213. Le spirali di Archimede in 2D e 3D

Rosa Marincola
rosamarincola@virgilio.it

Sunto

Questo lavoro è stato realizzato in un laboratorio del Piano Lauree con una classe del II biennio superiore Sistemi Informativi Aziendali dell'IIS "A. Guarasci" di Rogliano (Cs) sez. Tecnico Economico e riguarda un percorso interdisciplinare di matematica e informatica sulla vita e l'opera di Archimede. L'obiettivo è stato quello di ampliare le conoscenze e le competenze del corso di studi tecnico economico dove, in base alle indicazioni ministeriali, non è prevista la trattazione di elementi di goniometria e lo spazio riservato alla geometria e alla storia della matematica è molto ridotto.

Introduzione

Il lavoro ha coinvolto in modalità collaborativa e integrata due discipline: informatica e matematica, non solo per quanto riguarda la produzione di file multimediali, ma principalmente per la trattazione dei contenuti e l'ambiente di sviluppo: GeoGebra e il mondo virtuale 3D EdMondo in cui la classe sta effettuando una sperimentazione in collaborazione con l'INDIRE: http://www.scuola-digitale.it/ed-mondo/progetto/sperimentazioni-in-corso/.
Sono state utilizzate numerose risorse in rete per studiare i tre problemi classici dell'antica Grecia: la rettificazione della circonferenza, la trisezione dell'angolo e la duplicazione del cubo. Dopo aver studiato la vita e le opere di Archimede, ci si è concentrati sullo studio della spirale, dal trattato "Sulle spirali". Alcune fonti sono state riportate nelle varie fasi di lavoro.
Gli studenti oltre a realizzare delle costruzioni col software di geometria dinamica hanno realizzato lo script con cui plottare nel mondo virtuale 3D la spirale di Archimede e altre curve utilizzando la loro equazione in forma parametrica, molto più semplice da trattare rispetto all'equazione cartesiana. Nello stesso script hanno inserito le istruzioni dell'algoritmo archimedeo per calcolare la lunghezza di un arco di spirale in LSL (Linden Scripting Language), un linguaggio di programmazione orientato agli oggetti, simile a C, C#, Java, con cui sono prodotte animazioni nei mondi virtuali.
Con lo stesso metodo, dopo aver cercato le equazioni parametriche di altre curve celebri,le hanno plottate sulla nostra land Scriptlandia, in ricordo del fatto che secondo alcune fonti, Archimede disegnasse figure e curve ovunque, anche sul proprio corpo.
In 3D è stata costruita anche la celebre figura grazie alla quale fu rinvenuta la tomba di Archimede: una sfera inscritta in un cilindro.

Obiettivi di apprendimento

- Far acquisire agli studenti conoscenze di storia della matematica, in particolare, sui tre problemi classici dell'antica Grecia e sulla storia e le opere di Archimede di Siracusa.
- Acquisire elementi di goniometria di solito non trattati nei corsi ad indirizzo economico (rappresentazioni di angoli in gradi e in radianti, funzioni goniometriche e loro variazione).
- Utilizzare le conoscenze goniometriche per manipolare equazioni di funzioni e di curve algebriche per passare dall'equazione espressa in forma cartesiana a quella polare e, a quella parametrica.
- Realizzare delle costruzioni di luoghi geometrici (spirali) ed esplorarne le proprietà con software di geometria dinamica (geogebra).
- Codificare correttamente gli algoritmi per plottare le curve algebriche in 3D in linguaggio LSL, per modificarne i parametri e in particolare per calcolare la lunghezza di un arco di spirale.
- Manipolare codici in LSL per ottenere effetti speciali in 3D applicati ai grafici (particles) ottenuti anche questi modificando i colori RGB, la velocità di emissione, l'ampiezza dell'angolo di emissione, il raggio e altri enti geometrici.
- Ricercare fonti significative di vario tipo (siti, video, materiali testuali) per l'acquisizione di contenuti matematici, storici e informatici.

Spazi e tempi

Sono stati utilizzati diversi ambienti: aula scolastica, sala LIM, laboratorio d'informatica e varie risorse, essenzialmente online e gratuite (software, siti, materiali e il mondo virtuale 3D Edmondo).
L'attività è stata realizzata in 3 ore di attività curricolari e circa 6 extracurricolari, in parte in presenza e in parte a distanza.

