209. Se Giovenale… l'Analisi matematica scoperta da un antico illuminato

di Enrico Colognesi
www.enricocolognesi.com

Crescit amor nummi …

"*Crescit amor nummi quantum ipsa pecunia crescit*": così Giovenale, poeta latino, in un celebre verso delle Satire (XIV, 139), definisce l'ingordigia di chi è ricco e vorrebbe esserlo sempre di più.
Non è di Giovenale, tuttavia, né delle sue pur belle opere che desidero parlare: l'autore latino è qui solo uno strumento per un irreale ma affascinante volo della fantasia, un *somnium*, in cui si immagina il nostro poeta penetrare nel mondo dell'analisi matematica e in essa manifestare un genio insospettato.
Certamente né Giovenale né alcun suo contemporaneo avrebbe avuto alcuna possibilità di sviluppare le idee dell'analisi matematica moderna, tanto lontani erano la cultura e gli strumenti matematici del tempo. La mancanza di un efficace sistema numerico (il sistema posizionale non era ancora stato concepito, anzi neppure lo 0 era incluso tra i numeri) e delle moderne notazioni (così efficaci perché ideate, affinate e sedimentate in più di due millenni di pratica ed esperienze) relegano tale possibilità al mondo delle fantasie e delle finzioni letterarie.
Nondimeno, la valenza matematica del verso citato di Giovenale è tale che ho voluto assumerlo come spunto narrativo, immaginando che il nostro autore, le cui facoltà erano sicuramente potenti ed efficaci quanto quelle dei moderni, abbia tratto da esso le più estreme conseguenze logiche e, liberando la sua intuizione e le sue capacità razionali, sia giunto a formulare le idee che sono a fondamento della moderna analisi matematica.
Vogliamo allora immaginare che il nostro Giovenale scateni il proprio genio, concedendo al suo bagaglio soltanto qualche elementare – si fa per dire – strumento?
E sia: dopo avergli concesso l'uso delle cifre arabe, della notazione posizionale, delle quattro operazioni e dei simboli fondamentali dell'aritmetica, lasciamo a lui la parola.
Se solo Giovenale avesse osato …

Abi, nuntia …

"*Abi, nuntia [...] Romanis, caelestes ita velle ut mea Roma caput orbis terrarum sit*", "Va' e annuncia ai Romani che la volontà degli dèi celesti è che la mia Roma diventi la capitale del mondo", scrisse Livio, quand'ancor non ero nato. Ed il poeta Lucano, nella mia gioventù, gli fece eco: "*… ipsa, caput mundi, bellorum maxima merces, Roma capi facilis …*", "… la stessa Roma, capitale del mondo, la più importante preda di guerra, agevole a soggiogarsi …".
Corre l'anno ottocento e ottantuno dalla fondazione di Roma: la sua aquila vola da un tempo talmente lontano da sfumare, per ogni uomo, con le origini del mondo.
Da oltre un secolo, dal principato del divo Augusto, pace e prosperità regnano nell'Urbe e nelle province del nostro impero. Sotto Vespasiano, Tito, Domiziano, e massimamente sotto Traiano, Roma ha consolidato il suo dominio sull'orbe, e l'impero è grande e popolato come non mai.
Durante la mia lunga vita, innumerevoli opere hanno arricchito Roma e le provincie: l'arco di Tito e il Foro Traiano a Roma, l'acquedotto a Segovia, la splendida villa di Adriano a Tivoli; e che dire del Vallo, la ciclopica fortificazione che lo stesso Adriano ha edificato in Britannia?
Grandi uomini hanno nel contempo manifestato il proprio genio letterario e scientifico: le letture del 'De medicina' di Celso, del 'De re rustica' di Columella, della '*Historia naturalis*' di Plinio il Vecchio, delle '*Historie*' di Tacito, delle 'Vite parallele' di Plutarco hanno arricchito il mio spirito. E l'amico Marziale mi ha dedicato alcuni Epigrammi …
Anch'io, con le mie Satire, sto umilmente contribuendo. Da qualche tempo però …

