205. Curiose tipologie di numeri primi

Stefano Borgogni
e-mail: stfbrg@rocketmail.com

"I numeri primi sono i mattoni con i quali, usando come cemento la moltiplicazione, si costruiscono gli altri numeri" (M. Ferrari)

Sunto

I Numeri Primi hanno attirato l'attenzione dei matematici fin dall'antichità e su di essi, nel corso dei secoli, si sono versati i proverbiali "fiumi di inchiostro".
Ciononostante, rimane ancora tanto da scoprire. In particolare è tuttora irrisolto il problema fondamentale, quello di scoprire una qualche regola in base alla quale i numeri primi si susseguono.[1]
Nel presente studio, però, non si tratterà questo problema, né si affronterà qualcuna delle altre, numerose questioni insolute relative ai numeri primi, più modestamente, si cercherà di portare l'attenzione su alcune curiose tipologie di numeri primi, poco conosciute ma che possono offrire spunti interessanti agli appassionati di matematica.

Introduzione

In primo luogo, presentiamo una tabella che descrive le svariate tipologie di numeri primi che si prenderanno in esame nel prosieguo del testo. Per evitare di ripetere più volte le stesse avvertenze, precisiamo che nella trattazione saranno ignorati i numeri primi minori di 10.

Nome	***Descrizione***	***Esempio***	***Primi numeri (> 10) della sequenza***
Additivi	La somma delle cifre dà un numero primo	47	11-23-29-41-43-47-61-67-83-89-101-113
Disparissimi	Hanno tutte le cifre dispari	97	11-13-17-19-31-37-53-59-71-73-79-97-113
"Imirp"	Invertendo le cifre danno un altro primo	149	11-13-17-31-37-71-73-79-97-101-107-113
Palindromi	Invertendo le cifre danno lo stesso numero	101	11-101-131-151-181-191-313-353-373-383
Permutabili	Tutti i possibili "anagrammi" sono primi	113	11-13-17-31-37-71-73-79-97-113-131-199
Monocifra	Sono formati da una sola cifra ripetuta	11	11-19 cifre "1"-23 cifre "1"-317 cifre "1"

1. Numeri primi presi singolarmente

Per maggiore chiarezza, il testo è suddiviso in due parti. Nella prima si tratteranno diverse tipologie di numeri primi considerati singolarmente, centrando in particolare l'attenzione sulle cifre che compongono i numeri stessi. Nella seconda parte si tratteranno i numeri primi presi a gruppi.

Numeri Primi Additivi

Cominciamo questa carrellata con i **Numeri Primi Additivi**, ossia numeri tali che la somma delle loro cifre è ancora un numero primo, come 47 (4+7 = 11).

[1] Su questo argomento citiamo un'opera abbastanza recente, che approfondisce in particolare lo stretto legame tra la distribuzione dei numeri primi e la cosiddetta "Ipotesi di Riemann": si tratta di *The music of the primes* (tradotto in italiano con il meno significativo titolo *L'enigma dei numeri primi*) di Marcus De Sautoy, 2005.

La successione dei Primi Additivi inizia con: 11, 23, 29, 41, 43, 47, 61, 67, 83, 89.
Visto che la somma delle cifre deve essere necessariamente un numero dispari (a parte i casi in cui essa valga 2, ad esempio nel numero 101), si può senz'altro stabilire che se sono composti da un numero di cifre pari, devono comprendere al loro interno almeno una cifra pari.[2] Facciamo due esempi: 29 (somma 11) oppure 1.093 (somma 13).
Al contrario, i Primi Additivi con numero di cifre dispari devono avere un numero pari di cifre pari, zero compreso: dunque, possono anche essere formati esclusivamente da cifre dispari, come i numeri che esamineremo adesso.

