Matematicamente.it Magazine
• Numero 23 – Settembre 2014 •

216. Il triangolo di Tartaglia e altre disposizioni numeriche

Stefano Borgogni
e-mail: stfbrg@rocketmail.com

SUNTO

Questo studio intende esaminare alcune disposizioni infinite di numeri interi, che si possono rappresentare con la classica struttura ortogonale della matrice (righe/colonne) o con altre forme geometriche. Saranno trattate disposizioni molto note e altre poco conosciute ma tutte con una caratteristica comune, quella di essere definite da regole di costruzione estremamente semplici.

1. IL TRIANGOLO DI TARTAGLIA

Cominciamo questa trattazione con quella che, probabilmente, è la disposizione di numeri interi più celebre in assoluto: il Triangolo di Tartaglia[1] o Triangolo di Pascal.
In Francia e nei paesi anglosassoni viene chiamato Triangolo di Pascal, poiché il grande matematico e filosofo francese gli dedicò il *Traité du triangle arithmétique* (1653) che ebbe notevole successo. In realtà il matematico italiano ne aveva già parlato un secolo prima nel suo *General trattato di numeri et misure* (1556). Dunque, per semplici ragioni cronologiche, scevre da qualsiasi campanilismo, in questo testo lo definiremo Triangolo di Tartaglia.
Comunque lo si voglia chiamare, l'origine di questo triangolo si perde nella proverbiale "notte dei tempi": lo conosceva già il matematico, poeta e filosofo persiano Omar Khayyàm (vissuto intorno al 1100), che - a sua volta - ne aveva avuto notizia da fonti indiane o cinesi ancora precedenti.
Il triangolo ha tante e tali proprietà che ci vorrebbero più volumi per descriverle tutte e per approfondire i collegamenti - talora insospettabili - con le principali successioni numeriche, nonché le possibili applicazioni nei più svariati campi della matematica. E tutto ciò a fronte di una regola di costruzione semplicissima, comprensibile anche per un bambino delle scuole elementari.
Cominciamo con il riproporre le prime righe del Triangolo di Tartaglia.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Vediamo ora alcune delle principali proprietà di questa disposizione infinita, tenendo presente che le righe orizzontali sono numerate a partire da r_0 (quella contenente un solo 1) e le diagonali a partire da d_0 (quella composta da tutti 1).

[1] Dal nome del matematico bresciano Niccolò Fontana (1499-1557), detto Tartaglia per le sue difficoltà ad articolare le parole, dovute a una ferita alla mandibola occorsagli da bambino.

1.1. Potenze di un binomio

Cominciamo con una proprietà assai nota del nostro Triangolo: il suo legame con le successive potenze di un generico binomio $(a\pm b)$.

Tra le tante formule matematiche apprese nel corso del liceo, una che normalmente tutti gli studenti ricordano è quella del quadrato del binomio: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. I coefficienti numerici del polinomio risultante sono 1-2-1, e coincidono esattamente con i numeri che compongono la riga r_2 del Triangolo di Tartaglia.

Ciò vale anche per tutte le successive potenze del binomio $(a\pm b)^n$. Ad esempio, r_4 comprende i numeri 1-4-6-4-1 e, in effetti - ordinando il polinomio risultante per potenze decrescenti di a e crescenti di b - si verifica facilmente che $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

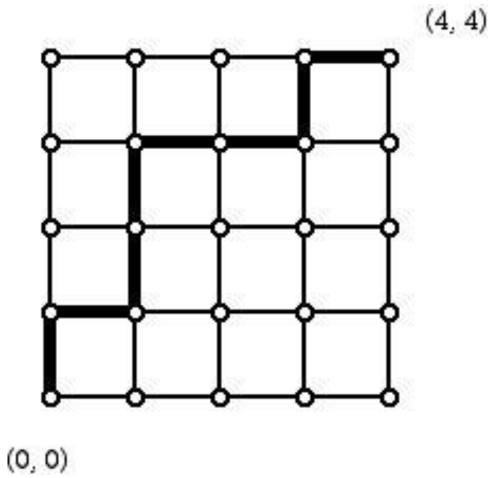
1.2. Triangolo di Tartaglia e calcolo combinatorio

Il Triangolo di Tartaglia ha molti e significativi collegamenti con il calcolo combinatorio.

