203. Su alcune dimostrazioni del I e del II teorema di Euclide

Nicola Carichino *
Cosimo De Mitri **

Sunto

Le dimostrazioni del I teorema di Euclide, basate sulla teoria dell'equivalenza di figure piane, hanno sollevato non poche discussioni a causa delle difficoltà di comprensione riscontrate da parte dei nostri studenti. Per ovviare in qualche modo a tale inconveniente qui viene proposta una semplice dimostrazione di questo teorema, basata su due distinte scomposizioni di un medesimo quadrilatero. La prima scomposizione è costituita da due triangoli e dal quadrato di cui al teorema in discussione; mentre la seconda scomposizione è costituita da due triangoli rispettivamente uguali a quelli della prima scomposizione e dal rettangolo dello stesso teorema. Perciò il quadrato e il rettangolo risultano equivalenti per sottrazione[1]. La dimostrazione che presentiamo qui – suggerita da osservazioni intuitive molto semplici – richiede facili verifiche dell'uguaglianza di rettangoli e di triangoli.
Successivamente, con criterio analogo, si prova anche il II teorema di Euclide, scomponendo opportunamente i due triangoli uguali nei quali un rettangolo è suddiviso da una sua diagonale.

Abstract. In this paper we give very simple proofs of the first and of the second Euclide's theorem.

1. Considerazioni generali

Preliminarmente ricordiamo che due angoli si dicono complementari tra loro quando la loro somma dà un angolo retto (come nel caso degli angoli acuti di un triangolo rettangolo). Perciò è ovvio che due angoli che siano complementari con uno stesso angolo, per differenza sono uguali tra loro.

Osservazione 1.1. Siano dati due triangoli rettangoli tali che un angolo acuto dell'uno sia uguale a un angolo acuto dell'altro; onde anche gli altri angoli acuti sono uguali tra loro, in quanto essi sono rispettivamente complementari ai due angoli di partenza. Allora – in virtù del secondo criterio di uguaglianza fra triangoli – affinché quei due triangoli rettangoli siano uguali basta che sia verificata una delle seguenti condizioni:
a) sono uguali le rispettive ipotenuse;
b) sono uguali i cateti che nell'uno e nell'altro triangolo delimitano angoli acuti uguali;
c) sono uguali i cateti che nell'uno e nell'altro triangolo si oppongono ad angoli acuti uguali ■

* I.I.S. "F. Bottazzi" – Casarano (LE); carichino.nicola@libero.it
** Dipartimento di Matematica e Fisica, Università del Salento, Lecce; cosimo.demitri@unisalento.it

[1] Questo è il cosiddetto criterio di equicompletabilità, che risulta equivalente al ben noto criterio di equi-scomponibilità. Per gli opportuni approfondimenti di carattere generale si rinvia a [3] e a [4].

Al lettore sono ben noti i due teoremi seguenti.

I Teorema di Euclide. In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo avente per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.
II Teorema di Euclide. In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

Questi teoremi hanno una notevole rilevanza, poiché permettono di riconoscere molte altre proprietà dei triangoli rettangoli e di risolvere vari problemi di geometria euclidea.
Va richiamato che i due teoremi non compaiono esplicitamente negli Elementi di Euclide, in quanto il primo è contenuto nella dimostrazione del teorema di Pitagora, Libro I Proposizione 47 ([2], pp. 146-149), mentre il secondo è un corollario, in forma di similitudine, della Proposizione 8 del Libro VI degli Elementi (cf. [2], p. 375 e p. 373).
Concludiamo questo paragrafo con un'osservazione che tornerà utile nel seguito.