Numeri Primi Disparissimi

Passiamo, dunque, ai **Numeri Primi Disparissimi**,[3] ossia numeri formati soltanto da cifre dispari.
I primi dieci Disparissimi sono i seguenti: 11, 13, 17, 19, 31, 37, 53, 59, 71, 73.
Dalla definizione stessa si può dedurre che questo insieme presenta intervalli di decine di numeri - poi di centinaia, poi di migliaia e così via - in cui non si potrà trovare alcun numero primo; ad esempio, tra 20 e 30 (10 unità), tra 400 e 500 (100 unità) etc.
Inoltre, in relazione ai Primi Additivi visti poc'anzi, è evidente che nel caso di numeri con un numero di cifre pari, le due tipologie sono alternative: se un primo è additivo non potrà essere disparissimo e viceversa.
Senz'altro più interessanti sono, però, altre tipologie di primi.
In particolare, ne esamineremo alcune che delineano un percorso di successive selezioni, dal generale al particolare, attraverso il quale si restringe sempre più la quantità di "oggetti" considerati, fino ad ottenere dei numeri estremamente rarefatti nell'universo degli interi.
Questa sorta di sequenza comprende i Numeri Primi "Imirp", seguiti a ruota dai Primi Permutabili, dai Primi Palindromi e dai Primi Monocifra, definizioni che saranno meglio spiegate nei singoli paragrafi dedicati a ciascun gruppo.

Numeri Primi "Imirp"

Cominciamo con i **Numeri Primi "Imirp",** il cui curioso nome trae origine semplicemente dalla parola "Primi" letta al contrario.[4]
Si tratta, come si può intuire, di numeri che rimangono primi se si leggono le loro cifre in ordine inverso: un esempio è il numero 37, dato che anche 73 è primo.
La sequenza dei Primi "Imirp" inizia con: 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 101.
Ovviamente, i numeri di questa tipologia non possono iniziare né con un numero pari, né con "5", per cui al di sotto di 100 si trova una striscia di 30 numeri (almeno) priva di "Imirp", mentre al di sotto di 1.000 tale striscia è costituita da non meno di 300 unità.
In generale, possiamo dire che nell'insieme dei numeri interi vi sono infiniti intervalli "Imirp free" di dimensione crescente pari a 3×10^k (con k maggiore o uguale a 2).
I Numeri Primi "Imirp" sono infiniti? Si ipotizza di sì, ma la questione è tuttora irrisolta.

Numeri Primi Palindromi

Restringiamo ora il campo a un sottoinsieme degli "Imirp", considerando i **Numeri Primi Palindromi**, ossia i numeri che rimangono identici anche invertendo l'ordine delle cifre che li compongono. Esempi: 11, 181 o 797.

---

[2] Unica eccezione è il numero 11.
[3] Traduciamo così, in maniera non del tutto letterale, il termine inglese "Oddest" con cui sono normalmente conosciuti questi numeri.
[4] Nella letteratura specializzata questi numeri, secondo la dizione inglese, sono generalmente definiti come "Emirp".

I primi dieci Primi Palindromi sono 11, 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383.
Ovviamente, le condizioni affinché un numero primo sia palindromo sono assai più restrittive rispetto agli "Imirp" considerati in precedenza. La limitazione più importante è che i Primi Palindromi non possono avere un numero pari di cifre, poiché altrimenti sarebbero divisibili per 11.
Dunque, in questo caso le "strisce" prive di tali tipi di primi sono molto più ampie di quanto visto nel paragrafo precedente: vanno, infatti, eliminati tutti i numeri di 4 cifre (da 1.000 a 9.999, ossia 9.000 unità), quelli di 6 cifre (900.000 unità) e così via.
In generale, possiamo osservare infiniti intervalli senza Primi Palindromi di dimensioni pari - almeno - a 9×10^{2k} (con k maggiore o uguale a 2).