Ad esempio, in quanti modi diversi si possono scegliere k elementi in un insieme di n? Come è noto, la risposta è data dalla formula $n! / k!\times(n-k)!$ Ma si può ottenere il risultato in maniera assai più semplice, senza bisogno di calcolare i fattoriali di n e di k: è sufficiente prendere il numero all'intersezione tra n-esima riga e k-esima diagonale del Triangolo.

Per esempio, per sapere in quanti modi diversi posso scegliere 4 oggetti all'interno di un gruppo di 7, non è necessario applicare la formula ($7! / 4!\times3! = 5.040 / 24\times6 = 35$); basta guardare il numero posto all'incrocio tra r_7 e d_4, e il gioco è fatto! (stavolta il punto esclamativo non c'entra niente con il fattoriale…).

Un'altra applicazione simile è la seguente: dato un reticolo di punti collegati orizzontalmente e verticalmente, come nella figura, quanti sono i percorsi diversi di distanza minima[2] che collegano due di tali punti?



Nel caso rappresentato in figura i possibili percorsi diversi che collegano il punto (0,0) con il punto (4,4) sono 70. Ebbene, tale risultato si può agevolmente ricavare dal Triangolo di Tartaglia tramite un semplice accorgimento grafico: basta ruotare il triangolo di 45 gradi in modo da trasformarlo in una matrice ortogonale e considerare ogni numero come uno dei punti del reticolo. Si ottiene così un rettangolo, nel quale il numero posto nel vertice opposto all'1 iniziale dà il risultato cercato.

[2] Il concetto di "distanza" è quello della cosiddetta "Geometria del taxi" ("Taxicab geometry" in inglese), in cui si immagina una città suddivisa in isolati quadrati e la distanza tra due punti equivale al percorso più breve che deve percorrere un'auto per passare da uno all'altro, muovendosi, ovviamente, soltanto per linee orizzontali o verticali.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252

1.3. Triangolo di Tartaglia e successioni numeriche

Si diceva degli stretti collegamenti esistenti tra il Triangolo di Tartaglia e le più note successioni numeriche; ecco alcuni esempi.

- La diagonale d_1 è formata dai numeri naturali, d_2 esprime i numeri triangolari (1-3-6-10…), d_3 quelli tetraedrici[3] (1-4-10-20…) e così via: le successive diagonali d_4, d_5 … d_k, infatti, indicano l'equivalente dei numeri triangolari nello spazio a 4, 5 … k dimensioni.
- Se consideriamo le diagonali meno inclinate del triangolo (nell'ordine, quelle composte da 1; 1; 1-1; 1-2; 1-3-1; 1-4-3; 1-5-6-1 etc.), la somma dei numeri che le compongono fornisce la successione di Fibonacci (1-1-2-3-5-8-13...)! Si tratta di una proprietà davvero notevole, poiché collega tra di loro due strutture numeriche fondamentali, che condividono la caratteristica di essere tanto semplici quanto ricche di applicazioni in tutti i campi della matematica (e non solo). Questa proprietà è stata messa in luce solo nella seconda metà del XIX secolo.
- Partendo dal vertice e scendendo in verticale, invece, si ha una sequenza di valori (1, 2, 6, 20, 70…) che - divisi successivamente per 1, 2, 3, 4, 5… - danno i cosiddetti Numeri di Catalan.[4]

1.4. Altre proprietà numeriche

Segnaliamo ancora altre tre proprietà numeriche del Triangolo di Tartaglia sulle quali - per brevità - non ci soffermiamo in questa sede:

- La somma dei numeri compresi nella riga r_n equivale a 2^n. Ad esempio, la somma dei valori della riga r_5 (1-5-10-10-5-1) vale 32, ossia 2^5.

[3] Ai numeri triangolari, tetraedrici e ad altre tipologie di numeri figurati è dedicato un articolo pubblicato su questo stesso sito: http://www.matematicamente.it/il-magazine/279-numero-16-dicembre-2011/7723-164-numeri-figurati.