Osservazione 1.2. Dato un triangolo rettangolo ***ABC***, si consideri l'altezza ***CH***. Quindi sull'ipotenusa ***AB*** si costruisca (come in fig. 1) il rettangolo ***AFLB*** – i cui lati ***AF*** e ***BL*** sono uguali alla proiezione del cateto ***AC*** su ***AB*** – e si prolunghino i segmenti ***FL*** e ***CB***, fino a farli incontrare nel punto ***D***. Allora, per l'Osservazione 1.1, i triangoli rettangoli ***BLD*** e ***AHC*** sono uguali, poiché in essi sono uguali i lati ***BL*** ed ***AH*** e gli angoli ***DBL*** e ***CAH***, entrambi complementari all'angolo ***ABC***. Perciò sono uguali, in particolare, i due cateti ***CH*** e ***LD*** – che nell'uno e nell'altro triangolo si oppongono agli angoli suddetti – e le ipotenuse ***AC*** e ***BD***. ■

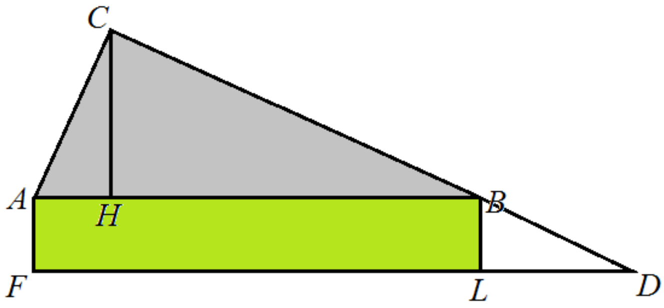

fig. 1

2. Il I Teorema di Euclide

Dato un triangolo rettangolo, Euclide dimostra il teorema di Pitagora scomponendo il quadrato costruito sull'ipotenusa in due rettangoli e facendo vedere che ciascuno di essi è equivalente a uno dei due quadrati costruiti sui cateti, il che costituisce quello che poi è stato denominato I teorema di Euclide.
Come il lettore ben sa, la dimostrazione di quest'ultimo teorema, riportata in diversi manuali di geometria delle scuole secondarie, risulta abbastanza complessa a causa dell'articolazione delle varie fasi. Per questo motivo, molti autori hanno finito col preferirle la dimostrazione esposta negli *Elementi di Geometria* di F. Enriques e U. Amaldi ([1] Parte I, pp. 211-212).

In questo secondo testo il percorso dimostrativo si basa (si veda fig. 2) sulla costruzione del parallelogramma ***ACLM*** – ottenuto intersecando le rette ***AC*** ed ***ED*** con le rette ***FA*** e ***GH*** – che viene dimostrato essere equivalente sia al quadrato sia al rettangolo del I teorema di Euclide; onde quadrato e rettangolo sono equivalenti tra loro in virtù della proprietà transitiva della relazione di equivalenza.
Si noti che il parallelogramma ***ACLM*** è equivalente al quadrato ***ACDE*** in quanto essi – come si osserva in fig. 2 – hanno la stessa altezza ***DC*** e la stessa base ***AC***. D'altro canto, ***ACLM*** è equivalente anche al rettangolo ***AFGH***. Infatti essi hanno la stessa altezza ***AH***, e le basi ***AM*** e ***AF*** uguali. Quest'ultima proprietà deriva dal fatto che ***AF*** è uguale all'ipotenusa del triangolo ***ABC***, e ***AM*** è l'ipotenusa del triangolo ***AME***; e questi due triangoli rettangoli sono uguali poiché hanno uguali i due rispettivi cateti ***AC*** e ***AE*** e i due rispettivi angoli ***EAM*** e ***CAB***, entrambi complementari dell'angolo ***MAC***.