Numeri Primi Permutabili

A partire dagli "Imirp" si può costruire anche un altro sottoinsieme (non disgiunto da quello dei Primi Palindromi): si tratta dei Numeri Primi Permutabili, ovvero quei numeri per i quali sono primi anche i numeri ottenibili con tutte le possibili permutazioni. In altre parole, numeri che restano primi comunque vengano "anagrammate" le loro cifre: ad esempio, 199, 919 e 991.
La sequenza dei Primi Permutabili comincia con: 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 113.
E' evidente come tale vincolo diventi sempre più stringente con l'aumentare delle cifre e, di conseguenza, delle possibili permutazioni: fino a 100 i Primi Permutabili coincidono con gli "Imirp", poi - salendo a 3 cifre - calano sensibilmente di numero.
Si potrebbe pensare che questa tendenza continui e, dunque, i Primi Permutabili oltre 1.000 siano abbastanza rari, ma non rarissimi. Invece, sorprendentemente - una volta superata questa soglia - per trovare il successivo numero appartenente al gruppo si deve salire addirittura fino a 19 cifre!
Scopriremo tra poco quale sia esattamente questo numero…

Numeri Primi Monocifra[5]

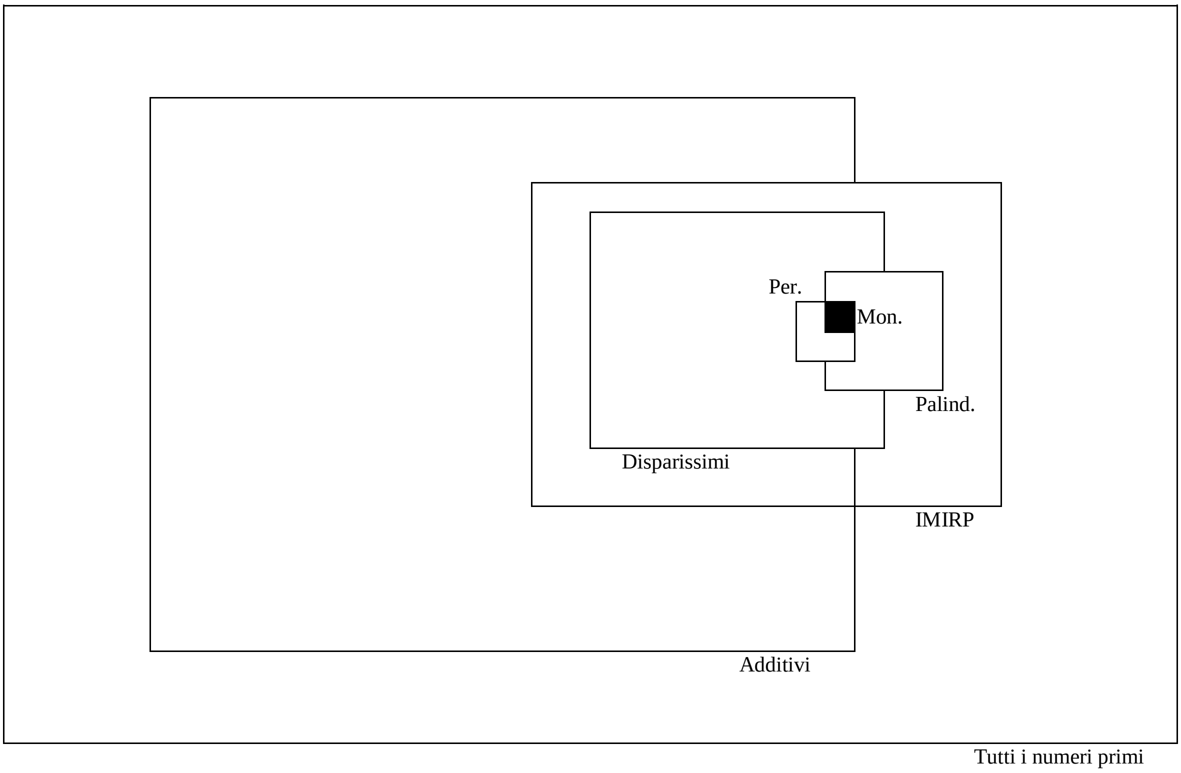
Infine, a conclusione di questo processo di selezioni successive, arriviamo all'ultimo stadio: i Numeri **Primi Monocifra**, numeri costituiti da una sola cifra ripetuta n volte.
Esclusi i casi banali di cui si è detto all'inizio, l'unica cifra accettabile per comporre tali numeri è, evidentemente, "1"; per esempio, 77.777 non va bene perché è divisibile per 11.111.
Ma c'è di più: detto M_n il numero composto da n cifre "1", è facile dimostrare che se n è divisibile per k, allora M_n è divisibile per M_k. Ad esempio, il numero M_{15} è divisibile per M_5: 111.111.111.111.111 = 11.111×10.000.100.001.
Dunque, affinché un numero monocifra sia primo è necessario che sia primo anche il suo numero di cifre "1". Ovviamente, non vale il viceversa; ad esempio 111 (3×37) e 11.111 (41×271) sono entrambi composti.
Riportiamo l'elenco dei primi Primi Monocifra, indicando - però - non i numeri nella loro interezza (che sono di dimensioni tali da risultare illeggibili), bensì il numero di cifre "1" che li compongono. Con questa avvertenza, la sequenza è la seguente: 2, 19, 23, 317, 1.031, 49.081, 86.453, 109.297...
Come si vede, adesso i paletti sono veramente molto stretti, tanto che - dopo 11 - il successivo primo monocifra è quello formato da 19 cifre "1".
Ed ecco svelato il piccolo "mistero" del paragrafo precedente: il primo numero primo permutabile maggiore di 1.000 è esattamente il numero con 19 "1" appena visto. Ma non basta: da qui in poi pare estremamente probabile (anche se non è stato ancora dimostrato con certezza) che la sequenza dei Primi Permutabili e quella dei Primi Monocifra siano esattamente coincidenti!

