

• Numero 23 – Settembre 2014 •



Triangolo di Tartaglia

## Come proporre un contributo

### *Istruzioni per gli autori*

La rivista pubblica articoli, interviste, buone pratiche e giochi relativamente alla matematica e alle sue applicazioni.

Lo stile, la terminologia e le idee espresse devono essere chiari e accessibili a tutti.

Gli articoli saranno valutati da uno o più collaboratori esperti in materia. La redazione si riserva la decisione di pubblicare o non pubblicare il lavoro ricevuto.

In caso di accettata pubblicazione, sarà cura della direzione informare gli autori dell'accettazione; l'articolo sarà pubblicato in forma elettronica così come è, salvo eventuali interventi redazionali, anche sul contenuto, per migliorarne la fruibilità da parte del lettore.

È possibile che la redazione subordini la pubblicazione dell'articolo a modifiche anche sostanziali che devono essere fatte dall'autore. I contributi devono essere inviati in forma elettronica al direttore responsabile.

Gli articoli o gli altri tipi di contributi devono essere in formato .doc, .docx, .rtf, .odt o formati analoghi. Le formule possono essere in Microsoft Equation Editor, MathType, Open office math o immagini nei formati gif, jpeg, png, tif. Sono ammesse figure, tabelle e grafici purché estremamente curati e inviati in file a parte. Di ogni elemento non testuale deve essere indicata la posizione precisa all'interno del testo. Se le immagini utilizzate sono protette da diritti d'autore, sarà cura dell'autore dell'articolo ottenere le autorizzazioni necessarie.

Nella prima pagina andranno indicati: titolo del lavoro, nome e cognome degli autori, qualifica professionale e istituzione o ambiente professionale di appartenenza, indirizzo e-mail.

L'articolo dovrà iniziare con un breve sunto (5-10 righe) preferibilmente in italiano e in inglese, e dovrà terminare con una bibliografia.

I riferimenti bibliografici devono essere indicati all'interno del testo nel seguente modo: [3] oppure [Ba], se si deve indicare la pagina usare [Ba, p.15].

Le note al testo dovrebbero essere in generale evitate; sono preferiti all'interno del testo rimandi alla bibliografia.

I contributi non devono complessivamente superare le 12 pagine.

La redazione non garantisce la correttezza scientifica del contenuto degli articoli. Gli autori sono responsabili del contenuto dei testi inviati per la pubblicazione.

Se l'articolo è stato pubblicato in altra sede l'autore deve richiederne l'autorizzazione a chi ha pubblicato per primo l'articolo e fornire le coordinate alla redazione.

I testi pubblicati in questa rivista, se non diversamente indicato, sono soggetti a licenza Creative Commons Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate 3.0: la riproduzione, distribuzione e divulgazione dei testi sono consentite a condizione che vengano citati i nomi degli autori e della rivista Matematicamente.it Magazine; l'uso commerciale e le opere derivate non sono consentiti.

### MATEMATICAMENTE.IT MAGAZINE

*Rivista trimestrale di matematica per curiosi e appassionati distribuita gratuitamente sul sito*  
www.matematicamente.it

Registrazione del 19.12.2006 al n.953 del Tribunale di Lecce  
ISSN 2035-0449

#### *Direttore responsabile*

Antonio Bernardo  
antoniobernardo@matematicamente.it

#### *Vicedirettore*

Luca Lussardi  
lucalussardi@matematicamente.it

#### *Redazione*

Flavio Cimolin  
flaviocimolin@matematicamente.it  
Diego Alberto - Luca Barletta - Michele Mazzucato - Nicola Chiriano

#### *Hanno collaborato a questo numero*

Stefano Borgogni, Sebastiano Ferraris, Luca Lussardi, Alfio Grasso, Rosa Marincola, Michele T. Mazzucato, Daniela Molinari.