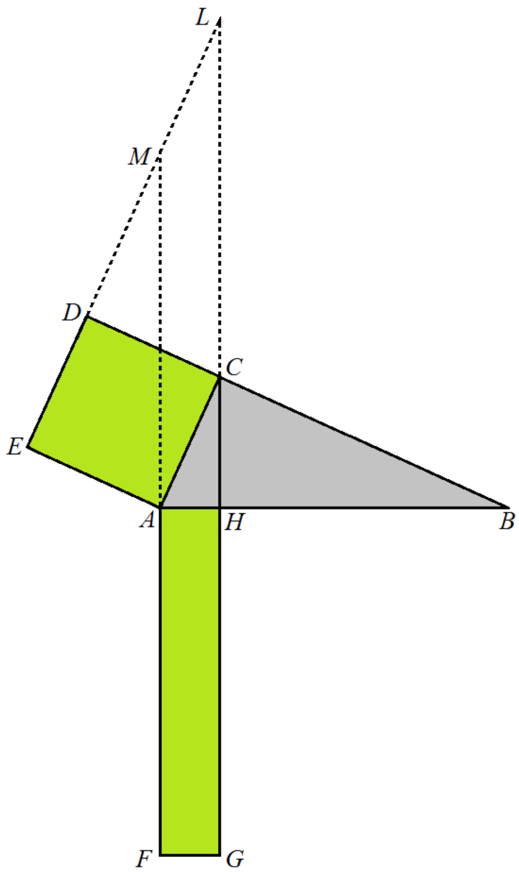

fig. 2

Ebbene, da un'attenta analisi, la dimostrazione del I teorema di Euclide vista fugacemente poc'anzi risulta più semplice soltanto di poco rispetto a quella contenuta negli *Elementi* di Euclide, specialmente per i ragazzi della scuola secondaria di primo grado, se essi non hanno preso piena coscienza dei criteri di equivalenza tra poligoni. Per questo motivo, e per favorire negli studenti l'interesse per la geometria, ora daremo una dimostrazione semplice e, a nostro avviso, istruttiva del I teorema di Euclide, che sfrutta opportunamente il principio della equicompletabilità di figure diverse in figure uguali, tramite la giustapposizione di figure uguali in entrambi i completamenti.
La dimostrazione che proporremo qui, anche se meno "elegante" della precedente, nei singoli passaggi è particolarmente facile, ed ha anche il vantaggio di poter essere illustrata in

ambito laboratoriale sotto forma di esperienza concreta, semplicemente disponendo di qualche foglio di cartoncino e di un paio di forbici. Ciò la rende particolarmente adatta a studenti della scuola secondaria di primo grado, poiché in tale ordine scolastico l'insegnamento della geometria deve avere soprattutto un carattere empirico ed intuitivo. Nello stesso tempo, la dimostrazione che intendiamo proporre è anche rigorosa dal punto di vista logico-deduttivo, e quindi rappresenta un valido modello da sfruttare nell'ambito di un insegnamento che, già a partire dal secondo ciclo della scuola primaria, dovrebbe essere volto anche a far capire agli alunni l'importanza delle dimostrazioni[2], soprattutto per i risvolti sociali che esse hanno, come garanzia di certezza.

Una dimostrazione alternativa del I Teorema di Euclide.
In fig. 1 il quadrilatero ***ACDF*** è scomposto in un rettangolo, ***ABLF*,** e in due triangoli, ***ABC*** e ***BLD***. Ora lo scomporremo in un altro modo. Precisamente, facendo riferimento a fig. 3, sul lato ***CD*** prendiamo il punto ***M*** tale che risulti ***MD*** = ***CB***; onde, per differenza, ***CM*** = ***BD***. Inoltre, sul lato ***FD*** prendiamo il punto **N** tale che sia ***ND*** = ***FL*** (=***AB***), onde per differenza ***FN*** = ***LD***. Congiungendo ***M*** con ***N*** ed ***N*** con ***A*** si ottiene una seconda scomposizione del quadrilatero ***ACDF***, costituita dal quadrilatero **ACMN** e dai due triangoli ***AFN***, ***NDM***.