[4] I Numeri di Catalan (dal nome del matematico belga dell'800 Eugene Catalan) hanno svariate applicazioni nel calcolo combinatorio; ad esempio, rispondono alla domanda "In quanti modi diversi si può dividere un poligono convesso in triangoli, tracciando diagonali che non si intersecano?". La successione inizia con 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429…

- La riga r_n comprende esclusivamente numeri dispari se e solo se $n=2^k-1$. Ad esempio, 7 equivale a 2^3-1 e r_7 è costituita dai numeri 1-7-21-35-35-21-7-1.
- A parte i due “1” agli estremi, la riga r_n è composta da numeri tutti divisibili per n se e solo se n è un numero primo. Ad esempio, la riga r_{11} è formata dai numeri 1-11-55-165-330-462-462-330-165-55-11-1, numeri che - come è facile verificare - sono tutti divisibili per 11.

1.5. Sottotriangoli

L’elenco potrebbe continuare a lungo, ma ci fermiamo qui passando, invece, a esaminare un’altra notevole proprietà che risulta evidente utilizzando i colori o altri accorgimenti grafici.
Allargando sufficientemente il triangolo e identificando in maniera differente i numeri pari e quelli dispari, si possono osservare diverse forme triangolari (con il vertice in basso), di dimensioni sempre maggiori. Riportiamo una parte del triangolo in cui - per maggiore chiarezza - sarà applicato un fondino colorato ai numeri pari.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1

Ma c’è di più: la stessa proprietà vale anche se si prendono in considerazione non i numeri pari o dispari (dunque, divisibili o non divisibili per 2), ma quelli che sono multipli o meno di un qualsiasi numero primo. Nel presente studio si propone il caso del numero 3, per il quale - anche con un numero limitato di righe - si riescono a distinguere in modo sufficientemente chiaro i triangoli “capovolti” di cui si è detto; disponendo di uno spazio maggiore, si potrebbe faro lo stesso discorso con 5, 7, 11 o un altro qualsiasi numero primo.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1

1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1

1.6. Un gioco di magia

Tra le numerose applicazioni del Triangolo di Tartaglia in ambito non strettamente matematico, ne citiamo ancora una nella quale questa disposizione numerica viene utilizzata per un gioco di magia tutt'altro che banale.

Il gioco si sviluppa attraverso i seguenti passi:

- Dite a qualcuno di scrivere cinque numeri di una cifra (il gioco funziona con numeri di qualsiasi dimensione, ma per semplicità conviene limitarsi a quelli più piccoli.) in sequenza.
- Guardate i numeri e con un rapido calcolo mentale scrivete un numero su un foglietto che metterete in tasca.
- Dite di sommare i primi due numeri, poi il secondo e il terzo e così via, calcolare le radici numeriche dei risultati ottenuti (es. 6+7 = 13 → radice numerica = 4) e scriverle al di sotto della coppia di partenza.
- Fate ripetere più volte il procedimento fino a quando rimane un solo numero.

A questo punto, tirate fuori dalla tasca il vostro foglietto, in cui sarà scritto esattamente lo stesso numero.

Come avete fatto? Basta moltiplicare i cinque numeri iniziali rispettivamente per 1, 4, 6, 4 e 1 (i coefficienti della riga r_4 del Triangolo di Tartaglia), fare la somma e calcolare la radice numerica; si tratta di un calcolo mentale che per una/un appassionata/o di matematica dovrebbe essere abbastanza agevole.

Facciamo un esempio con cinque numeri a caso:

2 3 5 7 4 → 2×1 + 3×4 + 5×6 + 7×4 + 4×1 = 2+3+3+1+4 = **4**

5 8 3 2

4 2 5

6 7

4

Il gioco appare ancora più sbalorditivo (anche se è più laborioso per chi scrive) se si parte con 10 numeri. In tal caso, infatti, i coefficienti da utilizzare sono quelli della riga r_9 del Triangolo, ossia 1-9-36-84-126-126-84-36-9-1, e ben sei di questi - in quanto multipli di 9 - hanno la radice numerica pari a 0, dunque si possono tranquillamente ignorare nel calcolo mentale di cui si è detto.
Basta, allora, considerare il primo e l'ultimo dei 10 numeri iniziali, sommarli al triplo del 4° e del 7°, trovare la radice numerica e, voilà, il gioco è fatto!
Per esempio:

```
2    3    5    4    8    7    3    1    6    4
   5    8    0    3    6    1    4    7    1
      4    8    3    0    7    5    2    8
         3    2    3    7    3    7    1
            5    5    1    1    1    8
               1    6    2    2    0
                  7    8    4    2
                     6    3    6
                        0    0
                          0
```

Con poche semplici operazioni, operando come sopra indicato, si può agevolmente pervenire allo stesso risultato: 2 + 4 + 4×3 + 3×3 = 2+4+3+0 = 0.

