

# 208. Declinazione e inclinazione gnomonica di un piano verticale

di Michele T. Mazzucato

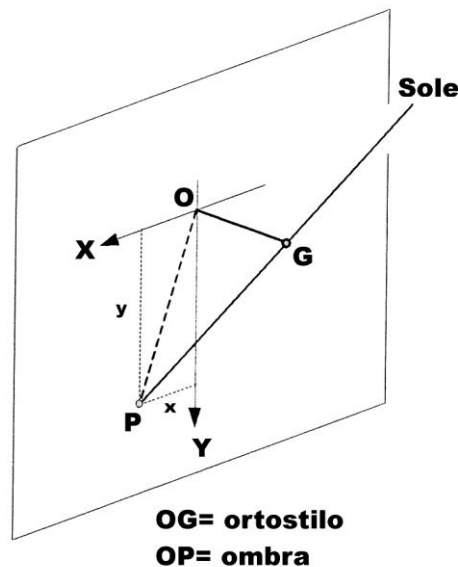
*Siccome il ferro s'arrugginisce senza l'esercizio  
e l'acqua si putrefa o nel freddo s'addiaccia,  
così lo 'ngegno senza esercizio si guasta.*

**Codice Atlantico di Leonardo da Vinci (1452-1519)**

Si consideri un "sistema di coordinate avente come origine il piede dell'asta OG perpendicolare al piano verticale, l'asse X orizzontale positivo verso sinistra e l'asse Y, con direzione della massima pendenza sul piano, positivo verso il basso" avremo una:

declinazione $\alpha$ di $+90^\circ$	se il piano verticale è rivolto verso OVEST
declinazione $\alpha$ positiva	se il piano verticale è rivolto verso SUD-OVEST
declinazione $\alpha$ di $0^\circ$	se il piano verticale è rivolto a SUD
declinazione $\alpha$ negativa	se il piano verticale è rivolto verso SUD-EST
declinazione $\alpha$ di $-90^\circ$	se il piano verticale è rivolto verso EST

se il piano è verticale l'inclinazione è zero.



## A. Calcoli preliminari

1) Istante di Tempo Medio del Fuso (quello segnato dagli orologi) in cui bisogna effettuare la misura in Tempo Vero Locale (in ore):

$$TMF = TVL + (TZ \cdot 15^\circ - \lambda) / 15^\circ + Eq / 60' \quad (+1 \text{ ora estiva})$$

$$TVL = TMF - (TZ \cdot 15^\circ - \lambda) / 15^\circ - Eq / 60' \quad (-1 \text{ ora estiva})$$

**nota:**  $TML = TVL + Eq$  e  $TVF = TVL + (TZ \cdot 15^\circ - \lambda) / 15^\circ$

2) Angolo orario (risultato in gradi):

$$\omega = 15^\circ \cdot (\text{TVL} - 12)$$

ma anche

$$\omega = 15^\circ \cdot (\text{TML} - 12) - 15^\circ \cdot \text{Eq} / 60$$

$$\omega = 15^\circ \cdot (\text{TVF} - 12) - (\text{TZ} \cdot 15^\circ - \lambda)$$

$$\omega = 15^\circ \cdot (\text{TMF} - 12) - (\text{TZ} \cdot 15^\circ - \lambda) - \text{Eq} / 4$$

$$\cos \omega = \frac{\sin \delta - \sin \varphi \cos \varphi}{\cos \delta \cos \varphi} \quad (\text{per verifica})$$

**Nota:** il valore  $(\text{TZ} \cdot 15^\circ - \lambda)$  è la costante locale di correzione in longitudine, positiva se la località si trova a OVEST del meridiano centrale del fuso e negativa se la località si trova a EST del meridiano centrale del fuso.