Vita, si uti scias …

Sono conosciuto per le mie Satire, dicevo. Ho iniziato a comporle per indignazione verso la nostra società: l'aristocrazia, dedita a tutti i vizi, la plebe, tra *panem et circenses*, le donne che aspirano a ben altri ruoli che alla filatura della lana nella domus del marito o del padre. Che rimpianto per le antiche e un po' dimenticate città italiche come la mia Aquino …
Davvero non riuscivo più a tacere: "*Semper ego auditor tantum*?", "Dovrò sempre stare solo a sentire?" Incoraggiato anche dall'amicizia di Marziale, ho voluto denunciare questo mondo corrotto … e nacquero le Satire.
Pochi sanno però che nel mio animo, da qualche tempo, forse per reazione, prendono vita strane idee, assai diverse da quelle che mi ispirano nella composizione poetica.
Tutto ebbe inizio quando, nella XIV Satira, presi di mira la cattiva educazione che i figli ricevono dai genitori sotto forma di esempi negativi. Perché meravigliarsi se un figlio sperpera ciò che resta del patrimonio che il padre ha quasi dilapidato costruendo ville? La figlia di un'adultera impara l'arte nella stessa casa materna. La parsimonia non si insegna, i giovani non vi prestano orecchio, solo gli anziani possono acquisirla. I giovani, in compenso, impareranno perfettamente la disonestà, e il padre che l'ha inculcata si premunisca contro il veleno, perché potrebbe lui stesso farne presto le spese ...
"*Avarus animus nullo satiatur lucro*", "L'animo avido non si sazia con alcun guadagno", insegna Seneca. Ed io, di rimando, scrissi: "*Crescit amor nummi quantum ipsa pecunia crescit.*", "L'amore per il denaro cresce tanto quanto cresce il denaro stesso".
Ancor nessuno sa, tuttavia, che tale verso, una volta uscito dal mio calamo, acquistò per me un significato affatto nuovo. Accantonata ogni considerazione etica o di costume, nella mia mente prese vita all'improvviso un personaggio, assai avido di danaro, che, pur possedendo un cospicuo gruzzolo di nummi, si adoperava per accrescerlo con continuità: e, in queste fantasie, io non potevo evitare di interrogarmi sul modo in cui quel gruzzolo sarebbe cresciuto sotto l'impulso irrefrenabile della sua avidità.
"*Vita, si uti scias, longa est*", "La vita, se sai usarla, è lunga", insegna Seneca nel "De brevitate vitae". Eh, sì, potremmo fare tante cose nella nostra vita …
Di questi miei pensieri e fantasie, che tanto mi hanno impegnato, voglio raccontare …

Fugit irreparabile tempus …

Il gruzzolo del nostro avido personaggio cresce dunque in ragione del denaro posseduto. Possiede dieci nummi? Ne desidera ancora uno. Ne possiede cento? Uno solo in più non gli basta, il suo desiderio cresce, e ne vorrebbe altri dieci. Non è forse vero che "*fames crescit eundo*", "la fame cresce mangiando" ?
Come cresce dunque il suo gruzzolo?
"*Sed fugit interea fugit irreparabile tempus*", "Ma fugge intanto, fugge irreparabilmente il tempo", scrisse Virgilio nelle Georgiche. Il tempo - intuii -, il tempo è proprio la chiave per la comprensione e lo sviluppo dei miei pensieri … è nel tempo che il denaro cresce: l'incremento del gruzzolo dipende dal tempo trascorso.
Ho indicato perciò con la lettera t il tempo trascorso da un istante iniziale 0, con N_t i nummi posseduti al tempo t ed N_0 il loro ammontare nell'istante iniziale 0.
Ho riflettuto poi su come rappresentare l'aumento del danaro nell'unità di tempo, la ratio della sua crescita: se, nell'unità di tempo, ad esempio un mese o un anno, 100 nummi producono altri 10 nummi, il ritmo di crescita del gruzzolo è ben rappresentato da 10/100. Ho ritenuto perciò opportuno esprimere tale ratio con il rapporto tra l'incremento nell'unità di tempo e il valore iniziale. Ho poi indicato tale rapporto - che, coerentemente col mio verso, ho considerato costante nel tempo - con l'iniziale di ratio, la lettera r: nel mio esempio, r=0,1.
Fatto ciò, ho cercato di comprendere in che modo crescerà il denaro posseduto nel corso del tempo. Se il nostro personaggio all'inizio, ossia quando t=0, possiede N_0 nummi, ed è così abile da realizzare con continuità il tasso desiderato di crescita, quale sarà l'ammontare Nt della sua ricchezza dopo il tempo t ?

Per soddisfare alla mia curiosità, ho pensato di dividere l'intervallo di tempo da 0 a t in un certo numero n di piccoli intervalli, ciascuno quindi di durata h=t/n, e mi sono chiesto a quanto ammonta il danaro ai tempi h, 2h, 3h, e così via fino a nh=t. Dopo il primo intervallo, cioè al tempo h, l'ammontare di danaro sarà pari al numero iniziale N_0 di nummi, più l'incremento, pari a N_0 moltiplicato per il tasso di crescita r e il tempo trascorso, h. Perciò i nummi posseduti al tempo h saranno:

$$N_h=N_0+N_0\cdot r\cdot h = N_0(1+r\cdot h)$$

La cosa si ripete agli intervalli successivi:

$$N_{2h}=N_h+N_h\cdot r\cdot h = N_h(1+r\cdot h) = N_0(1+r\cdot h)^2$$
$$N_{3h}=N_{2h}+N_{2h}\cdot r\cdot h = N_{2h}(1+r\cdot h) = N_0(1+r\cdot h)^3$$

E così via fino a

$$N_{nh}=N_t=N_{(n-1)h}+N_{(n-1)h}\cdot r\cdot h = N_{(n-1)h}(1+r\cdot h) = N_0(1+r\cdot h)^n= N_0(1+r\cdot t/n)^n$$