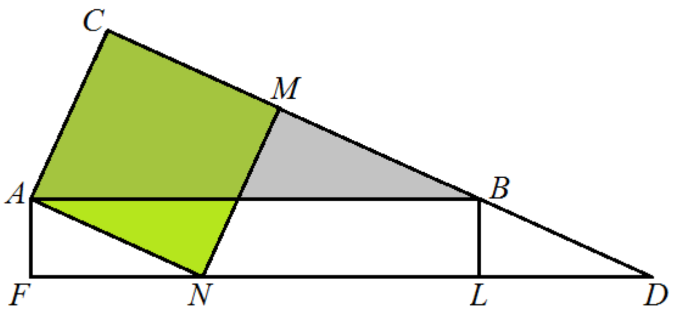

fig. 3

Ebbene, i triangoli rettangoli ***BLD*** e ***AFN*** sono uguali, avendo – per costruzione – i cateti a due a due uguali. Ne segue che sono uguali anche le ipotenuse ***BD*** e ***AN***. Inoltre i triangoli ***ABC*** ed ***NDM*** sono uguali per il primo criterio di uguaglianza, poiché l'angolo ***CBA*** è uguale all'angolo in ***D*** – in quanto essi sono complementari all'angolo ***DBL*** – e i lati che delimitano rispettivamente questi due angoli sono uguali per costruzione.
Perciò il rettangolo ***ABLF*** e il quadrilatero ***ACMN*** sono equivalenti per differenza. Resta da provare che ***ACMN*** è un quadrato.
In effetti, ***NM*** = ***AC*** perché lati opposti ad angoli uguali situati rispettivamente nei triangoli uguali ***ABC*** ed ***NDM***; inoltre ***NM*** e ***AC*** sono paralleli, in quanto entrambi perpendicolari a ***CD***. Perciò il quadrilatero ***ACMN*** è un rettangolo, avendo due lati opposti uguali e paralleli e un angolo retto. In fine tale rettangolo è un quadrato, poiché sono uguali anche i suoi due lati consecutivi ***CM*** e ***AC***, entrambi uguali a ***BD*** (per l'uguaglianza fra ***AC*** e ***BD*** si veda l'ultima parte dell'Osservazione 1.2). Perciò ***ACMN*** è un quadrato; ed è quello di cui al I teorema di Euclide, in quanto esso ha per lato il cateto ***AC***. ■

[2] Una su tutte, la dimostrazione concreta – in termini di palline da aggregare – della proprietà commutativa dell'addizione tra numeri naturali.

3. Il II Teorema di Euclide

Questo teorema nei nostri manuali scolastici viene quasi sempre dimostrato applicando il teorema di Pitagora e il I teorema di Euclide. Infatti, in riferimento al triangolo rettangolo ***AHC*** di fig. 4, il teorema di Pitagora ci dice che il quadrato costruito su ***CH*** è equivalente alla differenza tra il quadrato costruito su ***AC*** e quello costruito su **AH**. Allora, poiché per il I teorema di Euclide il quadrato costruito su ***AC*** è equivalente al rettangolo costruito sull'ipotenusa ***AB*** e sul segmento ***AH***, la differenza tra questo rettangolo e il quadrato costruito su ***AH*** ci dà proprio il rettangolo costruito sulle proiezioni ***AH*** e ***HB*** dei cateti ***AC*** e ***CB*** rispettivamente.

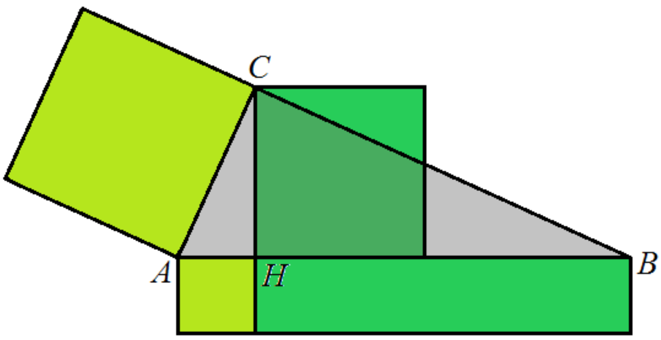

fig. 4

D'altro canto, questo tipo di ragionamento può essere facilmente invertito, provando così che il teorema di Pitagora – che, per altro, può essere dimostrato facilmente senza usare il I teorema di Euclide – e il II teorema di Euclide assicurano il I teorema di Euclide.
Però in questa sede noi vogliamo dare una dimostrazione del II teorema di Euclide che sia indipendente dai due teoremi usati precedentemente.