Metodologie

- Learning by doing
- Learning by thing
- Lavori di gruppo
- Discussione guidata
- Brevi lezioni frontali

Fasi di lavoro

Fase 1

Abbiamo avviato lo studio della vita e delle opere di Archimede attraverso ricerche in rete, in particolare abbiamo seguito con interesse il video YouTube del filosofo della scienza Giulio Giorello: *Giulio Giorello: Archimede, il primo genio universale* https://www.youtube.com/watch?v=8ZJOzMem3DA

Per lasciare traccia in EdMondo del nostro lavoro, abbiamo «rezzato» cioè costruito la figura raffigurata sulla tomba Archimede: una sfera inscritta in un cilindro e poi, dopo varie discussioni, abbiamo deciso di concentrarci sullo studio della sua spirale, così importante per la soluzione di due problemi classici dell'antichità e la presenza di tale curva insieme ad altre spirali, in tanti fenomeni naturali.

Figura 1 La sfera inscritta in un cilindro e una spirale archimedea in EdMondo

«Sulle spirali»

Ricordiamo brevemente che "Sulle spirali" è un trattato di Archimede contenente 28 proposizioni, 7 problemi e 21 teoremi. In esso viene descritto come generare la curva spirale con un metodo cinematico: essa viene definita come il luogo piano di un punto che, partendo dall'estremo di un raggio o semiretta, si sposta uniformemente lungo questo raggio mentre il raggio a sua volta ruota uniformemente intorno al suo estremo.

L' equazione polare (r, θ) della spirale archimedea è :

$$r = a + b\vartheta$$

con a e b numeri reali, $b>0$.
La rappresentazione parametrica della spirale archimedea, al variare del parametro in , è data da:

$$\begin{cases} x(\theta) = (a + b\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) = (a + b\theta)\sin(\theta) \end{cases}$$

con a e b reali e b>0.

Fase 2

Archimede, come i suoi predecessori, affrontò lo studio dei tre famosi problemi classici della geometria:

1. la quadratura del cerchio (http://it.wikipedia.org/wiki/Quadratura_del_cerchio);
2. il problema della trisezione dell'angolo (http://it.wikipedia.org/wiki/Trisezione_dell%27angolo) ;
3. la duplicazione del cubo con riga e compasso (http://it.wikipedia.org/wiki/Duplicazione_del_cubo).

La spirale fornì la soluzione a due di questi problemi: la quadratura del cerchio e la trisezione dell'angolo.
La cissoide di Diocle fornì invece la soluzione al problema della duplicazione del cubo.

1) **La quadratura del cerchio:** *costruire un quadrato che abbia la stessa area di un dato cerchio*

Nella proposizione 18 Archimede scrive in termini moderni: supponiamo la retta ruotante OA abbia compiuto un giro completo e si prenda la tangente alla spirale in questo punto; dal centro di rotazione si tracci la perpendicolare alla retta: il segmento di perpendicolare compreso fra il centro di rotazione e il punto di intersezione fra la perpendicolare e la tangente, è uguale alla circonferenza del "primo cerchio", ovvero il cerchio che ha come raggio il segmento compreso fra il centro di rotazione e il punto di tangenza. Archimede dunque riduce il problema della rettificazione del cerchio a quello di tracciare la tangente alla spirale.