Ho imparato così che l'ammontare finale Nt della ricchezza dipende dal suo ammontare iniziale N0, dal tasso di crescita r, dal tempo trascorso t, ma anche, inaspettatamente, dal numero n di piccoli intervalli di tempo in cui viene suddiviso il tempo t. Riflettei che la dipendenza da n è ragionevole: quanto più frequentemente si fa agire la ratio, ossia quanto più n è grande, tanto più la ricchezza cresce, in un certo tempo.
Senza limite? Non sarebbe ragionevole …
Al fine di indagare su questo aspetto, ho avuto l'intuizione di sostituire nel mio risultato $r\cdot t/n$ con $1/s$, cosicché $n=s\cdot r\cdot t$, ottenendo

$$N_t=N_0((1+1/s)^s)^{rt}$$

A questo punto, ho voluto introdurre un simbolo nuovo:

$$e_s=(1+1/s)^s$$

cosicché finalmente

$$N_t = N_0 e_s^{rt}$$

Un interessante risultato, certamente, ma rimaneva quell'ombra: la ricchezza ottenuta dipendeva da s … Era proprio inevitabile? Volevo eliminare la presenza di s nel risultato.
Il mio istinto mi spingeva così a proseguire, il mio intuito sentiva che oltre la siepe si doveva svelare un paesaggio inatteso. E così proseguii …

Nec plus ultra …

L'eroe Ercole, in una delle sue dodici fatiche, giunse ai limiti estremi del mondo, oltre i quali per tutti i mortali era vietato proseguire; separò il monte ivi presente in due parti, le due *Colonne d'Ercole*, e vi scolpì l'iscrizione *"nec plus ultra"*, "non più avanti".
Oltre le Colonne d'Ercole, Platone collocò Atlantide, mitica isola ricca di argento e di metalli, potenza navale che, novemila anni prima dell'epoca di Solone, avrebbe conquistato molte terre in Europa e in Africa; infine, dopo avere fallito l'invasione di Atene, sarebbe sprofondata in un giorno e una notte.

Il superamento delle Colonne d'Ercole, oltre il mondo conosciuto, rappresenta la speranza di terre migliori, più ricche. Le Colonne, però, non rappresentano solo un limite fisico, ma anche, simbolicamente, il limite della conoscenza, e superarle significa oltrepassare i limiti umani. Da parte mia, sentivo di essere giunto alle Colonne d'Ercole della conoscenza, oltrepassate le quali avrei scoperto sicuramente dei tesori.

Concentrai così l'attenzione sulla quantità $e_s=(1+1/s)^s$, dovevo saperne di più. Ricordai di aver introdotto s in modo che $n = s \cdot t \cdot r$, e che ero interessato al valore di e_s quando il tempo t è diviso in un numero n molto elevato di piccoli intervalli. Considerare n grande equivaleva a considerare s grande: cosa succede, mi chiedevo, quando s è davvero grande? Per saperlo, avrei dovuto calcolare e_s per valori di s sempre più grandi: s=10, 100, 1000, …. Ma … ecco affacciarsi un nuovo problema. Per valori piccoli di s il computo era, per le mie possibilità, fattibile. Calcolai subito

$$e_1=(1+1/1)^1=(2/1)^1=2/1=2$$
$$e_2=(1+1/2)^2=(3/2)^2=9/4=2{,}25000$$
$$e_3=(1+1/3)^3=(4/3)^3=64/27=2{,}37037$$
$$e_4=(1+1/4)^4=(5/4)^4=625/256=2{,}44140$$
$$e_5=(1+1/5)^5=(6/5)^5=7776/3125=2{,}47552$$

Feci un altro sforzo:

$$e_6=(1+1/6)^6=(7/6)^6=117649/46656=2{,}52162$$

Ma mi fermai qui. Accidenti, pensai, è davvero dura … anche perché siamo solo all'inizio. Il valore di es appariva crescere, ma quanto lentamente! Mi rendevo conto del fatto che, per risolvere i miei dubbi, avrei dovuto effettuare tale conteggio per valori davvero elevati di s, ma oltre un certo valore il calcolo era evidentemente impraticabile. Come avrei potuto calcolare, ad esempio $e_{100}=(1+1/100)^{100}$?
Avrei dovuto escogitare qualcosa di nuovo … ma per ora mi sentivo impotente. Convenni così di rinviare ad un momento successivo il problema di scoprire una tecnica per effettuare in modo rapido ed efficiente tale calcolo numerico, e di accontentarmi per ora di osservazioni intuitive e qualitative.
Osservai innanzitutto che, con ogni evidenza, il valore di es cresce sempre, al crescere di s, e non manifesta mai oscillazioni: la cosa è vera già per piccoli valori di s, ma è ragionevole che sia vera per tutti gli s. In secondo luogo considerai che doveva esistere un tetto a tale crescita: non sarebbe stato infatti ragionevole che l'ammontare della ricchezza potesse crescere a piacere solo facendo crescere n, la frequenza di azione della ratio. Mi apparve allora evidente che, come logica conseguenza delle osservazioni precedenti, quanto più s è grande, tanto più la quantità es si deve avvicinare ad un numero ben preciso.
Sentii di essere giunto ad un passo da una grande scoperta … mancava però l'ultimo passo, dovevo superare le Colonne d'Ercole. Per quanto grande scegliessi il mio s, se, con ogni evidenza, mi stavo avvicinando ad un numero ben preciso, era altrettanto evidente che non lo avrei mai raggiunto, che per ogni valore di s avrei avuto un valore di es diverso. Come uscirne?

