

## 214. Sommare le serie non convergenti: istruzioni per l'uso

Luca Lussardi

Università Cattolica del Sacro Cuore

luca.lussardi@unicatt.it

*È il mondo a essere pazzo; i matematici e i fisici si limitano ad accorgersene.*

Con questa frase Odifreddi conclude il suo articolo *Quelle somme da manicomio* ([3]). Quali sono le stranezze a cui fa riferimento? Prendiamola alla larga e partiamo dalla fisica, e in particolare dalla fisica contemporanea: la teoria delle stringhe. Come è ben noto si tratta di una teoria che si propone di unificare l'infinitamente piccolo con l'infinitamente grande. Per giungere ad alcune conclusioni fondamentali della teoria stessa, i fisici fanno uso di un curioso risultato che sfida l'intuizione di ogni persona ragionevole: la serie  $1 + 2 + 3 + \dots$  vale  $-\frac{1}{12}$ : la cosa che appare paradossale è il fatto che sommando infiniti numeri interi positivi si ottenga un numero negativo, per di più non intero. Ramanujan non aveva quindi tutti i torti quando a Hardy, in una lettera del 1913, scriveva: "A dire che  $1 + 2 + 3 + \dots$  è uguale a  $-\frac{1}{12}$  si rischia di essere mandati direttamente in manicomio". Il genio matematico indiano non aveva comunque avuto molta fortuna un anno prima quando presentando la stessa formula al matematico londinese Hill ricevette la risposta: "Lei è evidentemente un uomo con gusto per la matematica e qualche abilità, ma ha imboccato una strada sbagliata. E non capisce le precauzioni che bisogna prendere con le serie divergenti ...". Già, le serie divergenti, o meglio *non convergenti*, quelle particolari somme infinite che anche Eulero aveva cercato di domare arrivando talvolta a risultati contraddittori.

Lo scopo di questo articolo è quello di presentare alcune definizioni di convergenza di una serie più generali rispetto al classico approccio *alla Cauchy*, cercando di illustrare, in particolare, come sia possibile arrivare ad una nozione di convergenza che permetta di rendere rigorosa l'uguaglianza  $1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$ ; per maggiori dettagli si consiglia la lettura di Hardy ([2]).

$1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$ : una dimostrazione semplice, ma sbagliata

C'è un modo immediato che permette di “dimostrare” che  $1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$ , ed è basato su manipolazioni opportune delle serie usando proprietà tipiche delle somme finite. Poniamo  $S := 1 + 2 + 3 + \dots$ ; vogliamo far vedere che  $S = -\frac{1}{12}$ . Sia  $S' := 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  e osserviamo che

$$S' = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S'$$

da cui  $S' = \frac{1}{2}$ . Consideriamo ora invece la serie  $S'' := 1 - 2 + 3 - 4 + \dots$  e notiamo che

$$2S'' = 1 + (-2 + 1) + (3 - 2) + (-4 + 3) + \dots = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

da cui  $S'' = \frac{1}{4}$ . Infine, se calcoliamo  $S - S''$  troviamo

$$S - S'' = (1 - 1) + (2 + 2) + (3 - 3) + \dots = 4(1 + 2 + 3 + \dots) = 4S$$

da cui finalmente  $S = -\frac{1}{12}$ . Abbiamo quindi ottenuto il risultato voluto sfruttando opportuni riordinamenti dei termini di una serie; ma siamo sicuri che sia possibile farlo per le somme infinite? Per rispondere correttamente a questa domanda è necessario dire con precisione cosa uno intende per *convergenza* di una serie: una volta che viene fissata una definizione di convergenza allora è possibile indagare quali sono le proprietà e quindi, in particolare, quali proprietà delle somme finite restano valide. È immediato vedere l'importanza dell'aver fissato la definizione di convergenza: basta osservare che se per calcolare la somma della serie  $S' = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  avessimo usato la proprietà associativa di modo che  $S' = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$  avremmo ottenuto  $S' = 0$  e non  $S' = \frac{1}{2}$ ; in un certo senso, che preciseremo meglio,  $S' = \frac{1}{2}$  è *più giusto* di  $S' = 0$ .