2 - TRIANGOLO DI BELL

Passiamo adesso a un triangolo assai meno celebre, il cosiddetto Triangolo di Bell (dal nome del matematico Eric Temple Bell) che si può costruire in maniera simile al Triangolo di Tartaglia, per mezzo di un procedimento additivo più complicato da spiegare che da mettere in pratica.
Si scrive 1 nella prima riga. La seconda riga inizia con l'ultimo numero della riga precedente, poi si aggiunge come secondo numero la somma tra il numero precedente e quello posizionato al di sopra.

1
1 2 (1+1)

La terza riga inizia con l'ultimo numero della seconda; poi si scrive il numero ottenuto sommando il numero precedente con il numero che gli sta sopra e si ripete due volte lo stessa operazione:

1
1 2
2 3 (2+1) 5 (3+2)

Continuando allo stesso modo si ottiene un triangolo del quale, per brevità, ci limitiamo qui a mostrare le prime righe.

1						
1	**2**					
2	3	**5**				
5	7	10	**15**			
15	20	27	37	**52**		
52	67	87	114	151	**203**	
203	255	322	409	523	674	**877**

Gli stessi numeri si possono disporre in una forma triangolare simile a quella di un Triangolo di Tartaglia rovesciato:

1 2 5 15 52 203 877 …

1 3 10 37 151 674 …

2 7 27 114 523 …

5 20 87 409 …

15 67 322 …

52 255 …

203 …

…

Questo triangolo ha una notevole proprietà: ogni numero equivale alla differenza tra i 2 numeri che stanno sopra di esso, rispettivamente a destra e a sinistra. In altre parole, lo potremmo definire un Triangolo di Tartaglia "sottrattivo" (ammesso che questa parola esista), anziché additivo.
I numeri evidenziati in grassetto costituiscono una successione, i cosiddetti **Numeri di Bell**, che ha una notevole importanza nel calcolo combinatorio.
In particolare, questa sequenza di elementi B_1, B_2 … B_n rappresenta il numero delle possibili partizioni di un insieme di n elementi, cioè il numero di modi in cui questo insieme può essere ottenuto come unione disgiunta di suoi sottoinsiemi non vuoti. Un esempio può chiarire meglio il concetto: $B_3 = 5$ in quanto per un insieme di tre elementi {a,b,c} esistono cinque differenti modi di dividerlo in sottoinsiemi non vuoti: {a},{b},{c} / {a,b},{c} / {a,c},{b} / {a},{b,c} / {a,b,c}.
La questione si può porre in altri termini: se ho n oggetti, in quanti modi diversi posso disporli in n scatole non distinguibili tra di loro? Evidentemente, nel caso di 1 oggetto e 1 scatola esiste 1 sola possibile disposizione; per n=2 le possibilità sono 2 (entrambi gli oggetti in una scatola oppure 1 oggetto in ciascuna scatola); per n=3 il risultato è 5 e così via.
Concludiamo questa parte con una significativa applicazione dei Numeri di Bell: data una poesia di n versi, essi indicano il numero dei possibili schemi differenti di rima. Ad esempio, una quartina offre 15 possibilità: aaaa, aaab, aaba, abaa, baaa, aabb, abab, abba, aabc, abac, abca, abbc, abcb, abcc, abcd.
Salendo nel numero di versi, le possibili rime differenti aumentano in maniera vertiginosa: ad esempio, se esaminassimo un poema di 14 versi (la misura del sonetto, la forma poetica più classica della nostra tradizione letteraria), potremmo scoprire che esistono ben 190.899.322 schemi diversi di rima!