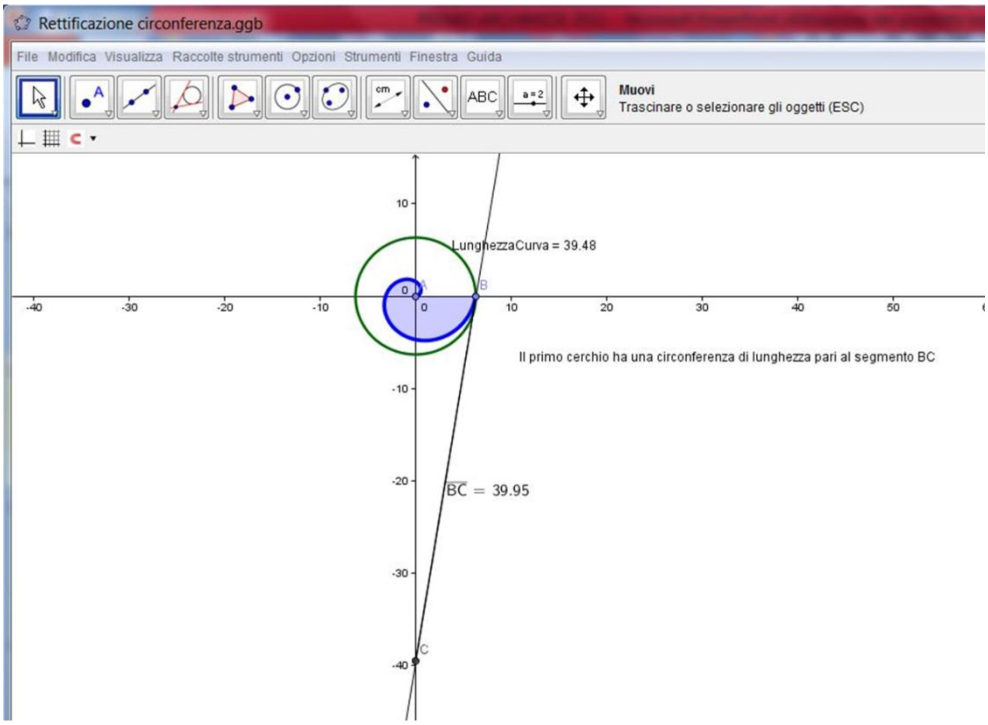

Figura 2: La rettificazione della circonferenza con GeoGebra

2) La trisezione dell'angolo: *costruire un angolo di ampiezza un terzo di un altro angolo qualsiasi dato.*

Il problema e la relativa soluzione sono stati analizzati mediante l'ottima applet presente sul seguente sito di cui si riporta un'immagine:

http://www.gobnf.com/formule/default.aspx?code=0010564LKBP1

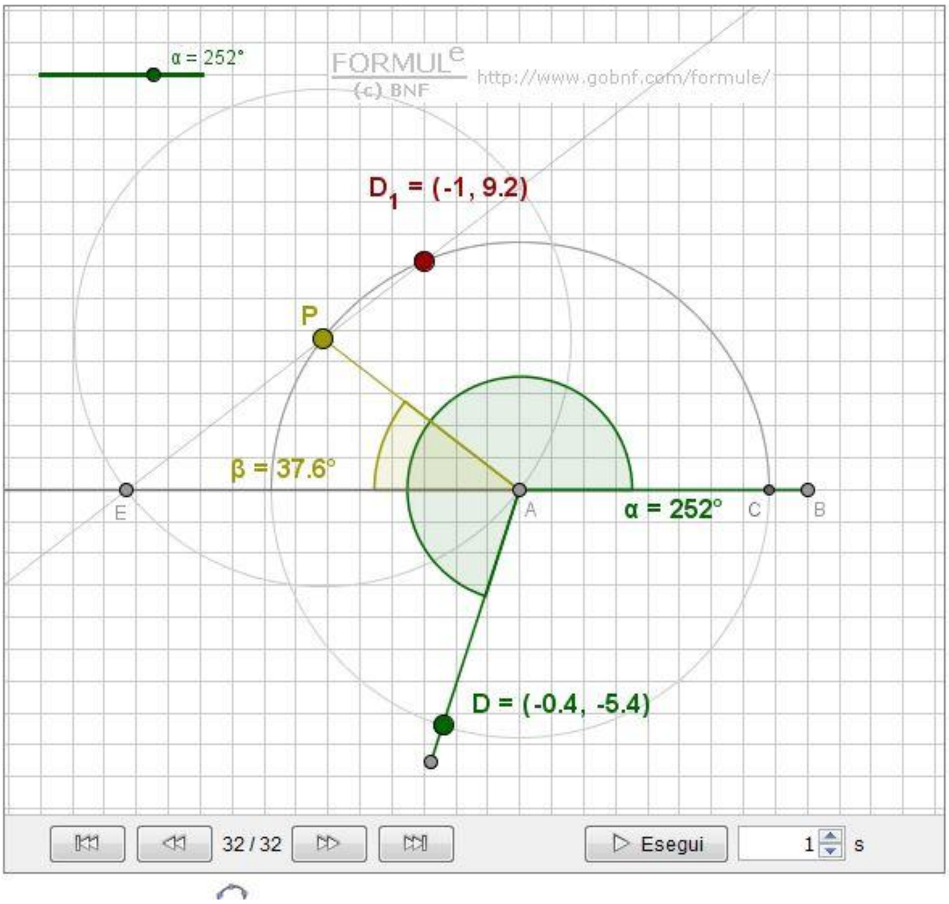

Figura 3 http://www.gobnf.com/formule/default.aspx?code=0010564LKBP1

3) La duplicazione del cubo: *costruire un cubo avente volume doppio rispetto a quello di un cubo di spigolo dato.*

Tra le tante possibili strategie risolutive del problema, ci siamo soffermati sul metodo che utilizza la Cissoide di Diocle (http://progettomatematica.dm.unibo.it/Curve%20celebri/grecia/cissoide.html) per poi costruire la curva in EdMondo; lo script è riportato in appendice.

Fase 3

È stata realizzata la costruzione di una spirale molto presente in natura: come viene tessuta la ragnatela da un ragno.