**La convergenza alla Cauchy**

L'ingegnere francese Cauchy dà, ai primi dell'Ottocento, la prima definizione rigorosa di convergenza di una serie: se  $x_h$  è una successione di numeri reali (o complessi) la serie  $x_1 + x_2 + \dots$  converge al valore reale  $S$  se la successione costituita dalla somme parziali ha come limite  $S$ , ovvero se la successione  $S_k := x_1 + x_2 + \dots + x_k$  tende a  $S$  quando  $k \rightarrow +\infty$ . Esistono serie convergenti “non banali”, ovvero serie convergenti formate effettivamente da infiniti addendi non nulli? La risposta è ovviamente affermativa, ad esempio la serie *geometrica* data da  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$  converge, nel senso appena introdotto, a 1. Effettivamente, vale un risultato più generale: infatti, la serie geometrica

---

$1 + q + q^2 + \dots$  converge a  $\frac{1}{1-q}$  ogni volta che  $|q| < 1$ . Basta osservare che

$$(1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^k) = 1 - q^{k+1}$$

da cui

$$S_k = 1 + q + q^2 + \dots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

ogni volta che  $q \neq 1$ ; al limite si ottiene  $\frac{1}{1-q}$  se  $q^{k+1} \rightarrow 0$ , ovvero se  $|q| < 1$ . Applicando questa definizione di convergenza risulta che la serie  $1 + 2 + 3 + \dots$  non converge ad alcun valore reale: difatti,

$$S_k = x_1 + x_2 + \dots + x_k = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \rightarrow +\infty;$$

si dice anche, nel caso specifico, che la serie  $1 + 2 + 3 + \dots$  *diverge positivamente*<sup>1</sup>. In effetti, la nozione di convergenza alla Cauchy è quella più intuitiva e che ci porta a concludere, in accordo col buon senso, che alla serie  $1 + 2 + 3 + \dots$  non può essere attribuito un valore numerico finito. È ovviamente possibile anche avere serie *divergenti negativamente*: basta considerare, ad esempio, la serie  $-1 - 2 - 3 - \dots$ . Ma c'è ancora un caso: cosa accade quando la successione  $S_k$  non ammette limite? La serie in tal caso si dice *indeterminata* o anche *oscillante*. È in realtà proprio il caso delle nostre vecchie conoscenze  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  e  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ : infatti, per la serie  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  si trova subito che

$$S_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

per cui  $S_k$  non ha limite, mentre per la serie  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$  si trova

$$S_k = \begin{cases} -\frac{k}{2} & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{k+1}{2} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

e anche in questo caso  $S_k$  non ammette limite. Restando all'interno di questa teoria, le proprietà tipiche delle somme finite si generalizzano solo a certi tipi di serie; accenniamo a cosa accade alla nozione di convergenza alla Cauchy quando si riordinano gli elementi di una serie; per maggiori dettagli si può consultare [1]. Di fatto, la convergenza non viene alterata se la serie in questione è a termini non negativi: se una serie a termini non negativi converge allora ogni suo riordinamento converge allo stesso valore. Le cose

---

<sup>1</sup>Si presti attenzione alla terminologia: in parecchi testi il termine *divergente* viene utilizzato come sinonimo di *non convergente*: per noi invece le serie divergenti sono solo alcune tra le serie non convergenti.

cambiano quando la serie data è a termini di segno qualunque: in tal caso non è più vero che se la serie converge allora ogni suo riordinamento converge. Dietro quest'ultimo problema è nascosta in realtà una nozione di convergenza più forte, che è la convergenza *assoluta*: una serie converge assolutamente se converge la serie dei valori assoluti. Si dimostra quindi che se una serie converge assolutamente allora ogni suo riordinamento converge allo stesso valore. Per altro, i riordinamenti delle serie convergenti ma non assolutamente convergenti hanno un comportamento abbastanza bizzarro: si dimostra infatti che se una serie converge ma non converge assolutamente allora per ogni  $S \in [-\infty, +\infty]$  fissato ad arbitrio esiste un riordinamento della serie che converge a  $S$ . Per tirare comunque una prima conclusione, utilizzando la nozione di convergenza alla Cauchy le serie numeriche si dividono quindi in tre classi: convergenti, divergenti (positivamente o negativamente), indeterminate.

### Come far convergere le serie indeterminate: le somme di Cesàro

Nel 1890 il matematico italiano Cesàro propone una definizione più generale di convergenza di una serie: precisamente, la *somma di Cesàro* di una successione  $x_h$  vale  $S$  se la successione delle medie aritmetiche delle somme parziali converge a  $S$ , ovvero se la successione

$$C_k := \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_k}{k}$$

converge a  $S$ . La prima domanda che possiamo porci è: la nozione di convergenza alla Cesàro generalizza quella alla Cauchy? La risposta viene applicando un ben noto teorema dovuto ancora a Cesàro: si ha

$$(1) \quad \lim_k y_k = \lim_k \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_k}{k}$$

