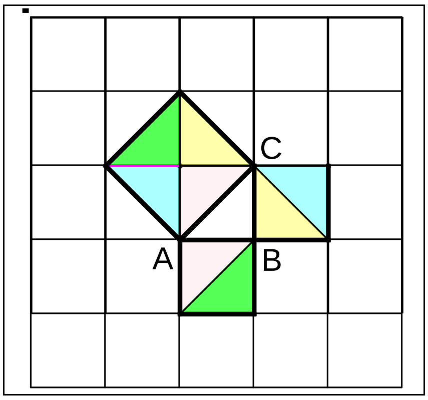
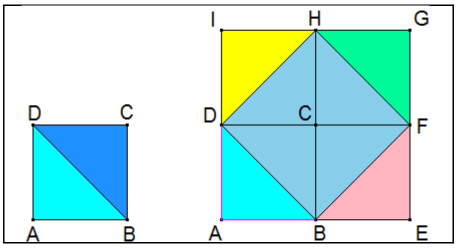
215. Socrate, Platone e … il problem solving

Alfio Grasso
grassoalfino@yahoo.it

Vuole la leggenda che Pitagora abbia scoperto il teorema che porta il suo nome – nel caso particolare di un triangolo rettangolo e isoscele - fissando un pavimento formato da quadrati (figura). Immaginò di tracciarne le diagonali e, sempre idealmente, fermò la sua attenzione su alcuni di essi posti in una speciale posizione (segnati in neretto in figura).
L'acquisizione della proprietà pitagorica è immediata servendosi dei triangoli colorati, si deduce applicando opportune traslazioni.



Platone, nel *Teeteto*, espone che Socrate basava il suo insegnamento sull'arte "maieutica", cioè l'attività, fondata sul *dialogo*, *di far emergere dalla mente* del discepolo *la Verità che già possiede dentro di sé*, con opportune interrogazioni dirette, semplici e chiare. Così che è il discente a scoprire da sé la verità sviluppando l'intuizione («da me non hanno imparato mai nulla, ma da loro stessi scoprono e generano molte cose belle»); nel processo si partiva dal particolare per arrivare all'universale, poiché nell'universale si trova la Verità.
Nel *Menone* Platone mostra come Socrate applichi l'arte maieutica come strumento fondamentale anche per "portare alla luce" dalla mente degli interlocutori *le conoscenze matematiche*, come nel celebre dialogo in cui aiuta uno schiavo di Menone a scoprire che il lato del quadrato di area doppia di quella di uno assegnato è una diagonale di questo.
Socrate chiede allo schiavo se sa com'è fatta un'area quadrata, cioè che possiede tutti lati uguali e le diagonali anch'esse uguali. Alla risposta affermativa dello schiavo domanda quanto vale l'area di un quadrato di lato due piedi.
Lo schiavo risponde correttamente: due piedi per due piedi, cioè quattro.
Socrate riprende il dialogo, sollecitando l'interlocutore a rispondere al quesito: di quanti piedi è il lato del quadrato di area doppia?
Lo schiavo risponde subito: di quattro piedi. A questo punto Socrate lo invita a riflettere: «quando il lato era di due piedi tu hai fatto correttamente due piedi per due piedi, allora se il lato del nuovo quadrato è quattro piedi, quanto sarebbe la sua area?»
Lo schiavo risponde: di sedici.
Dopo qualche altra riflessione il filosofo ateniese chiede allo schiavo se sa in che figure una diagonale divide un quadrato, ed egli risponde giustamente, in due triangoli uguali (prima figura).