# Sommario

|  |    |
|--|----|
| <b>211.</b> Hungarian algorithm: a Short Presentation using Sage<br>Sebastiano Ferraris . . . . .  | 5  |
| <b>212.</b> Atmosfera standard<br>Michele T. Mazzucato . . . . .                                   | 25 |
| <b>213.</b> Le spirali di Archimede in 2D e 3D<br>Rosa Marincola . . . . .                         | 31 |
| <b>214.</b> Sommare le serie non convergenti: istruzioni per l'uso<br>Luca Lussardi . . . . .      | 43 |
| <b>215.</b> Socrate, Platone e ... il Problem Solving<br>Alfio Grasso . . . . .                    | 52 |
| <b>216.</b> Il triangolo di Tartaglia e altre disposizioni numeriche<br>Stefano Borgogni . . . . . | 56 |
| <b>217.</b> Lo scaffale dei libri . . . . .  | 65 |



# 211. Hungarian algorithm: a Short Presentation using Sage

Sebastiano Ferraris  
sebastiano.ferraris@gmail.com

*Dedicated to Federica Narciso,  
to her courageous sweetness in life  
and her tenacious talent in Mathematics.*

The following pages are the result of sincere but disconcerted passion, some hours of spare time and the help of Luca Lussardi, Nicola De Nitti and Giuliano “Nuanda” De Rossi.

This is to be intended as an introduction to the Hungarian Algorithm as well as a set of examples of recursive algorithm in Python. Any contribution, as suggestion, correction or improvement is welcome, so please do not hesitate to leave a comment or send me an email!

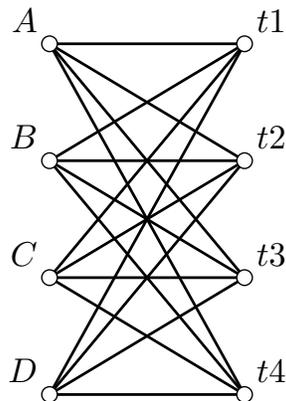
## Introduction

Almost every article about Hungarian starts with the example of worker and tasks. According to the tradition, imagine to be the manager of a manufacturing company and to have to decide the allocation of 4 workers in 4 different workstations. Every worker has different experiences and characteristics and expresses a preference on the station in which he would like to work. The preference is expressed by giving a score from 1 to 20 (where 1 is the job that they prefer and 20 is the job they would like to avoid)

Your scope is to assign workers to tasks by making sure that everyone has a job close to its preference. A way to find a solution to this problem, without comparing manually all the possibilities, is called *Hungarian algorithm*. It was published by Harold Kuhn in 1955, grounded on previous works made by two Hungarian mathematicians, Denes Konig and Jenő Egervary [5]. In a more sophisticated perspective, not presented here, this problem can be seen as a particular application of the Hitchcock algorithm [3].

## Bipartite Matching

A way to represent input data is using dots and connectors. Dots are used to represent both workers (Abigail, Baldwin, Cade, Diane) and tasks ( $t_1, t_2, t_3, t_4$ ). Connectors to represent possible decisions



between workers and tasks. We assign to each connector a value corresponding to the score given by each worker to the connected task: if Abigail gives a score to the task  $t1$  equals to 15, then the value of the connector from  $A$  to  $t1$  will be 15.

Models made by dots and connectors are in general called *graphs*, dots are called *nodes* and connectors are called *edges*. Graph used in this situation are called *bipartite complete graph*. In the first partition we have workers and in the second partition we have tasks [1]. The number associated to each edge is called *weight of the edge*.