Infinitus est numerus…

"*Infinitus est numerus stultorum*", "Il numero degli stolti è infinito", afferma l'Antico Testamento, nell'Ecclesiaste. Nella speranza di non accrescere tale infinità, ho cercato di affrontare l'idea di infinito, liberando il mio pensiero dalle catene … Sì, i miei pensieri, che vado a svelare, hanno volato sul filo dell'infinito, idea onnipresente che, lo sento, nessuno ha finora compreso a fondo … neppure il sommo Aristotele.
La soluzione mi apparve ora a portata di mano: dovevo oltrepassare le Colonne, che mai come in questo caso erano costituite dall'infinito. Dovevo imparare a ragionare con 'numeri' maggiori di ogni numero noto.
Come fare?
Compresi che, se ad ogni passo il mio es si avvicina sempre più ad un numero ben preciso, all'infinito esso avrebbe effettivamente raggiunto tale numero. Per realizzare ciò, non sarebbe bastato che s crescesse oltre ogni limite: avrebbe dovuto diventare infinito, ossia, rinnegando Aristotele, passare da un infinito in potenza all'infinito in atto. Solo in tal caso anche es avrebbe raggiunto, non solo in potenza, ma anche in atto, il suo valore finale, il *limes*.

Usando un linguaggio nuovo, conclusi perciò affermando che il limite di es quando s tende all'infinito è un nuovo numero, che indicai con 'e', senza la s. Mi divertii poi ad introdurre dei nuovi simboli. Mi piacque rappresentare col simbolo ∞, che rappresenta un percorso senza fine, il misterioso, sfuggente, ma ora fruttuoso, infinito. Scrissi perciò il mio risultato in questo modo:

$$\lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{1}{s}\right)^s = e$$

Ecco che, nell'espressione del nostro gruzzolo, la s scompare, e finalmente:

$$\boxed{\mathbf{N_t=N_0e^{rt}}}$$

E il passaggio dall'infinito in potenza a quello in atto significò per me oltrepassare le Colonne d'Ercole della conoscenza.
Il risultato raggiunto fu per me un punto di arrivo, ma anche uno di partenza.
Fino a questo punto avevo proceduto sul piano dei puri e semplici ragionamenti. Non potevo dimenticare, tuttavia, le difficoltà in cui mi ero imbattuto nello sviluppare i calcoli numerici dei valori di e_s^{rt}: erano davvero troppo complessi, e mi sarebbe piaciuto scoprire un modo semplificato per portarli a compimento.
Tornai al mio risultato iniziale, $N_t = N_0\left(1+\frac{rt}{n}\right)^n$, con la ferma intenzione di scoprire come calcolare in modo semplice la quantità $\left(1+\frac{rt}{n}\right)^n$. Iniziai così a sviluppare le moltiplicazioni:

$$\left(1+\frac{rt}{n}\right)^2 = \left(1+\frac{rt}{n}\right)\left(1+\frac{rt}{n}\right) = 1+2\left(\frac{rt}{n}\right)+\left(\frac{rt}{n}\right)^2$$

$$\left(1+\frac{rt}{n}\right)^3 = \left(1+2\left(\frac{rt}{n}\right)+\left(\frac{rt}{n}\right)^2\right)\left(1+\frac{rt}{n}\right) = 1+3\left(\frac{rt}{n}\right)+3\left(\frac{rt}{n}\right)^2+\left(\frac{rt}{n}\right)^3$$

$$\left(1+\frac{rt}{n}\right)^4 = \left(1+3\left(\frac{rt}{n}\right)+3\left(\frac{rt}{n}\right)^2+\left(\frac{rt}{n}\right)^3\right)\left(1+\frac{rt}{n}\right) = 1+4\left(\frac{rt}{n}\right)+6\left(\frac{rt}{n}\right)^2+4\left(\frac{rt}{n}\right)^3+\left(\frac{rt}{n}\right)^4$$

$$\left(1+\frac{rt}{n}\right)^5 = \left(1+4\left(\frac{rt}{n}\right)+6\left(\frac{rt}{n}\right)^2+4\left(\frac{rt}{n}\right)^3+\left(\frac{rt}{n}\right)^4\right)\left(1+\frac{rt1}{n}\right) = 1+5\left(\frac{rt}{n}\right)+10\left(\frac{rt}{n}\right)^2+10\left(\frac{rt}{n}\right)^3+5\left(\frac{rt}{n}\right)^4+\left(\frac{rt}{n}\right)^5$$

Osservai ora che avrei potuto riscrivere l'ultima espressione in questo modo:

$$\left(1+\frac{rt}{n}\right)^5 = 1+\frac{5}{1\cdot n}(rt)+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot n^2}(rt)^2+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^3}(rt)^3+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot n^4}(rt)^4+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot n^5}(rt)^5$$

Ed estrapolando in generale:

$$\left(1+\frac{rt}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}(rt)+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}(rt)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}(rt)^3+\cdots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}\cdot\frac{1}{n^{n-1}}(rt)^{n-1}+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n}(rt)^n$$

Riscrissi poi il tutto in questo modo:

$$\left(1+\frac{rt}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1}\cdot\frac{n}{n}(rt)+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2}(rt)^2+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}(rt)^3+\cdots$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)}\cdot\frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot 2}{n^{n-1}}(rt)^{n-1}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n}\cdot\frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1}{n^{n}}(rt)^{n}$$