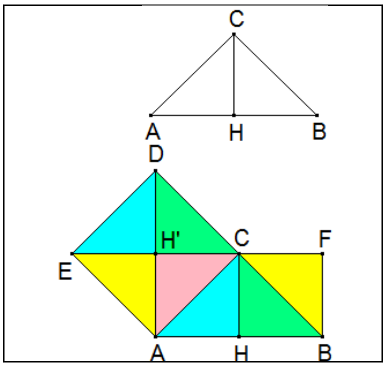
A questo punto Socrate gli suggerisce di costruire altri tre quadrati uguali a quello dato in modo da formare un nuovo quadrato (seconda figura a destra). Gli domanda se ora sa dire quale dev'essere il lato del quadrato che possiede area doppia di quello di due piedi di lato. Lo schiavo, tenendo conto della

considerazione precedente, dà la risposta corretta: il lato del quadrato di area doppia è una sua diagonale.
Questo è *problem solving*: i docenti di matematica dovrebbero sforzarsi di attuarlo.
Faccio osservare che: l*'umanità, dai suoi albori, ha dovuto risolvere problemi di molteplice natura per sopravvivere.*
Il metodo della didattica per problemi è stato teorizzato da John Dewey (1859–1952), importante filosofo e pedagogista statunitense del secolo scorso, che ha esercitato una profonda influenza sulla cultura e sui sistemi educativi sia del proprio paese che di altri paesi.
Karl Popper (1902–1994), insigne filosofo ed epistemologo austriaco, sostiene che "la ricerca scientifica consiste nel risolvere problemi", "la vita è costituita da problemi da risolvere" e, quindi, che "apprendere a risolvere problemi significa apprendere a vivere".
Presento un'applicazione del *problem solving*, finalizzato alla conquista da parte degli allievi del cosiddetto I teorema di Euclide e conseguentemente del teorema di Pitagora.

Prerequisiti

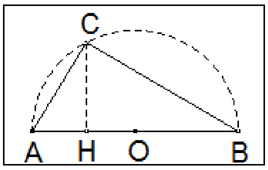
Isometrie, costruzione di un parallelogramma, equivalenza tra poligoni come equiscomponibilità.

Il triangolo rettangolo riveste un ruolo importante in geometria, in particolare perché a esso è legato il teorema più noto, quello di Pitagora. Questo teorema è un modo per esprimere la caratteristica che lo spazio euclideo è piatto.
Di notevole rilievo è il triangolo rettangolo e isoscele, perché è metà di un quadrato. Da esso prenderemo le mosse per *scoprire* due importanti proprietà: il cosiddetto I teorema di Euclide e quello di Pitagora.
Sia **ABC** un triangolo e isoscele di altezza **CH** relativa all'ipotenusa **AB** (prima figura sotto); poiché **ABC** è isoscele, **CH** è anche…
Giusta risposta. Mediana, quindi $\overline{AH} = \overline{HB}$, e **CH** bisettrice dell'angolo in **A$\hat{C}$B**; quindi i triangoli **AHC** e **HCB** sono entrambi non solo rettangoli ma anche…
Hai motivato correttamente, si sono isosceli e inoltre simmetrici rispetto a **CH**.



Se costruiamo (figura a lato) il quadrato di lato **AC**, **ACDE**, esso ha per diagonali **DA** ed **EC** che s'intersecano nel loro punto medio **H'** e formano quattro triangoli rettangoli e isosceli che sono tra loro…
Si bene, isometrici, e lo sono anche con i triangoli **AHC** e **CHB**.
Realizziamo ora il rettangolo **ABFH'** le cui dimensioni sono **AB** e **AH'** isometrico ad **AH** proiezione di **AC** su **AB**; allora tutti triangoli della seconda figura sono isometrici fra loro, cioè rettangoli e isosceli.
Come sono allora tra loro il quadrato e il rettangolo?...
Si Dottò, esatto, equivalenti perché equiscomposti.