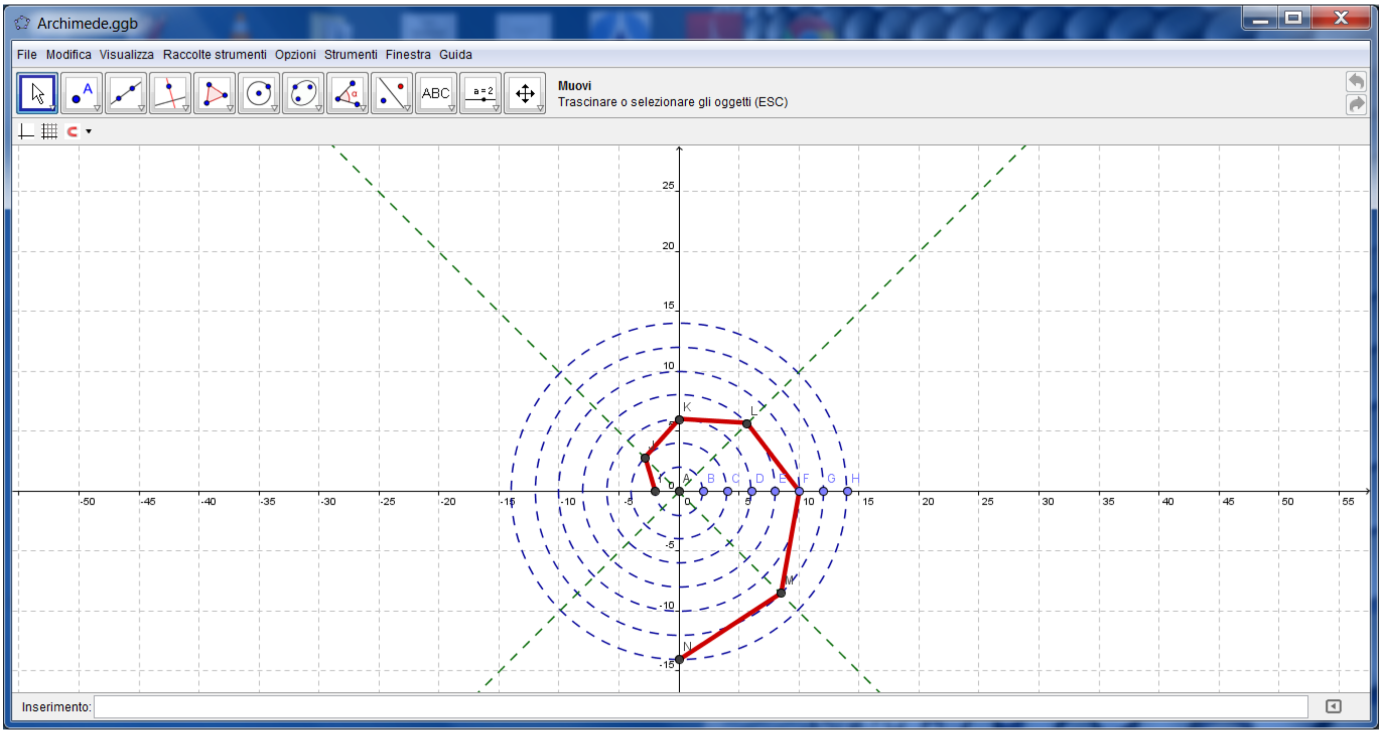

Figura 4 Ragnatela con GeoGebra

Con l'aiuto di GeoGebra è stata generata una spirale archimedea mediante la sua equazione parametrica. Attraverso altre ricerche e studi, ne è stata evidenziata l'importanza.

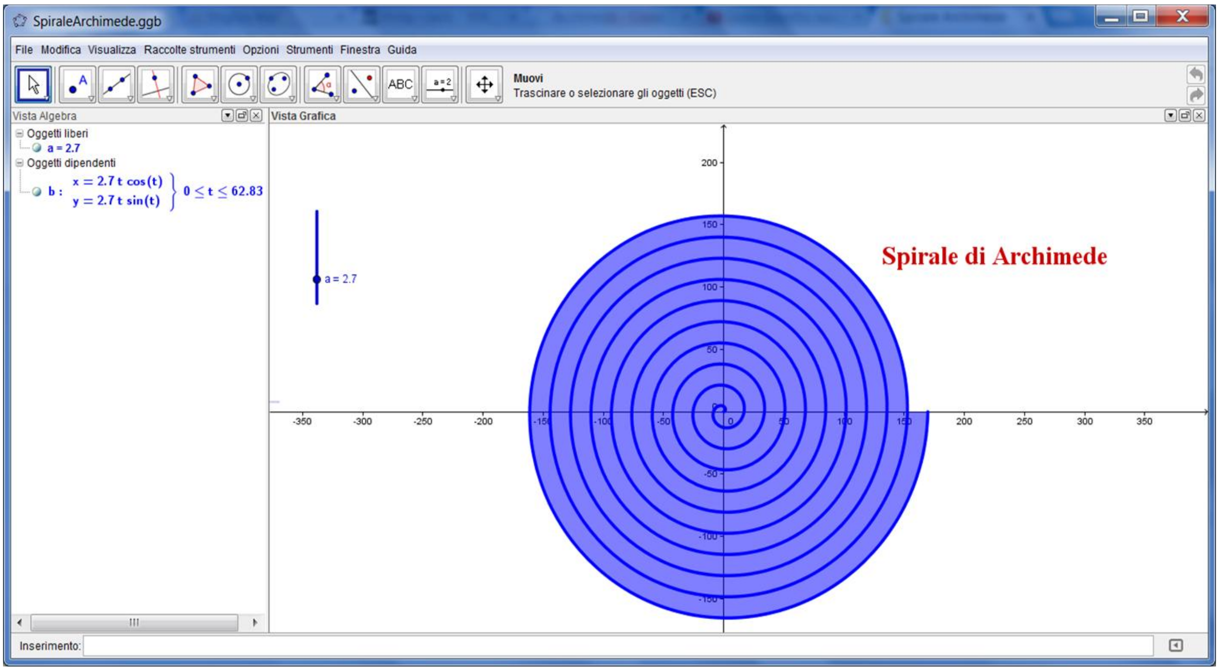

Figura 5 La spirale di Archimede realizzata con GeoGebra

Figura 6 La generazione della spirale con gli studenti

Dopo aver acquisito alcuni elementi teorici essenziali mediante una breve lezione frontale, è stato messo a punto lo script in LSL per rezzare la spirale di Archimede in 3D e calcolare la lunghezza di un suo arco (per la formula e l'algoritmo si veda: http://utenti.quipo.it/base5/geopiana/spirarchi.htm)