Ebbi ora un'idea: pensai che, se n è molto grande, tutti questi termini

$$\frac{n}{n},\quad \frac{n(n-1)}{n^2},\quad \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3},\quad \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot 2}{n^{n-1}},\quad \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1}{n^{n}}$$

sarebbero stati molto prossimi ad 1, e perciò avrei approssimato così:

$$\left(1+\frac{rt}{n}\right)^n \simeq 1+\frac{rt}{1}+\frac{(rt)^2}{1\cdot 2}+\frac{(rt)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{(rt)^{n-1}}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)}+\frac{(rt)^{n}}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n}$$

Questa espressione, mi sembrò a prima vista, sarebbe stata molto più agevole da calcolare ! In fin dei conti, anziché n moltiplicazioni, avrei potuto fare n somme …
Illusione ! Mi accorsi presto, infatti, che ero ancora lontano dei miei obiettivi: ogni addendo, infatti, era assai complesso da calcolare. E comunque restava il problema del numero eccessivo di operazioni da svolgere: come avrei fatto a calcolare i primi 1000 addendi?
Superato l'iniziale scoraggiamento, feci l'osservazione decisiva. Sapendo che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{rt}{n}\right)^n = e^{rt}$$

Avrei potuto scrivere che

$$\boxed{\mathbf{e^{rt} = 1+\frac{rt}{1}+\frac{(rt)^2}{1\cdot 2}+\frac{(rt)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{(rt)^{n-1}}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)}+\frac{(rt)^{n}}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n}+\cdots}}$$

In particolare, se rt=1:

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n}+\cdots$$

E questo mi sembrò davvero interessante! Avrei potuto finalmente calcolare il valore di e con una precisione maggiore. Fu così che, dopo alcuni giorni di sofferti calcoli, ottenni:

$$\boxed{\mathbf{e=2{,}716923\ \ldots}}$$

Ed avrei potuto conoscere il valore della ricchezza dopo il tempo t sommando infiniti addendi … ancora l'infinito …

Functus est …

"*Functus est munere suo*", si dice di chi ha adempiuto ai propri doveri o ha avuto la ricompensa che gli spetta. Io, la ricompensa ai miei sforzi sentivo di averla ricevuta. Ma non mi sentivo arrivato, intuivo ancora davanti a me un lungo percorso.
Andavo riflettendo che, grazie alla mia scoperta, avrei potuto sapere, per qualsiasi istante futuro, a quanti nummi sarebbe ammontato il gruzzolo del nostro avido personaggio. Un mese? Un anno? Tre anni? Per quanto lontano possa essere il momento, e per quanto complessi possano essere i calcoli, avrei potuto calcolare l'ammontare della ricchezza in un qualsiasi tempo futuro.

Compresi perciò che lo strumento creato non ci porge *un* numero, ma quanti numeri vogliamo: per ogni istante futuro t esso ci offre il numero N_t che rappresenta l'ammontare della ricchezza al tempo t.
Vogliamo esprimere l'idea che il numero Nt dipende dal tempo t ? Facciamolo. Mi risultò naturale dire che Nt varia in dipendenza, in 'funzione' del variare del tempo: Perché allora non chiamare 'funzione' la nuova entità scoperta, per sottolineare che non si tratta di un numero, ma di un legame tra due insiemi di numeri, quello degli istanti di tempo e quello dei valori della ricchezza in nummi?
Volli a questo punto dare un nome alla nuova nata. La mia prima funzione avrebbe avuto un nome paradigmatico, e pensai a 'esponenziale'. Perché ? Esporre significa presentare, raccontare, ma anche mostrare, far sapere, e non ho trovato nome migliore.
Allo stesso modo volevo dare un nome alle proprietà della mia funzione. La più evidente è il fatto che, al passare del tempo t, la ricchezza N_t cresce sempre. Come definire questo fatto? Ritenni opportuno usare l'aggettivo monotona, nel senso greco di ciò che tende ad un'unica direzione (da *mònos* e *tònos*); e, per non confondere tale termine con quello del linguaggio ordinario, monòtona, pensai di dire 'monotòna'.
Eh, sì, "*Functus sum munere meo*": ho avuto la mia ricompensa, ho scoperto la mia prima 'funzione'. Ma quante altre funzioni, simili o – perché no? – assai diverse da quella da me scoperta, potranno esistere? Forse, anzi senza dubbio, infinite …
… ancora l'infinito …
Non so … potrei pensare ad una funzione che resta costante nel tempo, oppure ad una il cui valore è sempre uguale al tempo trascorso, o un'altra che sia tre volte il tempo trascorso, o un'altra ancora che sia pari al tempo trascorso per se stesso …
L'idea a cui ero pervenuto era indubbiamente assai universale, cosicché, come avevo indicato con N_t il numero di nummi nel tempo, pensai di indicare con f_t la generica, non precisata, funzione dipendente dal tempo.
E sentivo che la strada era ancora lunga …