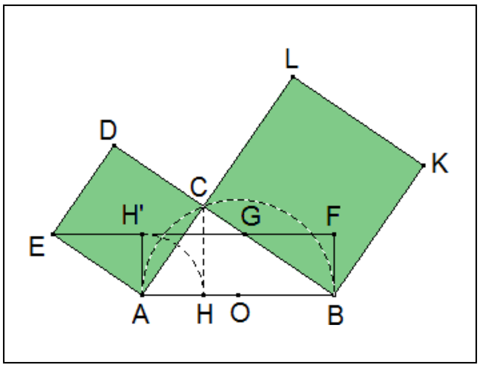
È spontaneo chiederci se tale proprietà vale anche nel caso in cui *il triangolo **ABC** è solo rettangolo in **C** con **CH** altezza relativa all'ipotenusa.*
Come possiamo costruire tale triangolo rettangolo? ... Si accettano suggerimenti… Se non ne vengono dopo una ragionevole attesa possiamo stimolarli con una opportuna domanda.
C'è qualche proprietà studiata mediante la quale si costruiscono triangoli certamente rettangoli?
Bravo 7+, prendiamo il punto **C** sulla semicirconferenza di centro **O** punto medio di **AB** e raggio **AB/2** (figura a fianco).



A questo punto prima di proseguire è opportuno verificare che gli allievi abbiano compreso bene il problema invitandoli a esporre con chiarezza le *premesse* e le *conclusioni* che abbiamo congetturato.
Vi ricordo che la buonanima del grande Cartesio ci ha insegnato che nessuno può risolvere un problema che non ha capito (spesso i giovani confondono addirittura l'ipotesi con la tesi).
Realizziamo allora il quadrato **Q – ACDE -** di lato **AC**. Dobbiamo ora costruire il rettangolo **R** che ha per lati **AB** e la proiezione di **AC** su **AB**, **AH** (figura precedente).

Al solito chiediamoci se c'è qualche isometria che ci può aiutare per trovare il lato del rettangolo perpendicolare ad **AB**…….

Sì, la tua è una buona idea: la rotazione – chiamiamola ϱ **–** di centro **A**, in senso antiorario di un angolo retto, trasforma il punto **H**, in **H'** e **C** in **E** perché $\overline{AE} = \overline{AC}$ e **CÂE** retto; il triangolo **AHC** possiede allora per associato **AH'E**, con **H'** sulla perpendicolare per **A** ad **AB**, $\overline{AH'} = \overline{AH}$ e $\overline{EH'} = \overline{CH}$.

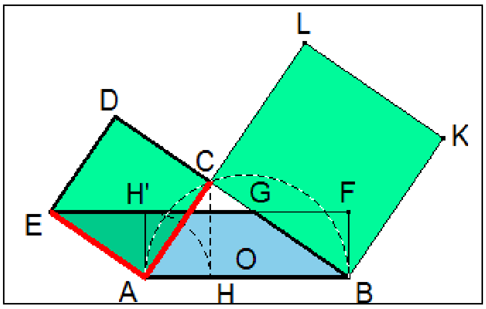


H' è così il vertice opposto a **B** del rettangolo **R**. Chiamiamo poi **F** il quarto vertice di **R** e **G** l'intersezione fra i segmenti **DB** e **H'F**.

Vi rammento che il nostro obiettivo è quello di provare l'equivalenza tra il quadrato **ACDE** e il rettangolo **R**, **ABFH'**, che sono comunque *parallelogrammi*. (*Respice finem*, abbi *sempre* presente ciò che vuoi provare, suggeriva sempre **Cartesio**). Questa sollecitazione è utile perché i giovani spesso utilizzano le informazioni date dall'ipotesi traendone conclusioni che non sono finalizzate alla tesi.