ogni volta che il limite a sinistra esiste. In particolare, applicando la (1) alla successione  $S_k$  delle somme parziali della serie data si ottiene che la convergenza alla Cauchy implica la convergenza alla Cesàro, e le rispettive somme sono uguali, e anche la divergenza alla Cauchy implica che la somma di Cesàro vale  $+\infty$  o  $-\infty$  a seconda che la serie sia positivamente o negativamente divergente secondo Cauchy. L'unico caso quindi in cui la somma di Cesàro può dare un nuovo significato si ha quando la serie data è indeterminata secondo Cauchy. Ad esempio, utilizzando questa nuova nozione di convergenza, risulta facilmente che la somma di Cesàro della serie  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  vale  $\frac{1}{2}$ : infatti, ricordando

che

$$S_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

si ha di conseguenza

$$C_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{k+1}{2k} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

che converge a  $\frac{1}{2}$ . La pseudo-dimostrazione illustrata a pagina 44 per arrivare a dire che  $1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$  può quindi perlomeno essere avviata se uno volesse usare le somme di Cesàro anziché quelle alla Cauchy; purtroppo però si arresta al passaggio successivo: infatti la serie  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ , che non converge nel senso di Cauchy, non converge nemmeno nel senso di Cesàro, dal momento che si ha, come abbiamo già avuto modo di osservare,

$$S_k = \begin{cases} -\frac{k}{2} & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{k+1}{2} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

da cui

$$C_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{k+1}{2k} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

che non ha limite.

### Un'ulteriore generalizzazione: le somme di Hölder

Introdotta nel 1882 dal matematico tedesco Hölder, la somma che porta il suo nome è una naturale generalizzazione della somma di Cesàro: si tratta semplicemente di reiterare il procedimento di media aritmetica; se per una certa media reiterata si ottiene una successione convergente, il valore limite si chiama *somma di Hölder* della serie inizialmente data. Formalizziamo un po' meglio la cosa. Anzitutto, diciamo che una serie  $(H, 1)$ -converge a  $S$  se la somma di Cesàro vale  $S$ . Posto quindi  $H_k^1 := C_k$ , sia

$$H_k^2 := \frac{H_1^1 + H_2^1 + \dots + H_k^1}{k}.$$

Diciamo che la serie  $(H, 2)$ -converge a  $S$  se  $H_k^2$  è una successione convergente a  $S$ . Iterando il ragionamento, diciamo che la serie  $(H, n)$ -converge a  $S$  se  $H_k^n$  è una successione convergente a  $S$ , dove abbiamo posto

$$H_k^n := \frac{H_1^{n-1} + H_2^{n-1} + \dots + H_k^{n-1}}{k}.$$

Anche la nozione di  $(H, n)$ -convergenza generalizza quella secondo Cauchy: di fatto, se diciamo che una serie  $(H, 0)$ -converge se converge secondo Cauchy, la  $(H, n)$ -convergenza

implica la  $(H, n + 1)$ -convergenza per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Le serie divergenti alla Cauchy continuano a divergere anche nel senso di Hölder: la nostra serie  $1 + 2 + 3 + \dots$  continua quindi a non convergere in nessun  $(H, n)$ -senso, bensì continua a divergere positivamente. Invece, la somma  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$  diventa  $(H, 2)$ -convergente (ricordiamo che non è  $(H, 1)$ -convergente). Abbiamo già individuato la successione  $C_k$ , ovvero, nelle nuove notazioni,

$$H_k^1 = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{k+1}{2k} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

che non converge. Troviamo quindi  $H_k^2$ . Se  $k$  è dispari si ha facilmente, grazie alla (1),

$$H_k^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} \frac{j+1}{2j+1} = \frac{k+1}{2k} \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} \frac{j+1}{2j+1} = \frac{1}{4} + o(1)$$

mentre per  $k$  pari si ha, di conseguenza,

$$H_k^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{\frac{k-2}{2}} \frac{j+1}{2j+1} = \frac{1}{2} \frac{2}{k} \sum_{j=0}^{\frac{k-2}{2}} \frac{j+1}{2j+1} = \frac{1}{4} + o(1).$$

Dunque  $H_k^2 \rightarrow \frac{1}{4}$ , il che dimostra che la serie  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$  è  $(H, 2)$ -convergente a  $\frac{1}{4}$ .

Concludendo, abbiamo imparato a sommare le serie indeterminate, ma non abbiamo ancora capito come giustificare il procedimento euristico utilizzato nella sezione ???: infatti, la serie  $1 + 2 + 3 + \dots$  continua a  $(H, n)$ -divergere positivamente. Per arrivare a sommare anche le serie divergenti ci vogliono strumenti più sofisticati.