Ultima ratio …

Proseguendo nel mio flusso di idee, giunsi a maturare una ulteriore scoperta, che potrei chiamare, non "*ultima ratio*", ma "ratio ultima" …
La mia, anzi la nostra, 'funzione esponenziale' è sempre crescente: monotòna, ho voluto definirla. Cresce sempre, ma quanto cresce ? E' possibile valutare quantitativamente la sua crescita ? Attenzione: non cercavo più di conoscerne il valore, che già sapevo calcolare, ma l'intensità della sua crescita. Questo il mio successivo interesse, e la risposta a prima vista apparve ovvia: r, la ratio della sua crescita, era il candidato naturale a rappresentare la 'rapidità' con cui la funzione aumenta nel tempo.
Tutto vero, ma c'era qualcosa di inadeguato in tale affermazione. Mi apparve chiaro infatti che, mentre la ratio della crescita è costante, la rapidità con cui la funzione cresce non è costante, anzi essa cresce in misura sempre maggiore al passare del tempo. Del resto ciò è coerente con l'idea espressa dal mio verso: quanto maggiore è la ricchezza, tanto maggiore è la sua crescita.
Come fare allora a descrivere la vera intensità di crescita della funzione ?

Sono un aquinate, lo sapete: la mia terra d'origine non è certo terra di montagna, ma neppure di pianura. Per questo comprendo bene cosa si intenda per pendenza di una strada: se, percorrendo una via, spostandomi orizzontalmente di 100 cubiti, mi fossi elevato di 5 cubiti, a ragione avrei potuto affermare che la pendenza della strada è data dal dislivello, 5, diviso per lo spostamento, 100. E, in tal caso, avrei detto che la pendenza è 0,05.
L'idea della pendenza di una strada mi condusse così sulla retta via …
Immaginiamo di trovarci al tempo t - pensai -, e di spostarci in avanti nel tempo di un piccolo intervallo di tempo h. Passando dall'istante t all'istante $t+h$, la funzione passa dal valore N_0e^{rt} a $N_0e^{r(t+h)}$. Il dislivello superato nell'intervallo $\Delta t=h$, tra gli istanti t e $t+h$, è allora

$$\Delta N = N_0e^{r(t+h)} - N_0e^{rt} = N_0e^{rt}(e^{rh}-1) = N_t(e^{rh}-1)$$

Assecondando l'idea intuitiva di pendenza, ne ho dedotto che questa deve valere

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N_t(e^{rh} - 1)}{h}$$

Chiamai tale espressione "*ratio incrementorum*".
A questo punto, tuttavia, si presentò il primo ostacolo: la pendenza nell'istante t, lo dice l'intuizione, è un valore ben preciso, mentre il valore da me trovato dipendeva dall'ampiezza del piccolo intervallo di tempo h. Come uscire da questa aporia?
Rammentai, a questo punto, che già una volta avevo risolto i miei dubbi superando le Colonne d'Ercole del mio sapere, e che avrei potuto ripetere quella esperienza: ormai non temevo più di raggiungere il limite. L'intuizione insegna infatti che, assumendo l'ampiezza dell'intervallo temporale h sempre più piccola, il valore della "*ratio incrementorum*" deve avvicinarsi sempre più alla pendenza esatta nell'istante t. Avrei dovuto ancora una volta passare al limite. Compresi subito, inoltre, che questo caso differisce dal precedente, non trattandosi più di un limite all'infinito, ma a zero.
Zero ed infinito, qual è il ponte che li collega? Sono davvero due idee diverse o sono forse due facce della stessa idea ?
Era dunque chiaro che la pendenza cercata doveva necessariamente valere

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} N_t \frac{(e^{rh} - 1)}{h}$$

Preparai così il mio spirito ad affrontare questa nuova fatica, calcolare il valore di tale limite. Il primo passo fu facile, e fu l'osservazione ovvia che Nt non dipende da h, per cui

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = N_t \lim_{h \to 0} \frac{(e^{rh} - 1)}{h}$$

Introdussi poi una utile modifica:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = N_t \lim_{h \to 0} \frac{(e^{rh} - 1)}{h} = rN_t \lim_{h \to 0} \frac{(e^{rh} - 1)}{rh} = rN_t \lim_{x \to 0} \frac{(e^{x} - 1)}{x}$$

… e mi accinsi a studiare l'ultimo limite.

L'impresa non doveva essere semplice, in quanto si manifestò immediatamente una nuova evidente difficoltà: sia e^x-1 che x si avvicinano allo 0 quando h tende a zero. La nostra "*ratio incrementorum*" è, in un certo senso, una "*ratio evanescentium*": un rapporto di due numeri entrambi tendenti a zero. La divisione 0/0, si sa, non ha alcun significato; tuttavia, per ogni valore di x, per quanto piccolo, il rapporto ha un significato ed un valore ben definiti. Fu naturale perciò chiedermi se, quando x tende a 0, tale rapporto si avvicina indefinitamente ad un valore preciso, come mi garantisce l'intuizione. Esiste dunque davvero una "*ratio ultima evanescentium*" ? Come fare a scoprirla, se esiste ?
Non disponevo di strumenti efficaci per un suo studio razionale, cosicché, come già feci per il numero 'e', costruii una piccola tavola, una tabella di valori, con x che si avvicina sempre più a 0. Fu uno sforzo di calcolo enorme per le mie possibilità, ma alla fine pervenni a questi risultati:

x	e^x-1	(e^x-1)/x
1	1,71828	1,71828
0,1	0,10517	1,05171
0,01	0,01005	1,00502
0,001	0,00100	1,00050
…	…	…