Osserviamo attentamente la figura…; si accettano proposte… Se non ne arrivano in un tempo ragionevole possiamo dare un'imbeccata: richiamate alla mente la condizione perché due parallelogrammi siano equivalenti. Qualche un suggerimento? …

OK! Devono presentare stessa base e medesima altezza; ma i nostri non ce l'hanno. Allora, *come suggerisce ancora Cartesio*, cerchiamo un problema connesso con questo, ma che abbiamo già risolto: c'è un parallelogramma equivalente al quadrato? Riflettete su ciò…

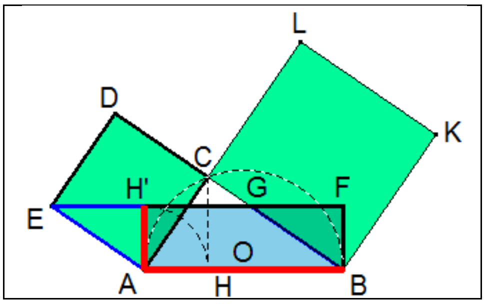


Bene! Il quadrato **ACDE** e il parallelogramma **ABGE**, hanno la stessa base **EA** e medesima altezza **AC**, quindi sono equivalenti, come evidenziato nella figura successiva a destra.

A questo punto siamo a un passo dalla meta – ricordate la tesi – poiché…

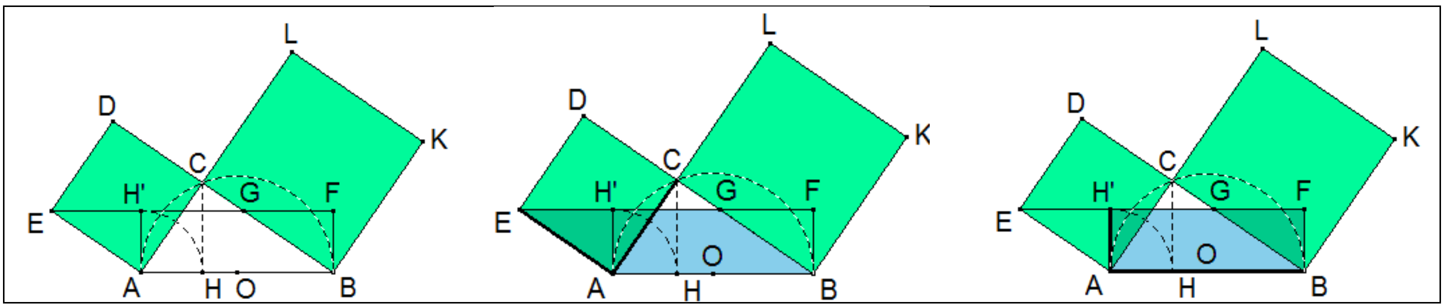
Complimenti! Le due motivazioni sono entrambe corrette.

- Alice afferma che il parallelogramma **ABGE** e il rettangolo **ABFH'** sono equivalenti perché hanno base comune in **AB** e stessa altezza **AH'**.
- Damiano dice che essi sono equiscomposti nel comune trapezio ABGH' e nei triangoli **GBF** per il rettangolo e **AH'E** per il parallelogramma, corrispondenti nella traslazione di vettore $\overrightarrow{AB}$.

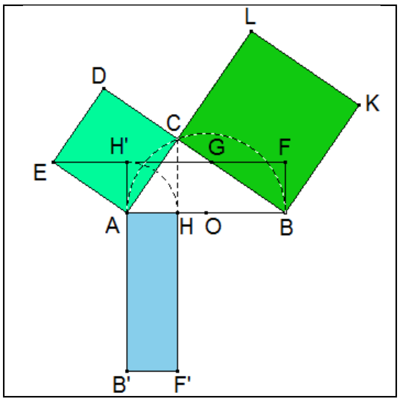


Seppure con un poco di fatica, e questo è stimolante – altrimenti non ci si sentirebbe sarebbe gratificati - avete risolto il problema che ci eravamo posto. Esso è solitamente chiamato *I teorema di Euclide* relativo all'equivalenza, il cui enunciato è:

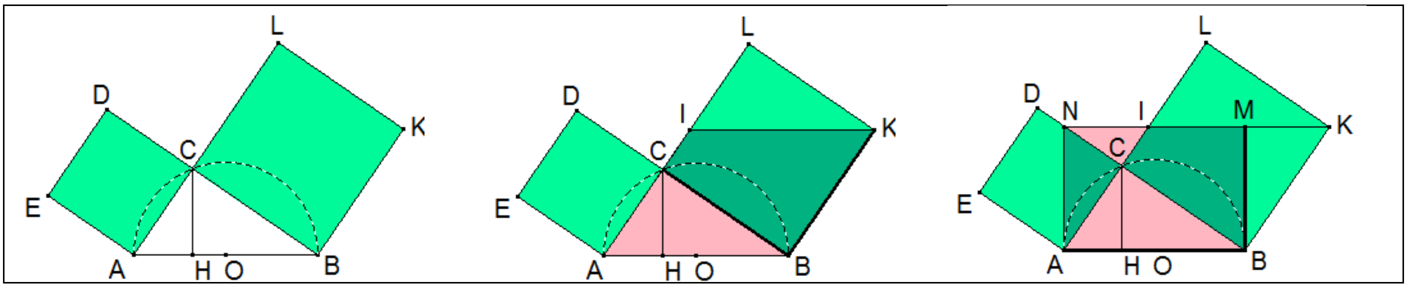
In ogni triangolo rettangolo il quadrato che ha per lato un cateto è equivalente al rettangolo i cui lati sono l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa.



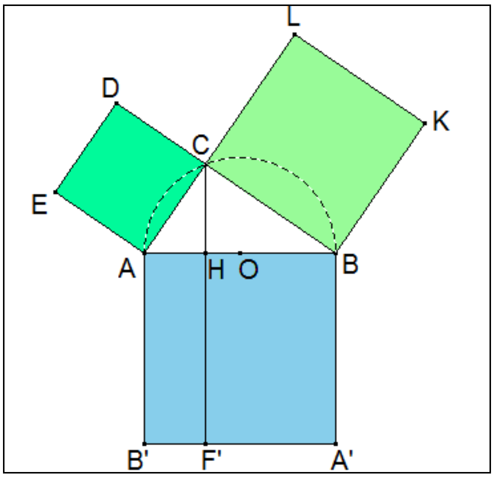
A questo punto, per evidenziare ancora più chiaramente il rettangolo **ABFH'** lo possiamo ruotare attorno ad **A** di un angolo retto nel senso positivo, cioè quello antiorario (**B'** ed **F'** sono ordinatamente i corrispondenti di **B** ed **F** nella rotazione eseguita in figura).



Per inciso, quello provato non è il primo teorema che si trova nel trattato *Elementi* di **Euclide** – che è il libro più letto e tradotto al mondo dopo *La Bibbia* – esso si trova come parte della dimostrazione del teorema di Pitagora che è la XXXXVI *Proposizione* del I Libro.
Procedendo analogamente col quadrato di lato **CB** e il rettangolo di base **AB** e altezza **HB**, otteniamo la successiva sequenza di parallelogrammi equivalenti.
Il parallelogramma **ABKI** ha la stessa base **BK** e medesima altezza **CB** del quadrato **CBKL** (prima figura).
Il rettangolo **ABMN** presenta uguale base **AB** e stessa altezza **MB** del parallelogramma **ABKI** (seconda figura).



Adesso, ruotando **ABMN** attorno a **B** di un angolo retto in senso orario, otteniamo che……
Esatto! Il rettangolo **ABMN** completa col rettangolo **AB'F'H** il quadrato che ha per lato l'ipotenusa **AB** nella figura 1.



Allora abbiamo provato che……
In ogni triangolo rettangolo il quadrato che ha per lato l'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati i cui lati sono i cateti.
La proposizione dimostrata è il teorema più noto dell'umanità, il teorema di Pitagora.
Congratulazioni!

Giarre 13-Settembre-2014