[5] Anche in questo caso, si possono trovare riferimenti a tali numeri utilizzando la dicitura inglese, che è "Rep-unit".

La successione continua indefinitamente? Ogni tanto viene scoperto qualche “gigante” con milioni di cifre “1” e si suppone che - benché estremamente rarefatti - vi siano infiniti Primi Monocifra; come in tutti gli altri casi, però, ciò non è stato ancora provato.

Uno sguardo d’insieme

Esaurita questa disamina, proviamo a cogliere con uno sguardo d’insieme le tipologie di numeri primi esaminate, utilizzando due diverse rappresentazioni.
In primo luogo, proponiamo una figura che, attraverso la classica struttura insiemistica (con l’uso di rettangoli, anziché delle più consuete forme ad ellisse), mostra le relazioni di inclusione tra le varie tipologie esaminate.



Aggiungiamo che si è cercato di dimensionare i rettangoli suppergiù in proporzione alla quantità dei numeri minori di 100.000 esistenti per ogni tipologia; fanno eccezione i Permutabili (Per.) e i Monocifra (Mon.), che sono sovradimensionati poiché in una rappresentazione proporzionale sarebbero risultati invisibili.
Dunque, la figura ci mostra non solo quali gruppi di primi sono compresi in altri, ma ci offre anche una prima approssimazione di “quanti” siano i primi che appartengono alle diverse tipologie.[6]
Per approfondire questo aspetto, aggiungiamo una tabella - per brevità limitata ai numeri fino a 100.000 - che mostra, per l’appunto, la densità di ciascun gruppo esaminato.
Va precisato che, per completezza d'informazione, in questa tabella si sono considerati tutti i numeri primi, anche quelli minori di 10.
Riguardo al numero “1”, ci atteniamo alla tendenza oggi largamente prevalente, per cui - a differenza di un tempo - esso non viene considerato primo.

[6] Trattandosi di insiemi (con ogni probabilità) infiniti, il “quanti” non va inteso letteralmente, bensì come numero di ricorrenze all’interno di uno stesso intervallo finito di interi.