Benché non avessi potuto seguire la via della razionalità, la certezza era raggiunta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)}{x}=1$$

Così non c'era più alcun dubbio che:

$$\boxed{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta N}{\Delta t}=rN_t=rN_0e^{rt}}$$

Eccolo il valore esatto cercato!
Compresi inoltre un altro fatto importante: la pendenza è ancora una funzione ! Ma certo, era ovvio ! La pendenza è una funzione che deriva dalla funzione originaria. Volli chiamarla funzione derivata, o solo derivata. Perché questo nome? Nella nostra lingua "derivare" (da "*rivus*", ruscello) significa "condurre le acque fuori da", e quindi anche "avere origine", "trarre", "dedurre". Ed era effettivamente questo il significato che volevo esprimere.
Mi scosse poi il constatare che i metodi usati per la funzione esponenziale, e le idee sviluppate, debbono essere validi, se non per tutte, per moltissime funzioni. Introdussi così il simbolismo:

$$\boxed{f'_t=\frac{df}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t}}$$

Pensai infatti che i simboli dt e df indicassero adeguatamente gli incrementi infinitesimi del tempo e della funzione f_t.
Nel caso specifico dell'esponenziale, constatai inoltre un fatto davvero degno di interesse: la derivata, a parte il fattore r, coincide con la funzione stessa! Non può essere certo così per tutte le funzioni: una grandezza costante ha pendenza ovunque zero, ed una grandezza che cresce uniformemente nel tempo ha pendenza ovunque costante: questi esempi, credo, possono bastare a convincerci che il caso dell'esponenziale è eccezionale …

Parva saepe …

"*Parva saepe scintilla magnum excitat incendium*", "Spesso una piccola scintilla innesca un grande incendio", insegna Quinto Curzio Rufo …
Il mio spunto iniziale fu certo una piccola scintilla, e l'incendio innescato sembrava inarrestabile. Fu così che, avido di sapere quanto il mio personaggio lo era di danaro, affrontai quello che, con ogni evidenza, è il problema inverso del precedente.
Se conosciamo il valore iniziale di una funzione e poi, istante per istante, la sua pendenza, siamo in grado di conoscere il valore della funzione in tutti gli istanti successivi ? Intuitivamente sembrava di sì … ma come calcolarlo?
Ancora una volta mi venne in soccorso quella *parva scintilla* che è l'intervallo evanescente $\Delta t=h$.

Vediamo se l'idea funziona con la nostra funzione esponenziale - pensai - la cui derivata è $N'_h = rN_0e^{rt}$. Immaginiamo ancora una volta di dividere l'intervallo di tempo da 0 a t in n piccoli intervalli di durata h=t/n. Partiamo dall'istante iniziale t=0, in cui la funzione vale N_0, e la sua pendenza è rN_0. Se h è sufficientemente piccolo, alla fine di un intervallo ampio h, la funzione vale approssimativamente

$$N_h \cong N_0 + hrN_0$$

Ripetendo le stesse considerazioni per il successivo intervallo ampio h, in cui la pendenza è rN_0e^{rh}, avremo:

$$N_{2h} \cong N_h + hrN_0e^{rh} = N_0 + hrN_0 + hrN_0e^{rh}$$

Dopo il terzo intervallo ampio h, in cui la pendenza è rN_0e^{rh}, avremo

$$N_{3h} \cong N_{2h} + hrN_0e^{2rh} = N_0 + hrN_0 + hrN_0e^{rh} + hrN_0e^{2rh}$$

Ormai avevo compreso il gioco. Dopo n intervalli di durata h, ossia dopo il tempo t, la funzione si approssima con:

$$N_t \cong N_{nh} = N_0 + hrN_0 + hrN_0e^{rh} + hrN_0e^{2rh} + \ldots + hrN_0e^{(n-1)rh}$$

Sinteticamente, scrissi la cosa con un nuovo simbolo, in cui la lettera greca sigma indica che si effettua una somma di tanti termini, in cui 'i' assume tutti i valori da 1 a n:

$$N_t = N_0e^{rt} \cong N_0 + \sum_{i=1}^{n} hrN_0e^{(i-1)rh}$$

Osservai, a questo punto, che, mentre la funzione di sinistra ha un valore preciso per ogni t, quella di destra, ancora una volta, dipende da n. Forte delle mie esperienze precedenti, considerai che si tratta di un'espressione approssimata e che, al crescere di n, l'approssimazione sarebbe stata sempre più precisa. Ripensai allora alle Colonne d'Ercole; al limite - sì, ancora una volta, al limite - le due espressioni dovevano coincidere:

$$N_t = N_0e^{rt} = N_0 + \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} hrN_0e^{(i-1)rh}$$