Nota di building: per ciascuna curva occorre rezzare un cubo e una sferetta di piccole dimensioni, rinominata "nuvola" fare il take, cioè "prenderla" nell'inventario e trascinarla nel contenuto del cubo, in cui inserire anche lo script di ciascuna curva. Per avere gli effetti speciali, anche all'interno della sferetta denominata "nuvola" va inserito in precedenza lo script che genera le particles.

```
//Passo d, a=1
float d= 2*PI;
//lunghezza della spirale
float L;
float rad;
vector u; vector v;
vector center;
integer angle;

plot(vector x)
{
    string modo="rez";
    llRezObject("nuvola",x,ZERO_VECTOR,ZERO_ROTATION,0);
}
vector calcolapos(float rad)
{//Equazione parametrica della spirale
        return (rad*llCos(rad))*u+(2*rad*llSin(rad))*(v)+center;
}
default
{
    touch_start(integer total_number)
    {
```

```
        v=llVecNorm(llRot2Left(llGetRot()));
        u=llVecNorm(llRot2Fwd(llGetRot()));
        center=llGetPos();          // metodo con il timer
        angle=0;
        llSetTimerEvent(0.01);
     }
    timer()
    { float rad =DEG_TO_RAD*angle;
        vector pos=calcolapos(rad);
        plot(pos);

        angle+=10;
        if(angle>360) llSetTimerEvent(0);
        //Formula per calcolare la lunghezza della spirale
        L=0.5*(rad*llSqrt(1+rad*rad)+llLog(rad+llSqrt(1+rad*rad)));
        llSay(0,"Se l'angolo in radianti misura "+(string)angle+" la lunghezza
della spirale è "+(string)L);
    }
}
```

Figura 7 Vari esperimenti in EdMondo

Questo è l'output ottenuto in chat quando viene eseguito lo script dell'oggetto (primitive) spirale:

[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 10 la lunghezza della spirale è 0.000000
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 20 la lunghezza della spirale è 0.175415
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 30 la lunghezza della spirale è 0.356030
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 40 la lunghezza della spirale è 0.546625
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 50 la lunghezza della spirale è 0.751283
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 60 la lunghezza della spirale è 0.973319
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 70 la lunghezza della spirale è 1.215335
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 80 la lunghezza della spirale è 1.479342
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 90 la lunghezza della spirale è 1.766894
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 100 la lunghezza della spirale è 2.079188
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 110 la lunghezza della spirale è 2.417163
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 120 la lunghezza della spirale è 2.781556
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 130 la lunghezza della spirale è 3.172957
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 140 la lunghezza della spirale è 3.591839
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 150 la lunghezza della spirale è 4.038590

[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 160 la lunghezza della spirale è 4.513529
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 170 la lunghezza della spirale è 5.016921
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 180 la lunghezza della spirale è 5.548988
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 190 la lunghezza della spirale è 6.109919
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 200 la lunghezza della spirale è 6.699875
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 210 la lunghezza della spirale è 7.318995
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 220 la lunghezza della spirale è 7.967396
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 230 la lunghezza della spirale è 8.645185
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 240 la lunghezza della spirale è 9.352450
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 250 la lunghezza della spirale è 10.089274
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 260 la lunghezza della spirale è 10.855725

