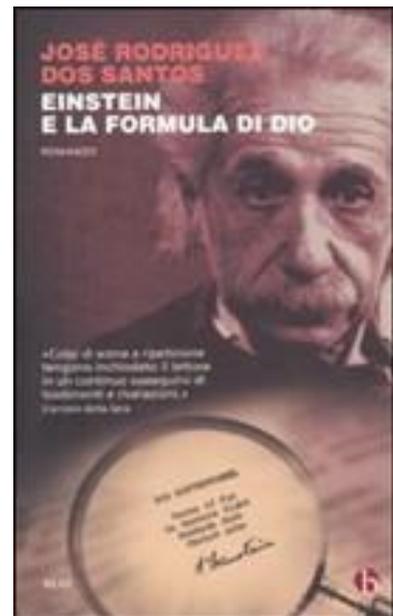
Tomás accetta la proposta e viene subito contattato da Frank Bellamy, un agente della Cia, che lo minaccia perché lavori come spia mentre si trova in Iran, visto che nella decifrazione del manoscritto è forse implicata anche la scomparsa del prof. Siza, insegnante di fisica e amico del padre di Tomás.

Una volta giunto a Teheran, a Tomás viene negato il diritto di visionare l'intero manoscritto: gli viene comunicato solo l'enigma da decifrare e sarà autorizzato a lasciare il paese solo una volta concluso il lavoro.

La Cia organizza un furto del manoscritto e coinvolge, necessariamente, anche Tomás, il quale viene catturato e interrogato da Salman Kazemi, colonnello della Vevak, il Ministero dell'Informazione e della Sicurezza iraniano.

Il trasferimento ad un'altra prigione si rivela un'occasione fortunata: Ariana può liberarlo e espatriarlo. Rientrato a Lisbona, Tomás incontra l'assistente del prof. Siza, per avere da lui alcune informazioni: pare che l'accademico stesse cercando di formulare un'equazione che contenesse tutta la struttura dell'universo, ovvero “Die Gottesformel”, la formula di Dio.

Visitando la casa di Siza, Tomás trova una cartolina raffigurante il Potala, in Tibet: è firmata Tenzing Thubten e il messaggio dice “Cercami al monastero”.



Tomás ripercorre la strada fatta da Siza, ma prima di incontrare il monaco viene rapito da Salman Kazemi.

Aiutato a fuggire ancora una volta da Ariana, Tomás incontra Tenzing Thubten, compagno di università di Siza e, insieme a lui, collaboratore di Einstein. Tomás non abbandona l'idea di decifrare il manoscritto e gli aiuti per concludere l'opera gli arrivano nel modo più inaspettato...

Daniela Molinari

**MAGAZINE**  
**MATEMATICAMENTE.IT** *Rivista trimestrale di matematica,  
per curiosi e appassionati  
distribuita gratuitamente sul sito*

**Anno 8 Numero 21 GENNAIO 2014**

Registrazione n. 953 del 19.12.2006 – Tribunale di Lecce

ISIN ISSN 2035-0449

Direttore responsabile Antonio Bernardo  
antoniobernardo@matematicamente.it