In general, given two sets  $A$  and  $B$  with the same number of elements  $n = |A| = |B|$ , for which is defined a *weight function*  $w$ ,

$$w : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

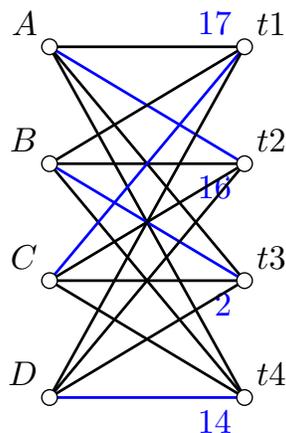
$$(a, b) \longmapsto w(a, b)$$

such that for every couple  $(a, b)$  it associates a positive value, it is always possible to draw a corresponding bipartite complete graph <sup>1</sup>. A subset of edges with no common nodes is called (quite properly) *matching*. A matching in a bipartite complete graph with  $n$  nodes in each partition is *maximal* if you cannot add an edge to the matching while keeping the condition of not having common nodes for each edge. To each maximal matching corresponds a possible assignment workers-tasks.

In the figure below the maximal matching is highlighted in blue with the weight of the choose arch. Abigail is assigned to the job  $t2$  (score 16), Baldwin to the  $t3$  (score 2), Cade to the  $t1$  (score 17) and Diane to  $t4$  (score 14). The *weight of the matching* is the sum of the weights of the edges involved (in this case it is 49). Our aim is to find the maximal matching with minimal weight, i.e. to solve the so called *matching problem*.

---

<sup>1</sup>You may have to take your time to unpack this sentence. If  $X$  is a set, the number of its elements is written as  $|X|$  and it is called cardinality of  $X$ .  $A \times B$  is the cartesian product of the set  $A$  times the set  $B$  and it is the domain of the function  $w$ . The range of the function is the set of positive real numbers  $\mathbb{R}_+$ , the arrow  $\mapsto$  means that the element  $(a, b)$  of the domain is mapped into  $w(a, b)$ .



## Cost Matrix

The representation of data with bipartite graph could be enough to reach the solution with a straight strategy, involving a device called *augmenting path*<sup>2</sup>. In the solution to the matching problem that is presented here, the bipartite graph is not enough, and a second tool is necessary: the *cost matrix*. Consider the set of employees as a vector in alphabetical order  $\mathbf{e} = (A, B, C, D)$  and the vector of tasks ordered as  $\mathbf{t} = (t1, t2, t3, t4)$ ; the *cost matrix* is defined as follows

$$M[i, j] = w(\mathbf{e}[i], \mathbf{t}[j])$$

Where  $w(\mathbf{e}[i], \mathbf{t}[j])$  is the score that the worker  $\mathbf{e}[i]$  gives to  $\mathbf{t}[j]$ .

In our leading example we will consider:

$$M = \begin{pmatrix} 15 & 16 & 19 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 6 \\ 17 & 3 & 5 & 12 \\ 13 & 6 & 16 & 14 \end{pmatrix} \quad (1)$$

At the position  $[1, 0]$  of  $M$  we find<sup>3</sup> the score of Baldwin for the job  $t1$ , which is equal to 6. A set of  $n$  of elements of the cost matrix, such that none of them are on the same row or in the same vector corresponds to a matching. The association presented in the above figure can be represented in the cost matrix with bold numbers:

$$M = \begin{pmatrix} 15 & \mathbf{16} & 19 & 4 \\ 6 & 1 & \mathbf{2} & 6 \\ \mathbf{17} & 3 & 5 & 12 \\ 13 & 6 & 16 & \mathbf{14} \end{pmatrix}$$

<sup>2</sup>This way is well presented in [6].

<sup>3</sup>According to Python language, indexes start from zero:  $M[1, 0]$  is the element in the second row and in the first column of  $M$ .

It is easy to see that the set of the feasible solutions, i.e. the possible associations, has  $4!$  elements (4 possible on the first row, 3 on the second, 2 on the third). Each feasible solution can be represented in the most economical way with a vector  $\mathbf{s}$  of dimension 4, such that in the first position we find the index of the column of the choose element in the first row of  $M$ . In the second position, the index of the column of the element in the second row of  $M$  and so on. In the previous case the vector corresponding to the matching is:

$$\mathbf{s} = (1, 2, 0, 3)$$

The *space of the feasible solution*  $\mathcal{F}$  is the set of the vectors of dimension 4 containing numbers in the set  $\{0, 1, 2, 3\}$  with no repetitions.