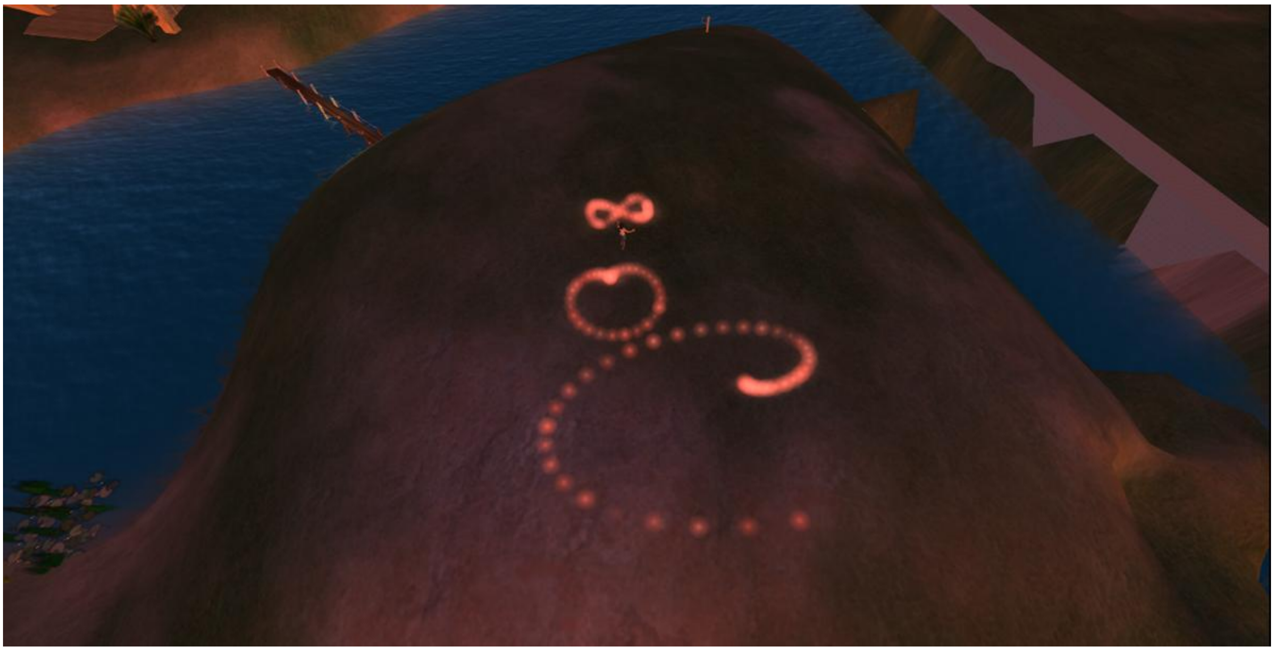

Figura 8 L'ambiente impostato a mezzanotte per evidenziare le curve

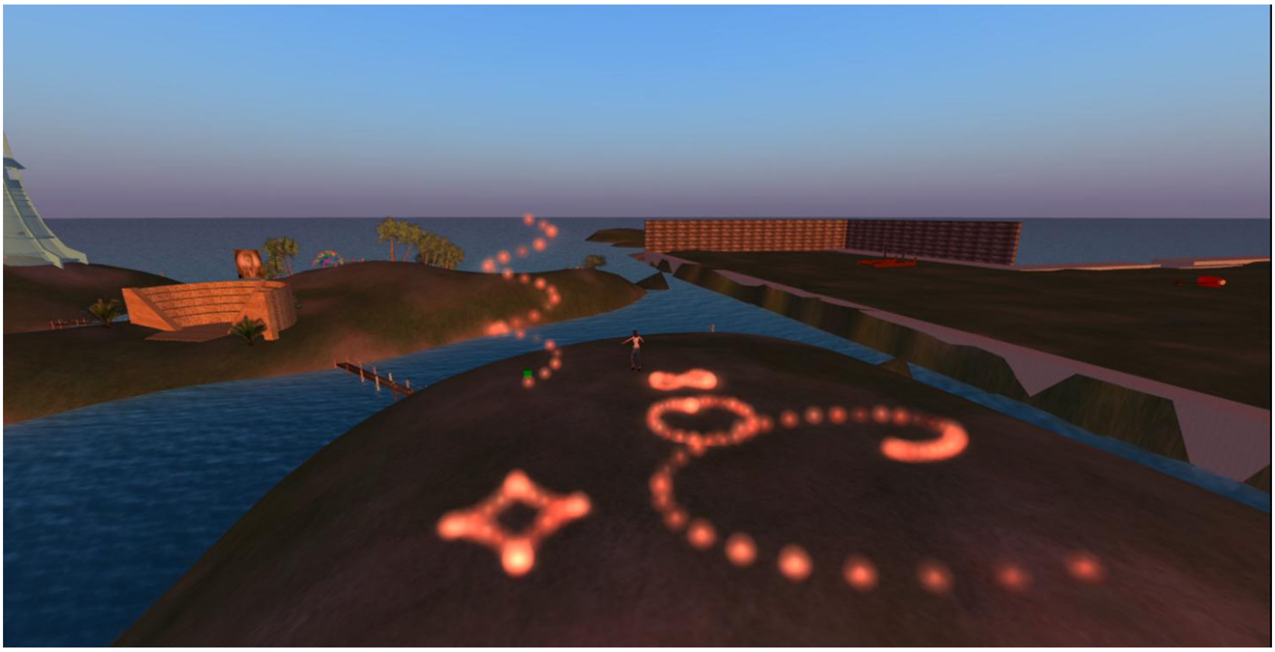

Figura 9 Curve algebriche che emettono particles

Compreso il modus operandi, sono state rezzate diverse curve algebriche: la spirale, la cardioide, l'asteroide, la lemniscata di Bernoulli e un'elica. La classe ha lavorato per gruppi di 2-3 studenti, ogni gruppo ha generato una curva. Sono state utilizzate le loro equazioni parametriche (con lo stesso script di base, ma sostituendo le equazioni) e sono stati creati degli effetti speciali con le particles, per accendere tante luci e rendere l'ambiente suggestivo.
Per generare gli effetti speciali con emissione di particles, si può utilizzare questo generatore online http://particles-lsl-generator.bashora.com/
in cui è sufficiente inserire i vari parametri e modificarli finché non si ottiene l'effetto desiderato. La scelta e la discussione sui valori dei diversi parametri costituiscono un ottimo esercizio di familiarizzazione e manipolazione di vari enti geometrici.

Appendice: La cissoide di Diocle

```
plot(vector x)
{
    string modo="rez";
    llRezObject("nuvola",x,ZERO_VECTOR,ZERO_ROTATION,0);

}
vector calcolapos(integer angle)
{
    float rad=DEG_TO_RAD*angle;
    return (2*llPow(llSin(rad),3)/llCos(rad))*u+2*llPow(llSin(rad),
2)*(v)+center;

}

vector u; vector v;
vector center;
integer angle;

default
{
    touch_start(integer total_number)
    {
```

```
        v=llVecNorm(llRot2Left(llGetRot()));
        u=llVecNorm(llRot2Fwd(llGetRot()));
        center=llGetPos();
        // metodo con il timer
        angle=0;
        llSetTimerEvent(0.01);
    }
    timer()
    {
        vector pos=calcolapos(angle);
        plot(pos);