Una dimostrazione diretta del II Teorema di Euclide.
Riprendendo la costruzione illustrata in fig. 1, prolunghiamo ***CH*** fino a incontrare ***FD*** in un punto ***P***, onde avremo una scomposizione del triangolo ***CPD*** in due triangoli, ***CHB*** e ***BLD***, e nel rettangolo ***HBLP*** di cui al II teorema di Euclide (si veda fig. 5).

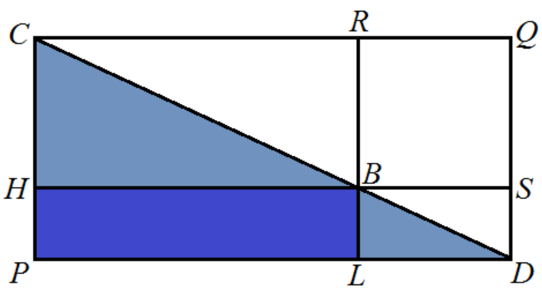

fig. 5

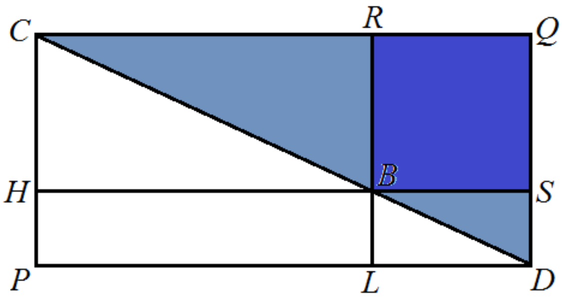

fig. 6

Poi consideriamo il rettangolo ***CPDQ*** in cui ***CP*** e ***PD*** sono due lati consecutivi, mentre ***CD*** è una delle diagonali; onde i triangoli ***CPD*** e ***CQD*** sono uguali.

Quindi prolunghiamo il lato ***HB*** fino a incontrare il lato ***QD*** nel punto ***S***; inoltre prolunghiamo il lato ***LB*** fino a incontrare il lato ***CQ*** nel punto ***R***. Onde il triangolo ***CQD*** risulta scomposto in due triangoli, ***CRB*** e ***BSD***, e nel quadrilatero ***RQSB*** (si veda fig. 6).
Poiché per costruzione i segmenti ***CR*** e ***HB*** sono paralleli e lo stesso si può dire anche per i segmenti ***CH*** ed ***RB***, e poiché l'angolo ***CHB*** è retto, allora il quadrilatero ***CRBH*** è un rettangolo, che risulta scomposto, mediante la diagonale ***CB*****,** nei due triangoli uguali ***CRB*** e ***BHC***. Con analoghe argomentazioni applicate al quadrilatero ***BSDL*** si arriva a dimostrare che sono uguali anche i triangoli ***BSD*** e ***DLB***.
Inoltre, per come i suoi lati sono stati costruiti, il quadrilatero ***RQSB*** è un rettangolo in cui ***RB*** = ***CH*** (che è l'altezza del nostro triangolo ***ABC***) e ***BS*** = ***LD***. Ma verso la fine dell'Osservazione 1.2 si è visto che ***CH*** = ***LD***, e allora si ha ***RB*** = ***BS***; onde il rettangolo ***RQSB***, avendo due lati consecutivi uguali, è un quadrato; ed è uguale al quadrato di cui al II teorema di Euclide, quello costruito sull'altezza ***CH***. ■

Bibliografia

[1] Enriques F., Amaldi U., *Elementi di Geometria*, Parte I, Zanichelli, BO, 1970.
[2] Euclide, *Elementi*, a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, UTET, 1970.
[3] Lombardi L., Gerla G,, *Equiscomponibilità ed equicompletabilità*. Periodico di matematiche, N, 2, Vol. 5, Soc. Naz. Mathesis, 2013.
[4] Lombardi L., Gerla G,, *Equiscomponibilità come metodo universale*. Periodico di matematiche, N, 3, Vol. 5, Soc. Naz. Mathesis, 2013.
[5] G. Melzi - L. Tonolini, *Il metodo della geometria*, Vol. I, Minerva Italica, 1997.