Tipo di primi	*Fino a 100*		*Fino a 1.000*		*Fino a 10.000*		*Fino a 100.000*	
	N.	*%*	*N.*	*%*	*N.*	*%*	*N.*	*%*
Tutti	25	25%	168	16,4%	1.229	12,3%	9.592	9,59%
Additivi	14	14%	89	8,9%	590	5,9%	3.883	3,88%
Disparissimi	15	15%	57	5,7%	182	1,8%	790	0,79%
"Imirp"	13	13%	56	5,6%	260	2,6%	1.759	1,76%
Palindromi	5	5%	20	2,0%	20	0,2%	113	0,11%
Permutabili	13	13%	22	2,2%	22	0,2%	22	0,02%
Monocifra	5	5%	5	0,5%	5	0,05%	5	0,005%

Che cosa ci dice questa tabella?
In primo luogo, che finché si resta su piccoli ordini di grandezza vi sono oscillazioni che non permettono di trarre alcuna conclusione attendibile (ad esempio, all'inizio i Primi Permutabili sembrano più numerosi dei Primi Palindromi). Dunque, occorre salire almeno fino a numeri di 5 cifre per farsi un'idea un po'più precisa della numerosità delle diverse tipologie.
Secondariamente, si può notare che alcuni gruppi progrediscono con una certa costanza, mentre altri procedono "a balzi" assai più irregolari.
Più in particolare, si può dire che:

- I Primi "Imirp" e i Primi Disparissimi seguono un andamento simile a quello dei numeri primi in generale, ossia aumentano di numero con una certa gradualità (in base a funzioni non lineari, ma di tipo esponenziale/logaritmico).
- La quantità di Primi Palindromi aumenta per gli ordini di grandezza dispari (10^3, 10^5 etc.) e poi "si blocca" per gli ordini pari (10^4, 10^6 etc.).
- Se si fissa un qualsiasi numero N superiore a 1.000, i Permutabili compresi nell'intervallo tra 0 e N sono - con ogni probabilità[7] - 17 in più rispetto ai Monocifra.

Una tabella pitagorica di primi

Concludiamo questa parte con una tabella che esula leggermente dall'argomento fin qui trattato, ma può essere utile per visualizzare in maniera immediata alcuni numeri composti non immediatamente identificabili come tali e che - dunque - potrebbero essere erroneamente scambiati per primi.
Si tratta di una tabella costruita sullo stile della ben nota tavola pitagorica, che riporta il prodotto di due numeri primi minori di 70.
Non si sono considerati i multipli dei numeri 2, 3, 5 e 11 poiché - a differenza degli altri - si possono scoprire facilmente in base alle regole di scomposizione note anche ai ragazzi delle scuole medie.

[7] Non possiamo dire "esattamente" poiché - come accennato - la coincidenza tra primi permutabili e monocifra (oltre le 3 cifre) costituisce un'ipotesi fortemente probabile, ma non una certezza.

	7	**13**	**17**	**19**	**23**	**29**	**31**	**37**	**41**	**43**	**47**	**53**	**59**	**61**	**67**
7	49	91	119	133	161	203	217	259	287	301	329	371	413	427	469
13	91	169	221	247	299	377	403	481	533	559	611	689	767	793	871
17	119	221	289	323	391	493	527	629	697	731	799	901	1.003	1.037	1.139
19	133	247	323	361	437	551	589	703	779	817	893	1.007	1.121	1.159	1.273
23	161	299	391	437	529	667	713	851	943	989	1.081	1.219	1.357	1.403	1.541
29	203	377	493	551	667	841	899	1.073	1.189	1.247	1.363	1.537	1.711	1.769	1.943
31	217	403	527	589	713	899	961	1.147	1.271	1.333	1.457	1.643	1.829	1.891	2.077
37	259	481	629	703	851	1.073	1.147	1.369	1.517	1.591	1.739	1.961	2.183	2.257	2.479
41	287	533	697	779	943	1.189	1.271	1.517	1.681	1.763	1.927	2.173	2.419	2.501	2.747
43	301	559	731	817	989	1.247	1.333	1.591	1.763	1.849	2.021	2.279	2.537	2.623	2.881
47	329	611	799	893	1.081	1.363	1.457	1.739	1.927	2.021	2.209	2.491	2.773	2.867	3.149
53	371	689	901	1.007	1.219	1.537	1.643	1.961	2.173	2.279	2.491	2.809	3.127	3.233	3.551
59	413	767	1.003	1.121	1.357	1.711	1.829	2.183	2.419	2.537	2.773	3.127	3.481	3.599	3.953
61	427	793	1.037	1.159	1.403	1.769	1.891	2.257	2.501	2.623	2.867	3.233	3.599	3.721	4.087
67	469	871	1.139	1.273	1.541	1.943	2.077	2.479	2.747	2.881	3.149	3.551	3.953	4.087	4.489