### Come si sommano le serie divergenti? $\mathbb{C}$ viene in aiuto

Nonostante il giochetto che fa ottenere il magico valore  $-\frac{1}{12}$  per la serie  $1 + 2 + 3 + \dots$  non possa essere restaurato utilizzando le precedenti generalizzazioni del concetto di convergenza, non ci arrendiamo e guardiamo ad un tentativo che coinvolge uno strumento molto più avanzato: l'analisi complessa. Presentare la metodologia generale è complicato ed esula dagli scopi di questo articolo introduttivo, per cui ci limitiamo a mostrare, senza troppi dettagli tecnici, come riottenere i valori trovati euristicamente a pagina 44. Ciò richiede l'introduzione della celeberrima funzione  $\zeta$  di Riemann, legata al problema della distribuzione dei numeri primi, e definita, per ogni  $z \in \mathbb{C}$  con  $\text{Re}(z) > 1$ , da

$$\zeta(z) := 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \dots$$

La definizione è ben data dal momento che la serie a secondo membro converge nel senso di Cauchy ogni volta che  $\operatorname{Re}(z) > 1$ . La funzione  $\zeta$  risulta essere anche una funzione olomorfa sull'aperto dove è definita. Si nota subito che se  $\zeta$  fosse definita dalla stessa espressione anche per  $z = -1$  si avrebbe proprio

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + \dots .$$

L'idea è quindi la seguente: prolungare analiticamente, secondo le tecniche dell'analisi complessa, la funzione  $\zeta$  in un intorno di  $z = -1$  e porre, *per definizione*,  $1 + 2 + 3 + \dots$  pari al valore che tale prolungamento assume proprio per  $z = -1$ . Cerchiamo quindi di capire come il prolungamento analitico funziona. Tipicamente, data una funzione olomorfa  $f$  definita su un aperto di  $\mathbb{C}$  si cerca una relazione funzionale soddisfatta dalla funzione  $f$  stessa che permette di estendere, mediante la relazione funzionale stessa, la funzione  $f$  anche al di fuori del proprio dominio; il fatto notevole, e in questo punto entra pesantemente l'analisi complessa, è che se un prolungamento analitico esiste allora è necessariamente unico (se i domini in gioco sono *topologicamente* fatti bene). La relazione funzionale giusta che permette di prolungare la  $\zeta$  di Riemann si ottiene introducendo altre due funzioni: la funzione  $\eta$  di Dirichlet e la funzione  $\Gamma$  di Eulero. Cominciamo col definire la  $\eta$  di Dirichlet: essa è data da

$$\eta(z) := 1 - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \dots, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Si verifica facilmente che per ogni  $z \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re}(z) > 1$  si ha

$$(2) \quad \eta(z) = (1 - 2^{1-z})\zeta(z).$$

La relazione (2) permette di estendere la  $\zeta$  di Riemann ad una funzione meromorfa sull'aperto  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ , la quale in particolare ha un polo semplice in  $z = 1$ . L'estensione a tutto  $\mathbb{C}$  si fa introducendo invece la  $\Gamma$  di Eulero definita da

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Si dimostra che l'integrale a secondo membro nella definizione di  $\Gamma$  converge assolutamente, per cui la definizione di  $\Gamma$  è ben data. Si può inoltre verificare facilmente che  $\Gamma(n+1) = n!$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ; effettivamente, la funzione  $\Gamma$  di Eulero ha origine proprio come interpolazione della funzione fattoriale. Ora, un calcolo non banale permette di trovare la relazione funzionale

$$(3) \quad \zeta(1-z) = 2(2\pi)^{-z} \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(z)\zeta(z), \quad 0 < \operatorname{Re}(z) < 1.$$

La relazione (3) permette di estendere la  $\zeta$  di Riemann a tutto  $\mathbb{C}$  e si dimostra che ne viene una funzione meromorfa su  $\mathbb{C}$  con un solo polo in  $z = 1$ . Abbiamo quindi risolto finalmente il nostro problema di dare un significato alla serie  $1 + 2 + 3 + \dots$ : essa, *per definizione*, può essere assunta pari al valore della funzione  $\zeta$  di Riemann, o meglio del suo prolungamento analitico, in  $z = -1$ . Calcoliamo tale valore usando la (3):

$$\zeta(-1) = 2(2\pi)^{-2} \cos \pi \Gamma(2) \zeta(2) = -\frac{1}{2\pi^2} \Gamma(2) \zeta(2).$$