Cosa sto fantasticando, mi chiesi ? Doveva essere tutto un assurdo … Mi accorsi infatti che ciascuno dei termini di tale somma rappresenta l'area di un piccolo rettangolo di base h ed altezza $rN_0e^{(i-1)rh}$, pari al valore della derivata all'istante (i-1)h; e che, crescendo n e quindi diminuendo h, stavo sommando un numero sempre maggiore di termini, ciascuno dei quali sempre più piccolo. E, se fossi passato al limite, avrei sommato infiniti termini ciascuno dei quali infinitamente piccolo ! Tutto ciò sembrava irragionevole: eppure - consideravo - al crescere di n la somma delle piccole aree approssima sempre più l'area sottesa dalla funzione derivata, cosicché la 'somma di infiniti termini infinitesimi' *doveva* necessariamente essere un valore finito e fornire il valore della mia funzione !
Potenza dell'infinitamente grande e dell'infinitamente piccolo !
Inventai poi altri simboli; indicai ancora con dh l'intervallo di tempo di durata infinitesima, e pensai di esprimere il limite della somma sostituendo la lettera greca sigma con un'ampia S, iniziale di summa, e scrissi:

$$N_t = N_0 e^{rt} = N_0 + \int_{h=0}^{t} rN_0 e^{rh} dh = N_0 + \int_{h=0}^{t} N'_h dh$$

Da cui anche:

$$N_t - N_0 = \int_{h=0}^{t} N'_h dh$$

Quanto scoperto mi apparve straordinario, stentavo a crederci: a destra del segno di uguaglianza vedevo un'espressione, quella 'somma di infiniti infinitesimi', il cui significato profondo stavo cercando di comprendere, che, applicata alla funzione derivata nell'intervallo di tempo da 0 a t, coincide con l'incremento della funzione nello stesso intervallo di tempo.
E quella 'somma di infiniti infinitesimi' è l'area sottesa dalla funzione derivata …
A quel punto, sull'onda dell'entusiasmo, assegnai dei nomi. L'operazione scoperta era evidentemente l'operazione inversa della derivata: il mio primo istinto fu perciò quello di chiamarla antiderivata. Cambiai presto idea, tuttavia. Volli ricorrere all'aggettivo *integralis*: pensai infatti che il sostantivo integratio, nel senso di 'accrescimento', rappresentasse più profondamente il procedimento da me scoperto: in fin dei conti quello che stavo per chiamare integrale è proprio l'area totale racchiusa da una funzione, ottenuta per accrescimento progressivo.
Il nuovo nome e la nuova scrittura mi piacevano ! Ma il fatto davvero straordinario era questo: ero giunto alla mia conclusione ragionando sulla funzione esponenziale, ma il metodo era generale, e quanto avevo scoperto era senza dubbio vero per ogni funzione:

$$\boxed{\mathbf{f_t - f_0 = \int_{h=0}^{t} f'_h dh}}$$

Così, ancor più dei nomi, mi entusiasmò l'idea: integrando la derivata di una funzione si ottiene la funzione stessa.
"*Parva saepe scintilla magnum excitat incendium*" …

E somnio excitatus …

Come ogni *somnium*, anche questo ha termine …
La storia non è andata proprio così, lo sappiamo: l'analisi matematica fu introdotta nel Seicento da Leibnitz, Newton e dai Bernoulli come strumento di studio delle grandezze continue.
Anche per il suo linguaggio andò ben diversamente. Di *"ratio ultima evanescentium"* fu Newton a parlare, e così il termine *"calculus integralis"* fu introdotto nel 1690 da Jakob Bernoulli, e solo nel 1754 con Jacopo Riccati divenne il sostantivo *"integrale"*: nel latino classico, del resto, l'aggettivo *integralis* neppure esisteva, essendo stato introdotto solo nel VI secolo.
L'analisi matematica, tuttavia, deve molto agli antichi. I Greci Eudosso ed Archimede crearono e svilupparono a fondo il metodo di esaustione, che consiste essenzialmente nella suddivisione di una figura in un numero elevatissimo di parti e nel principio che, aumentando progressivamente tale numero, si giunge ad esaurire la figura considerata. A completare il grande merito degli antichi, va ricordato che le loro dimostrazioni erano logicamente rigorose, a differenza di quelle di Newton e Leibniz, che necessitarono di altri due secoli di studio per essere formulate con rigore sufficiente.
L'analisi deve agli antichi anche gran parte del suo linguaggio. Deve innanzitutto il suo nome al greco ἀνάλυσις, che indica in generale un processo di decomposizione (scioglimento) di un argomento in parti elementari, più semplici. Ed anche se l'introduzione del linguaggio fu moderna, dobbiamo tuttavia essere grati agli antichi per averci fatto il dono più prezioso: la lingua.

Quindi, ringraziando Giovenale di averci offerto lo spunto per un volo sulle idee dell'analisi, intendiamo ringraziare simbolicamente tutta l'antichità.

Orandum est …

Il nostro Giovenale, nella satira decima, si propone di mostrare la vanità di quei valori, la ricchezza, la fama, l'onore, che gli uomini cercano con ogni mezzo di ottenere. Solo il vero sapiente comprende che tutto ciò è effimero e, talvolta, anche dannoso.
Nell'intenzione del poeta, l'uomo non dovrebbe aspirare che a due beni soltanto, la salvezza dell'anima e la salute del corpo: *"Orandum est ut sit mens sana in corpore sano"*, "Dobbiamo pregare gli dei che in un corpo sano anche la mente sia sana" (Satire, X, 356).
E l'analisi matematica, assai più di ogni ricchezza, è senz'altro uno degli strumenti più efficaci per esercitare il nostro spirito.