La tabella, naturalmente, è lungi dall'essere esaustiva; mancano, ad esempio, i numeri derivanti dal prodotto di 3 numeri primi, che potrebbero altrettanto bene "camuffarsi" da primi: ad esempio 2.261 (7×17×19) oppure 3.857 (7×19×29).

2. Numeri primi presi a coppie o a gruppi

In questa seconda parte esamineremo i numeri primi considerati non più uno per uno, bensì congiuntamente: a coppie (il caso più usuale), a terne o a gruppi di 4.
Si potrebbe anche andare oltre, ma per brevità ci limiteremo alla "quaterna" come raggruppamento massimo di numeri.

Numeri Primi Gemelli

Il caso più semplice e immediato consiste nel prendere in esame le coppie di numeri più vicini tra loro; ecco, allora, i **Numeri Primi Gemelli**, cioè numeri della forma (n, n+2), che "distano" soltanto 2 unità.
Vi sono diversi vincoli per questi numeri. Ad esempio, è stato dimostrato che ogni coppia di primi gemelli - a parte il caso (3, 5) - deve avere la forma (6k-1, 6k+1).
Le prime coppie di Primi Gemelli superiori a 10 sono: (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), (101, 103), (107, 109), (137, 139), (149, 151).
L'esistenza di infinite coppie di primi gemelli - che prende, per l'appunto, il nome di "Congettura dei numeri primi gemelli" - è da lungo tempo uno dei grandi problemi aperti della teoria dei numeri.

Senza approfondire l'argomento, ricordiamo soltanto un importante risultato ottenuto dal matematico norvegese Viggo Brun, il quale dimostrò nel 1919 che la somma dei reciproci dei primi gemelli è convergente.
Il valore limite di tale somma è la cosiddetta "Costante di Brun per i numeri Primi Gemelli", che vale all'incirca 1,90216.

Altre coppie di numeri primi

Una naturale estensione dei Primi Gemelli riguarda le coppie di numeri che "distano" l'uno dall'altro 4 o 6 unità.
Per estensione del grado di parentela, le coppie (p, p+4) costituiscono i cosiddetti **Numeri Primi Cugini** (curiosamente, chi ha coniato queste definizioni si è dimenticato dei fratelli!), mentre alle coppie (p, p+6) è stata data una denominazione - quella di **Numeri Primi Sexy**[8] - totalmente estranea rispetto alle precedenti.
La successione delle coppie di Primi Cugini inizia con: (13, 17), (19, 23), (37, 41), (43, 47), (67, 71), (79, 83), (97, 101), (103, 107), (109, 113), (127, 131); quella dei Primi Sexy con: (11, 17), (13, 19), (17, 23), (23, 29), (31, 37), (37, 43), (41, 47), (47, 53), (53, 59), (61, 67).
Ricordiamo, en passant, che - analogamente al caso dei Primi Gemelli - esiste anche una Costante per i Primi Cugini, il cui valore approssimato è 1,19704.
Si ritiene (ma non vi è alcuna dimostrazione in proposito) che sia le coppie di Primi Cugini, sia quelle di Primi Sexy siano infinite. Di più, ampliando il discorso a numeri primi che "distano" più di 6 unità, va segnalata la cosiddetta Congettura di Polignac,[9] secondo la quale per ogni numero naturale k esistono infinite coppie di numeri primi che differiscono tra loro di 2k.