The *cost* of a vector  $\mathbf{s}$  in  $\mathcal{F}$  is defined as

$$w(\mathbf{s}) = \sum_{i=0}^3 M[i, \mathbf{s}[i]]$$

and it corresponds to the weight of the matching.

The solution we are searching for is a vector in the set  $\mathcal{F}$  with minimal cost (it is called *solution vector* and it may be not unique). Since  $\mathcal{F}$  has  $n!$  elements, it is inconvenient to employ a brute force algorithm to find it.

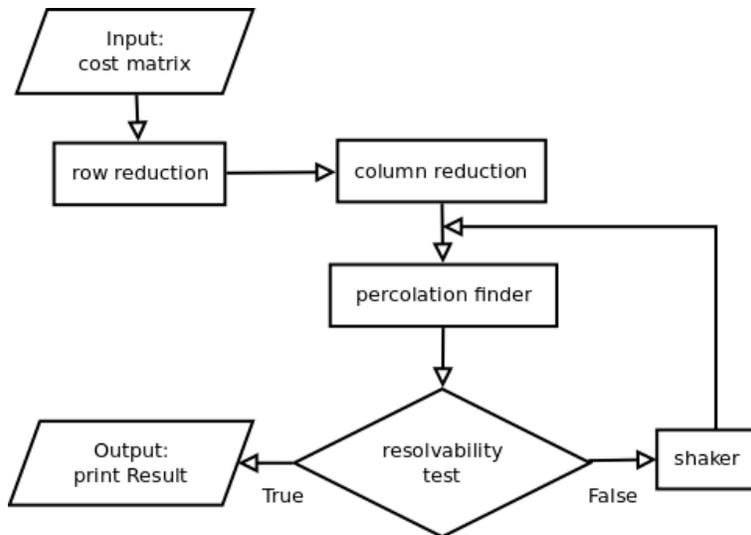


Figure 1: Hungarian Algorithm Flowchart

## Step by Step Algorithm

We propose a version of the algorithm which uses 4 main functions (*row reduction*, *column reduction*, *percolation finder*, *shaker*, *resolvability test*), and 2 auxiliary function (*covering segments searcher*

and *redundance filter*). The *input* of the algorithm is the cost matrix  $M$  (it contains all information we need to solve the problem) and the *output* is the solution vector. In the following subsections each step is presented separately with Sage implementation and examples.

## Step 1: Row Reduction

The step 1 consists of the application of a function which finds the minimal element to each row and subtract it to all the elements of the row.

**Input:** cost matrix  $M$ .

**Output:**  $M$  modified: for each row the minimal element is subtracted to each element of the row.

```
def row_reduction(M):  
    '''  
    row_reduction(M) \n  
    step 1: row reduction  
    '''  
    S = copy(M)  
    for i in range(S.nrows()):  
        min_row = min([S[i,j] for j in range(S.ncols())])  
        for j in range(S.ncols()):  
            S[i,j] = S[i,j] - min_row  
    return S
```

The matrix 1 is introduced in Sage as follows:

```
M = matrix([[15,16,19,4],[6,1,2,6],[17,3,5,12],[13,6,16,14]]); M
```

$$\begin{pmatrix} 15 & 16 & 19 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 6 \\ 17 & 3 & 5 & 12 \\ 13 & 6 & 16 & 14 \end{pmatrix}$$

```
M1 = row_reduction(M); M1
```

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 15 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 5 \\ 14 & 0 & 2 & 9 \\ 7 & 0 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

## Step 2: Column Reduction

Step 2 refers to the columns: for each column it finds the minimal element and subtract it to all of the elements of the column.