3 - MATRICI DI WYTHOFF E DI STOLARSKY

Facciamo ancora un breve accenno a due disposizioni di numeri poco conosciute, ma che presentano caratteristiche senza dubbio interessanti: le cosiddette matrici di Wythoff e di Stolarsky.[5]
Anche in questo caso ci troviamo di fronte a una disposizione infinita di numeri interi, stavolta nella più consueta forma ortogonale anziché in quella triangolare.
Per cominciare, vediamo le prime 10 righe e 12 colonne di entrambe le matrici.

[5] Dal nome di due matematici, l'olandese Abraham Wythoff (celebre soprattutto per l'invenzione del gioco di strategia noto come *Wythoff's game*, una sorta di "Nim") e lo statunitense Kenneth B. Stolarsky.

Matrice di Wythoff

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
2	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843
3	6	10	16	26	42	68	110	178	288	466	754	1.220
4	9	15	24	39	63	102	165	267	432	699	1.131	1.830
5	12	20	32	52	84	136	220	356	576	932	1.508	2.440
6	14	23	37	60	97	157	254	411	665	1.076	1.741	2.817
7	17	28	45	73	118	191	309	500	809	1.309	2.118	3.427
8	19	31	50	81	131	212	343	555	898	1.453	2.351	3.804
9	22	36	58	94	152	246	398	644	1.042	1.686	2.728	4.414
10	25	41	66	107	173	280	453	733	1.186	1.919	3.105	5.024

Matrice di Stolarsky

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
2	4	6	10	16	26	42	68	110	178	288	466	754
3	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1.364
4	9	15	24	39	63	102	165	267	432	699	1.131	1.830
5	12	19	31	50	81	131	212	343	555	898	1.453	2.351
6	14	23	37	60	97	157	254	411	665	1.076	1.741	2.817
7	17	28	45	73	118	191	309	500	809	1.309	2.118	3.427
8	20	32	52	84	136	220	356	576	932	1.508	2.440	3.948
9	22	36	58	94	152	246	398	644	1.042	1.686	2.728	4.414
10	25	40	65	105	170	275	445	720	1.165	1.885	3.050	4.935

Che cosa hanno queste due matrici di particolarmente significativo? Esaminandole più attentamente, si può osservare che godono di alcune notevoli proprietà:

- La prima riga (uguale per entrambe) è formata dai celeberrimi numeri di Fibonacci.
- Ogni riga, non solo la prima, soddisfa la regola di costruzione delle successioni di Fibonacci generalizzate.[6]
- Ogni numero intero appare una e una sola volta nella matrice.
- Il primo termine di ogni riga è il più piccolo intero non presente nelle righe precedenti.

[6] Una "Successione di Fibonacci generalizzata" (S_n) si costruisce in base alla formula ricorsiva $S_n = S_{n-1}+S_{n-2}$, partendo da due numeri interi a piacere. Lasciando da parte i Numeri di Fibonacci, la successione generalizzata più semplice è quella composta dai cosiddetti "Numeri di Lucas" (dal nome del matematico francese dell'800 Edouard Lucas), che inizia con la coppia 1-3.

Si può notare che in alcuni casi le righe delle due matrici sono esattamente uguali; ad esempio, prendendo in esame le prime righe, si riscontra una coincidenza assoluta per r_1, r_4, r_6, r_7, r_9.
Non si sa se esista una qualche regola per stabilire in che modo si susseguano le righe identiche all'interno delle due matrici. Egualmente, non è noto se le righe coincidenti siano infinite, anche se tale ipotesi sembra assai probabile.
Infine, segnaliamo una curiosità riguardante l'ottava riga della matrice di Wythoff: i suoi valori corrispondono alla somma di numeri appartenenti alle due sequenze additive fondamentali, quella di Fibonacci e quella di Lucas.
In particolare, i numeri di questa particolare riga sono esprimibili nella forma $F_{n+1}+L_n$, a partire da n=5: 19 è pari alla somma tra F_6 (8) e L_5 (11), 31 equivale a F_7 (13) e L_6 (18) e così via. Per maggiore chiarezza, riportiamo in una semplice tabella quanto appena detto.

Numeri di Fibonacci (da F_6)	8	13	21	34	55	89	144	233	…
Numeri di Lucas (da L_5)	11	18	29	47	76	123	199	322	…
Matrice di Wythoff - Riga 8	19	31	50	81	131	212	343	555	…