3) Altezza del Sole:

$$h = \arcsin(\sin \delta \cdot \sin \varphi + \cos \delta \cdot \cos \varphi \cdot \cos \omega)$$

$$\text{tgh} = \frac{\sigma}{L} \quad (\text{piano orizzontale})$$

4) Giorno dell'anno:

per anni ordinari

$$N = \text{int} \left( \frac{275 \cdot M}{9} \right) - 2 \cdot \text{int} \left( \frac{M + 9}{12} \right) + D - 30$$

per anni bisestili

$$N = \text{int} \left( \frac{275 \cdot M}{9} \right) - \text{int} \left( \frac{M + 9}{12} \right) + D - 30$$

5) Equazione del tempo (in minuti, ottenuta con sviluppi in serie di Fourier tratti da Ferrari):

$$\begin{aligned} \text{Eq} = & + 7.3670 \cdot \cos(0.9856474 \cdot N + 85.837) + \\ & + 9.9182 \cdot \cos(1.9712947 \cdot N + 109.984) + \\ & + 0.3060 \cdot \cos(2.9569421 \cdot N + 103.642) + \\ & + 0.2027 \cdot \cos(3.9425894 \cdot N + 128.678) \dots \end{aligned}$$

6) Declinazione del Sole (in gradi, ottenuta con sviluppi in serie di Fourier tratti da Ferrari):

$$\begin{aligned} \delta = & + 0.3838 + \\ & + 23.2623 \cdot \cos(0.9856474 \cdot N - 169.883) + \\ & + 0.3552 \cdot \cos(1.9712947 \cdot N - 175.526) + \\ & + 0.1342 \cdot \cos(2.9569421 \cdot N - 148.378) + \\ & + 0.0326 \cdot \cos(3.9425894 \cdot N + 2.929) \dots \end{aligned}$$

7) Azimut del Sole:

$$\text{Az} = \arctg \left( \frac{\sin \omega \cos \delta}{\cos \delta \sin \varphi \cos \omega - \sin \delta \cos \varphi} \right)$$

$$Az = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \text{ (piano orizzontale)}$$

$$Az = \operatorname{arctg} \frac{\sin \omega}{\sin \varphi \cos \omega - \cos \varphi \operatorname{tg} \delta} \text{ (per verifica)}$$

$$Az = \operatorname{arcsin} \frac{\cos \delta \sin \omega}{\cosh} \text{ (per verifica)}$$

$$Az = \operatorname{arccos} \left( \frac{\sin \delta \cos \varphi - \cos \delta \sin \varphi \cos \omega}{\cosh} \right) \text{ (per verifica)}$$

## B. Declinazione $\alpha$ gnomonica del piano verticale

Nell'istante del mezzogiorno vero locale

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sigma}$$

nell'istante qualsiasi del giorno

$$\alpha = Az + \operatorname{arctg} \frac{x}{\sigma}$$

$$\alpha = Az \pm \operatorname{arccos} \left( \frac{\sigma}{y} \operatorname{tgh} \right) \text{ (nota 1)}$$

$$\alpha = Az + \operatorname{arcsin} \left( \frac{x}{y} \operatorname{tgh} \right)$$

$$\alpha = Az \pm \operatorname{arccos} \left( \frac{1}{\cosh \sqrt{1 + \left( \frac{L}{\sigma} \right)^2}} \right) * e **$$

$$\alpha = Az \pm \operatorname{arccos} \left( \frac{\sigma}{\cosh \sqrt{\sigma^2 + L^2}} \right) *$$

\* = segno – se l'ombra cade a destra della linea verticale ; segno + se l'ombra cade a sinistra della linea verticale.

\*\* = L deve essere introdotto con segno – se l'ombra cade a destra della verticale per il piede dell'asta.

## C. Declinazione $\alpha$ e inclinazione $i$ gnomonica del piano verticale

$$\alpha = Az + \operatorname{arcsin} \left( \frac{x B}{\sigma \cosh} \right) = Az + \operatorname{arcsin} \frac{x}{\cosh (\sigma^2 + x^2 + y^2)}$$

$$\operatorname{con} B = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}}}$$

$$i = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tgh}}{\cos(Az - \alpha)} - \operatorname{arctg} \frac{y}{\sigma}$$

oppure

$$i = \arccos K \quad P = \frac{y}{\sigma} \quad Q = \frac{\sinh}{B}$$

$$\text{con B come sopra e } K = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + (P^2 - Q^2)(1 + P^2)}}{1 + P^2}$$

La declinazione gnomonica può essere anche determinata con (riportata da Jorge Ramalho, usata da Yvon Massè e tratta da *Gnomonica* n. 5/2000 p. 49):

$$\alpha = Az \pm \arccos \left( \frac{\sigma}{\cosh \sqrt{\sigma^2 + L^2}} \right)$$

Rispetto all'osservatore, se l'ombra cade a destra dell'ortostilo allora  $A-\alpha$  è positivo e quindi si deve prendere il segno negativo; viceversa se cade a sinistra.