**Input:** cost matrix  $M$ .

**Output:**  $M$  modified: for each column the minimal element is subtracted to each element of the column.

```
def col_reduction(M):
    '''
    col_reduction(M) \n
    step 2: column reduction
    '''
    S = copy(M)
    for j in range(S.ncols()):
        min_col = min([S[i,j] for i in range(S.nrows())])
        for i in range(S.nrows()):
            S[i,j] = S[i,j] - min_col
    return S
```

Applying this in our leading example we get:

```
M2 = col_reduction(M1); M2
```

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 9 & 0 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix} \quad (2)$$

The solution vector does not change if we consider  $M$  or  $M$  after having applied row or column reduction:

**Lemma 1** *Let  $\mathbf{s}_1$  and  $\mathbf{s}_2$  two vectors in the space of feasible solutions,  $w$  the weight function defining  $M$  and  $\hat{w}$  the weight function defining  $row\_reduction(M)$ . If  $w(\mathbf{s}_1) \leq w(\mathbf{s}_2)$  then  $\hat{w}(\mathbf{s}_1) \leq \hat{w}(\mathbf{s}_2)$ .*

**Proof:** Let  $m_i$  the min in the  $i$ -th row. Subtract  $m_i$  to the  $i$ -th row is the same as subtract it to each edge with a common node of the first partition in the related bipartite complete graph. If  $w_i$  is the weight function defined by the matrix where we have subtracted the  $m_i$  only in the  $i$ -th row we have  $w_i(\mathbf{s}) = w(\mathbf{s}) - m_i$ .

It follows that  $\hat{w}(\mathbf{s}) = w(\mathbf{s}) - \sum_{i=0}^{n-1} m_i$  for each  $\mathbf{s}$  in the feasible space. □

It can be shown that the lemma is still valid if  $\hat{w}$  is the weight function of  $col\_reduction(M)$ . It follows then:

**Theorem 1** *The solution vector for the matrix  $M$  is the same as for the matrix  $col\_reduction(row\_reduction(M))$  as well as for the matrix  $row\_reduction(col\_reduction(M))$ .*

Note that in general  $col\_reduction(row\_reduction(M)) \neq row\_reduction(col\_reduction(M))$ . Which means that you may not get the same matrix if the order of application of step 1 and step 2 is inverted.

### Step 3: Percolation Finder

After step 1 and 2 we have got a matrix with some zeros (at least one for each row and one for each column). If it is possible to “walk” the matrix from the first row to the last just stepping on zeros and never passing twice on the same column, our walk will be the solution vector we are searching for. For example in the following matrix

$$N = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 15 & 5 & 1 \\ 8 & 14 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

we can see such kind of walk and we can notice that the solution is  $\mathbf{s} = (3, 1, 0, 2)$ . In the matrix (2) a possible the walk through zeros corresponds to the vector  $(3, 2, 1, 1)$  which is not a feasible solution. This rough idea of walk can be formalized under the name of percolation:

**Definition 1** *Given a costs matrix  $M$ , a **percolation** over  $M$  is a subset of  $n$  element of the matrix  $M$ , one and only one for each row. If all the elements of a percolation are zeros, it is called **0-percolation**.*

In general not all the matrices admits 0-percolation, but it easy to prove that every output of step 1 and step 2 admits at least one.