Terne di numeri primi

Se nella ricerca di numeri primi il più possibile vicini ampliamo il campo, andando "oltre la coppia", possiamo ottenere le **Terne di Numeri Primi**, raggruppamenti di numeri della forma (p, p+2, p+6) oppure (p, p+4, p+6).[10]
Ciò equivale a dire che una terna di primi contiene sicuramente una coppia di Primi Gemelli (p, p+2 oppure p+4, p+6), una coppia di Primi Cugini (p, p+4 oppure p+2, p+6) e, infine, una coppia di Primi Sexy (p, p+6).
Lo stesso numero può far parte di due o anche tre terne di primi; per esempio, 103 è membro dei gruppi (97, 101, 103), (101, 103, 107) e (103, 107, 109). Quando ciò avviene, si dice che i cinque numeri interessati formano una Cinquina di Primi, tipo di raggruppamento che non esamineremo in questa sede.
Le prime terne di primi maggiori di 10 sono: (11, 13, 17), (13, 17, 19), (17, 19, 23), (37, 41, 43), (41, 43, 47), (67, 71, 73), (97, 101, 103), (101, 103, 107), (103, 107, 109), (107, 109, 113).
Come per le coppie viste poc'anzi, non si sa se le terne di numeri primi siano o meno infinite.

Quaterne di numeri primi

Completiamo questa breve analisi con le **Quaterne di Numeri Primi**, ossia le sequenze di 4 numeri primi della forma (p, p+2, p+6, p+8).

[8] Questi numeri non hanno niente di particolarmente attraente; semplicemente, la loro denominazione viene dal latino "sex", il numero sei.
[9] Dal nome del matematico francese dell'800 Alphonse de Polignac.
[10] E' chiaro che - a parte (3, 5, 7) - non può esistere alcuna terna di numeri (n, n+2, n+4), poiché uno di essi sarebbe sicuramente divisibile per 3.

Una quaterna di primi contiene necessariamente due coppie di Primi Gemelli e due terne di primi sovrapposte l'una all'altra.
La sequenza delle quaterne di primi - sempre oltre il numero 10 - comincia con: (11, 13, 17, 19), (101, 103, 107, 109), (191, 193, 197, 199), (821, 823, 827, 829), (1.481, 1.483, 1.487, 1.489), (1.871, 1.873, 1.877, 1.879), (2.081, 2.083, 2.087, 2.089), (3.251, 3.253, 3.257, 3.259), (3.461, 3.463, 3.467, 3.469), (5.651, 5.653, 5.657, 5.659).
Con l'eccezione di (5, 7, 11, 13), tutte le quaterne di primi hanno la forma (30n+11, 30n+13, 30n+17, 30n+19).
Non è nemmeno di caso di aggiungere che, con ogni probabilità, esistono infinite quaterne di numeri primi, ma - una volta di più - tale congettura non è mai stata provata.

Uno sguardo d'insieme

Analogamente a quanto visto nella parte relativa ai numeri primi considerati singolarmente, proponiamo adesso una tabella per dare un'idea della "numerosità" dei raggruppamenti di numeri primi.
Per semplicità, ci limiteremo a considerare le tre coppie esaminate in precedenza, lasciando da parte le terne e le quaterne.

Tipologia	*Fino a 100*		*Fino a 1.000*		*Fino a 10.000*		*Fino a 100.000*	
	N.	*%*	*N.*	*%*	*N.*	*%*	*N.*	*%*
Gemelli	15	15%	69	6,9%	409	4,1%	2.447	2,45%
Cugini	16	16%	81	8,1%	405	4,1%	2.431	2,43%
Sexy	22	22%	119	11,9%	703	7,0%	4.363	4,36%

A scanso di equivoci, ricordiamo che il numero indicato in tabella è relativo alla quantità di singoli numeri, non alla quantità di coppie.
Detto questo, possiamo osservare che i "parenti" (Primi Gemelli e Primi Cugini) seguono una medesima progressione: escluse le oscillazioni presenti per gli ordini di grandezza più piccoli, infatti, a partire dalle 4 cifre la loro percentuale sul totale degli interi è pressoché identica.
I Primi Sexy, invece, sono notevolmente più numerosi rispetto alle altre due tipologie; inoltre, lo scarto tende ad aumentare al crescere dell'ordine di grandezza considerato.