        angle+=10;
        if(angle>360) llSetTimerEvent(0);
    }
}
```

Figura 10 La cissoide di Diocle in EdMondo

Conclusioni

E' stato un'attività impegnativa che ha gratificato tutti gli attori coinvolti. Gli studenti hanno risposto favorevolmente agli stimoli offerti dall' insegnante. Hanno acquisito più conoscenze e competenze di quelle prefissate perché attraverso la manipolazione col software di geometria dinamica e poi in 3D, hanno realizzato varie costruzioni. Hanno lavorato attivamente, in modo creativo, senza ricorrere ad alcun esercizio ripetitivo o di addestramento. Divertendosi hanno imparato anche:

- a collaborare meglio con gli altri componenti del gruppo;
- ad avere un confronto diretto con gli altri e quindi a saper discutere;
- a usare un linguaggio scientificamente più rigoroso;
- ad ascoltare più attentamente e ottimizzare i tempi;
- a ricercare, selezionare e utilizzare risorse presenti sul Web.

L'utilizzo delle risorse disponibili in rete ha notevolmente facilitato il lavoro e ridotto i tempi di attuazione del percorso didattico.

Sitografia

I problemi classici dell'antica Grecia
http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/curve/curve_giusti/prima.php?id=3
http://www.mat.unimi.it/users/forti/Storia%20della%20Matematica/2011%20Storia%20della%20Matematica%20-%20I%20problemi%20classici%20greci.pdf
Spirale di Archimede
http://www.spiralifrattali.altervista.org/archimede.htm
http://progettomatematica.dm.unibo.it/Curve%20celebri/grecia/spiralearchi.html
Lezioni di scripting in LSL a Scriptlandia
http://www.matematicamente.it/magazine/18dic2012/177marincola-scriptlandia.pdf
Curve algebriche: gioielli virtuali
http://www.matematicamente.it/magazine/19aprile2013/179-Maricola-Curve.pdf