As made in our example we can identify every 0-percolation with a vector  $\mathbf{v} = (j_1, j_2, \dots, j_n)$  of dimension  $n$  made of integer in the set  $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ . With this nomenclature if  $\mathbf{v}[i] = j_i$  then the element  $M[i, j_i]$  belongs to the percolation. For example in the matrix  $N$ , 4 0-percolations are possible:

$$\begin{pmatrix} 6 & 11 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 15 & 5 & 1 \\ 8 & 14 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 11 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 15 & 5 & 1 \\ 8 & 14 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 11 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 15 & 5 & 1 \\ 8 & 14 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 11 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 15 & 5 & 1 \\ 8 & 14 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

We are interested in see how many zeros of the same 0-percolation are in the same column, since the solution we are searching for will be the 0-percolation having 1 zero in each column. Clearly the second 0-percolation in four above listed is the the one we are interested in. In consequence of that we need a mathematical tool that states how far is our percolation from the one that we are searching:

**Definition 2** *Given a 0-percolation  $\mathbf{v}$  over  $M$  of length  $n$ , the index of redundancy of  $\mathbf{v}$  is a real number defined as the maximal number of zeros of the percolation in the same column minus 1, plus the number of column which not posses any element of the percolation divided by the length of the percolation.*

Sometimes a formula can make a definition easier to be understand. This is one of this cases:

$$index\_of\_redundancy(\mathbf{v}) = \max - 1 + \max/n$$

where max is the maximal number of zeros of the percolation in the same column.  
In the previous example we have

|              |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| (2, 1, 0, 2) | (3, 1, 0, 2) | (2, 2, 0, 2) | (3, 2, 0, 2) |
| 1.25         | 0            | 2.5          | 1.25         |

where each index of redundancy is shown under its percolation. Percolations with redundancy index equals to 0 are called here *solution*. Given the percolation  $V$  a function to calculate the redundancy index is

```
def redundance_index(V):  
    n = len(V)  
    occurrence_vector = [V.count(i) for i in range(n)]  
    return max(occurrence_vector) - 1 + occurrence_vector.count(0)*1.0/n
```

where *occurrence vector* at the position  $i$  gives the number of occurrence of the number  $i$  in the vector  $V$ . If  $M$  admits at least one 0-percolation with redundancy index equals to 0, a recursive<sup>4</sup> algorithm to find it could be:

**Input:** cost matrix  $M$

**Output:** True if the matrix admits a 0-percolation with redundancy index equals to 0, False otherwise. In the global variable *ans* is recorded the first 0-percolation found if it exists.

```
ans = []
```

```
def percolation_finder_0(M):  
    '''  
    0-percolation finder  
    '''  
    def find_walk(M, row, sol):  
        global ans  
        for i in range(M.nrows()):  
            if M[row,i] == 0 and i not in sol:  
                sol = sol + [i]  
                ans = sol  
                # print ans  
                if row >= M.nrows() - 1 or find_walk(M, row+1, sol):  
                    return True  
                else:  
                    sol = sol[0:-1]  
        return False  
  
    if find_walk(M, 0, []):  
        return True  
    else:  
        return False
```

---

<sup>4</sup>An introduction to recursive algorithm can be found on [2] as well as on wikipedia.

Uncommenting the line *print ans* it will be possible to see the recursive algorithm at work. Note that to use again this algorithm you must initialize the global variable to the empty list. If the matrix have more than one solution the previous algorithm gives us only the first that he finds. In general the matrix could admit no solution at all. In this case all the 0-percolation have redundancy index grater then 0.

This means that we have identified the following two cases:

1. *row\_reduction(col\_reduction(M))* admits 0-percolation with redundancy index equals to 0.
2. *row\_reduction(col\_reduction(M))* do not admits 0-percolation with redundancy index equals to 0.

and since we do not want to rely too much on luck, we need an algorithm that provides all the 0-percolation and tells if some of them has index of redundancy equals to zero or not. We use again recursion:

**Input:** cost matrix *M*.

**Output:** list of all of the 0-percolation.

```
walks = []

def percolation_finder_1(M):
    '''
    percolation finder vers 1
    '''
    def scout(M, breadcrumbs):
        global walks
        nrows = M.nrows()
        ncols = M.ncols()
        crumbs_number = len(breadcrumbs)
        #print breadcrumbs
        if crumbs_number < ncols:
            for j in range(ncols):
                if M[crumbs_number,j] == 0:
                    scout(M,breadcrumbs + [j])
        elif crumbs_number == ncols:
            walks = walks + [breadcrumbs]

    for j in range(M.ncols()):
        if M[0,j] == 0:
            scout(M,[j])
    return walks
```