## D. Valori da misurare

$\sigma = OG =$  lunghezza dell'asta (ortostilo)

$L = OP =$  lunghezza dell'ombra

$x =$  coordinata orizzontale del punto-ombra

$$x = \sigma \cdot \operatorname{tg}(Az - \alpha) \quad (\text{per verifica})$$

$y =$  coordinata verticale del punto-ombra

$$y = \sinh \sqrt{\sigma^2 + L^2} \quad (\text{per verifica})$$

oppure

$$y = \frac{-\sigma \cdot \operatorname{tgh}}{\cos(Az - \alpha)} \quad (\text{per verifica})$$

### **Legenda:**

TMF = Tempo Medio del Fuso

TML = Tempo Medio Locale

TVF = Tempo Vero del Fuso

TVL = Tempo Vero Locale

TZ = Time Zone = per l'Italia +1 (+2 quando è in vigore l'ora legale estiva o Daylight Saving Time). Numero intero positivo a EST di Greenwich e negativo a OVEST di Greenwich.

L = lunghezza dell'ombra

N = numero dei giorni dall'inizio dell'anno

M = numero del mese

D = numero del giorno

$\lambda =$  longitudine del luogo rispetto a Greenwich (positiva a EST)

$\varphi =$  latitudine del luogo

Eq = equazione del tempo in minuti (Eq/60 espressa in ore e Eq/4 espressa in gradi)

Az = azimut del Sole = è la distanza angolare della direzione Sole dalla linea meridiana, misurata sul piano orizzontale. Si misura, rispetto al SUD, con valori positivi verso OVEST e negativi verso EST [-90° a EST, 0° a SUD e +90° a OVEST].

$\omega$  = angolo orario = è la distanza angolare del Sole dal meridiano del luogo con senso negativo verso EST (ore antimeridiane) e positivo verso OVEST (ore pomeridiane).

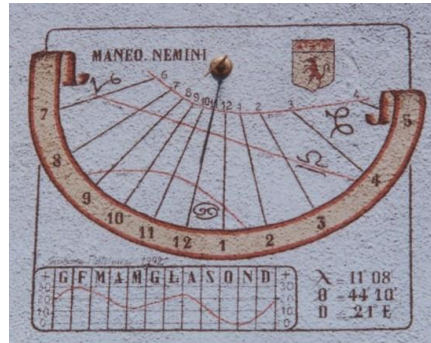
h = altezza del Sole = è la distanza angolare del Sole dal piano dell'orizzonte (positivo verso NORD).

$\delta$  = declinazione del Sole = è la distanza angolare del Sole dall'equatore celeste.

$\alpha$  = declinazione gnomonica del piano verticale

i = inclinazione gnomonica del piano verticale

$\gamma$  = altezza dello stilo  $\gamma=90^\circ-\varphi$   $\gamma=90^\circ-(\varphi-i)$



Esempio di orologio solare su parete verticale con gnomone polare ad ore francesi. La declinazione del piano è evidenziata dall'inclinazione della linea equinoziale che non risulta orizzontale. In questo caso essa "sale" da destra verso sinistra, pertanto la parete è declinata verso levante. L'opera si trova nella località di San Damiano nel comune di Camugnano (Bologna) ed è stata realizzata dal gnomonista bolognese Giovanni Paltrinieri nel 1992.

## Bibliografia

Fantoni, G., *Orologi solari*, Technimedia, Roma 1988

Ferrari, G., *Relazioni e formule per lo studio delle meridiane piane*, Modena 1998

Gnomonica Italiana - Coordinamento Gnomonico Italiano [www.gnomonicaitaliana.it](http://www.gnomonicaitaliana.it)

Mazzucato, M.T., *Elementi di Orientamento*, Maggioli Editore, Santarcangelo di Romagna RN 2007

Meeus, J., *Astronomical Algorithms*, Willmann-Bell, USA 1991

software Orologi Solari di G. Casalegno <http://digilander.libero.it/orologi.solari/download/download.html>