Ora si ha  $\Gamma(2) = 1$ , mentre, per noti risultati sulle serie

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

da cui  $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ . Abbiamo quindi ritrovato il “paradossale” valore  $-\frac{1}{12}$ . Ci potremmo a questo punto chiedere se con la stessa tecnica si possano ritrovare i valori  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$  e  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \frac{1}{4}$  che combinati assieme davano proprio  $1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$ . La serie più immediata è  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ : infatti, basta osservare che formalmente corrisponde a  $\eta(-1)$ , dunque dobbiamo prolungare la  $\eta$  di Dirichlet. A tal scopo, osserviamo che grazie alla (2) e grazie al fatto che abbiamo esteso  $\zeta$  a tutto  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  possiamo prolungare anche la  $\eta$  di Dirichlet a  $\mathbb{C}$ , ottenendo quindi

$$\eta(-1) = (1 - 4)\zeta(-1) = -3 \left( -\frac{1}{12} \right) = \frac{1}{4}.$$

Passiamo infine a considerare la serie  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ , la quale si ottiene formalmente da  $\eta(0)$ ; per usare la (2) necessitiamo quindi di  $\zeta(0)$ . Il problema ora è che non possiamo direttamente usare la (3) per determinare  $\zeta(0)$  dal momento che in ogni caso dovremmo considerare  $\zeta(1)$ , ma 1 è una singolarità per  $\zeta$ . Dobbiamo quindi usare la (3) vicino a  $z = 1$  e passare al limite, sfruttando il fatto che, dal momento che si dimostra che il residuo di  $\zeta$  in  $z = 1$  vale 1,

$$\zeta(z) \sim \frac{1}{z-1}, \quad z \rightarrow 1.$$

Si ha quindi, grazie alla (3),

$$\zeta(0) = \frac{1}{\pi} \lim_{z \rightarrow 1} \cos \left( \frac{\pi z}{2} \right) \zeta(z) = \frac{1}{\pi} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z-1} \cos \left( \frac{\pi z}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

da cui, usando la (2),  $\eta(0) = -\zeta(0) = \frac{1}{2}$ .



Riottenere proprio il valore  $-\frac{1}{12}$  prolungando analiticamente la  $\zeta$  di Riemann appare un po' misterioso; il mistero si infittisce quando uno osserva che non si tratta di un risultato generale: se uno cambia regolarizzazione il valore formalmente assegnato alla serie  $1 + 2 + 3 + \dots$  potrebbe essere diverso. Ad esempio, consideriamo la successione

$$x_h(z) := \begin{cases} \frac{1}{h^z} & \text{se } h \text{ è pari} \\ \frac{1}{(h+1)^z} - \frac{1}{(h+1)^{z+1}} & \text{se } h \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Poniamo, per ogni  $z \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re}(z) > 1$ ,

$$f(z) := \sum_{h=1}^{+\infty} x_h(z).$$

La definizione di  $f$  è ben data e si vede facilmente che

$$(4) \quad f(z) = 2^{1-z}\zeta(z) - \frac{1}{2^{z+1}}\zeta(z+1).$$

La relazione (4) permette di estendere per prolungamento analitico la funzione  $f$  a tutto  $\mathbb{C}$  tranne che in 0 e 1 ottenendo quindi una funzione meromorfa su  $\mathbb{C}$  con due poli semplici in 0 e 1. Osserviamo ora che per ogni  $h \in \mathbb{N}$  con  $h \geq 1$  si ha  $x_h(-1) = h$  per cui, come nel caso della  $\zeta$  di Riemann, al valore  $f(-1)$  possiamo formalmente attribuire il valore della serie  $1 + 2 + 3 + \dots$ , ottenendo quindi, grazie alla (4),

$$f(-1) = 4\zeta(-1) - \zeta(0) = \frac{1}{6}.$$

## Conclusioni

Volendo tirare qualche conclusione sembra assodato che estendere il concetto di convergenza alla Cauchy alle serie indeterminate sia relativamente semplice: a forza di medie aritmetiche, uno riesce a trattare gran parte dei casi più interessanti. Ben diverso e più problematico è il caso delle serie divergenti: in questo caso risulta difficile assegnare ad esse un valore reale. Forse quindi il prof. Hill di Londra, quando disse a Ramanujan che bisogna prendere le dovute precauzioni con le serie divergenti, non si sbagliava del tutto.

## Riferimenti bibliografici

- [1] U. Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, T. Nistri e C., Pisa, 1878.
- [2] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Clarendon Press, Oxford 1949.
- [3] P. Odifreddi, *Quelle somme da manicomio*, Le Scienze 484, 2008.