As before, uncommenting the line *print breadcrumbs*, we can see recursion at work<sup>5</sup>. You may have noticed that a matrix with a lots of zeros makes the walks list too big to be manageable. Since we

---

<sup>5</sup>You may be not familiar with global and local variables in Python; if so take a look at [7] pag. 310.

are not interested in all the percolation but only in those with minimal redundancy, we propose a way to decide if we may want to stop after having collected “enough” percolations in the vector *walks*:

**Input:** cost matrix  $M$ , false if we do not want to find all the percolation, max number of percolation to be found.

**Output:**  $M$  again, followed by a list build as the list of all percolation followed by the redundance index.

```
def percolation_finder(M, find_all = True, max_percolation = 6):
    '''
    step 3 - percolation finder
    '''
    def redundance_index(V):
        n = len(V)
        occurrence_vector = [V.count(i) for i in range(n)]
        return max(occurrence_vector) - 1 + occurrence_vector.count(0)*1.0/n

    def scout(M, breadcrumbs):
        global walks
        nrows = M.nrows()
        ncols = M.ncols()
        crumbs_number = len(breadcrumbs)
        #print breadcrumbs
        if crumbs_number < ncols:
            col_index_arranged = \
                list(set(range(ncols))-set(breadcrumbs)) + list(set(breadcrumbs))
            for j in col_index_arranged:
                if M[crumbs_number,j] == 0:
                    scout(M, breadcrumbs + [j])
        elif crumbs_number == ncols:
            walks_recorder(breadcrumbs)

    def walks_recorder(V,find_all = True):
        global walks
        ri = redundance_index(V)
        if find_all:
            walks = walks + [V] + [ri]
        elif not find_all:
            if 0 not in walks and len(walks) < max_percolation:
                walks = walks + [V] + [ri]

    for j in range(M.ncols()):
        if M[0,j] == 0:
            scout(M, [j])
```

```
return [M,walks]
```

The function *walks\_recorder* adds to the global variable *walks* each new 0-percolation followed by its redundancy index *ri*. If the variable *find\_all*, in the input value, is set to *False* then the vector *walks* will collect only a number of 0-percolation equals to *max\_percolation*.<sup>6</sup> It does make sense to stop the recursion before all 0-percolation are collected, just because the indexes of the first cycle-for had been rearranged:

```
col_index_arranged = list(set(range(ncols))-set(breadcrumbs)) + list(set(breadcrumbs))  
for j in col_index_arranged:
```

This means that when the algorithm is arrived at the row *crumbs\_number* it searches for a new zero before in columns that are not already been used. For example, if the input matrix is like the following (the best case to find a solution as well as one of the worst case for a recursive algorithm)

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

the first 0-percolation that the algorithm finds is the solution (0, 1, 2, 3). So it makes sense to limit the solution, even thought if the number *max\_percolation* is too little we may lose some multiple solution.

Applying this to our main example (matrix 2) we get:

```
walks  
[[3, 0, 1, 1], 1.25, [3, 1, 1, 1], 2.5, [3, 2, 1, 1], 1.25]
```

## Step 4: Resolvability Test

At this stage we have got the matrix reduced and the list of 0-percolation (complete or not) with related redundancy indexes. After the step 4 we will have the list of 0-percolation with minimal redundancy index, and a flag which states if the 0-percolation (or percolations) founded is already our solution or not.

**Input:** cost matrix *M*, list of 0-percolation, where each 0-percolation is followed by its index of redundancy.

**Output:** *M* again, followed by the list of 0-percolation with minimal index of redundancy, and with a flag, True if the minimal index is 0 and so we have already our solution, False otherwise.

```
def resolvability_test(M,walks):  
    '''  
    step 4: Resolvability Test  
    '''
```

---

<sup>6</sup>Note that this just stop the recording, and do not stops the recursive steps. It is also possible to stop the recursion when the *max\_percolation* is reached. We did not proposed it here for clarity, but it can be considered as an exercise.

```

min_redundance = min(walks)
filtered_walks = \
[walks[i] for i in range(len(walks))[::2] if walks[i+1] == min_redundance]
if min_redundance == 0:
    flag = True
else:
    flag = False
return [M, filtered_walks, flag]
    
```

The instance  $range(len(walks))[::2]$  is the list of the redundancy index in the vector walks (all the odd position in the vector).

Let see how does it work on our main example:

```

walks = []
A,B = percolation_finder(M2); A,B
resolvability_test(A,B)
    
```

$$\left[ \left( \begin{pmatrix} 6 & 12 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 9 & 0 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix} \right), [3, 0, 1, 1], [3, 2, 1, 1], \text{False} \right] \quad (3)$$

When the flag is True the job is done, and we can print the solution. If it is False we must do some manipulation on the matrix in order to add some zeros without change the results. This tricky passage is here the step number 5, called shaker.

## Step 5: Shaker

To perform this passage, first of all we must find the *covering segments* of the input matrix  $M$ . A covering of  $M$  is the minimal set of horizontal or vertical segments that covers all the zeros in the matrix. In [4], it is suggested to actually draw horizontal or vertical lines over the matrix, covering all the zeros such that the number of lines is minimal. For reasons related to the implementation of the algorithm we do not follow that path, even if it is more intuitive (and is therefore strongly recommended as a starting point of view). Instead of using covering segments, we use a couple of vectors called *covered\_col* and *covered\_row*:

**Definition 3** *Let  $M$  be a square matrix with real entries of dimension  $n \times n$ . We define two vectors of dimension  $n$  called *covered\_col* and *covered\_row* with elements in the set  $\{0, 1\}$  such that if  $M[i, j]$  is a zero then or  $covered\_row[i] = 1$  or  $covered\_col[j] = 1$  and the number of 1 in both vectors is minimal.*

*The non-zero elements in the vector *covered\_row* are called horizontal covering segments. The non-zero elements in the vector *covered\_col* are called vertical covering segments.*

For the matrix 2 those vectors are:

$$covered\_row = [0, 1, 0, 0] \quad covered\_col = [0, 1, 0, 1]$$

$$\begin{matrix} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \left( \begin{matrix} 6 & 12 & 14 & 0 \end{matrix} \right) \\ \mathbf{1} & \left( \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 5 \end{matrix} \right) \\ \mathbf{0} & \left( \begin{matrix} 9 & 0 & 1 & 9 \end{matrix} \right) \\ \mathbf{0} & \left( \begin{matrix} 2 & 0 & 9 & 8 \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

The algorithm that we use to find covering segments requires the matrix as well as one 0-percolation with minimal redundancy index. It is called *covering\_segments\_searcher* and will be used as auxiliary function of the shaker:

**Input:** cost matrix  $M$ , one of the 0-percolation with minimal redundancy index.

**Output:** position of horizontal and vertical covering segments.

```
def covering_segments_searcher(M, min_redundance_percolation):
    '''
    step 5, auxiliary function
    '''
    # (A)
    nrows = M.nrows()
    ncols = M.ncols()
    marked_row = [0]*nrows
    marked_col = [0]*ncols
    # (B)
    occurrence_vector = [min_redundance_percolation.count(i) for i in range(nrows)]
    for pos in range(nrows):
        if occurrence_vector[pos] > 1:
            duplicates_pos = \
                [k for k in range(nrows) if min_redundance_percolation[k] == pos][1:]
            for j in duplicates_pos:
                marked_row[j] = 1
    # (C)
    flag_mark = 1
    while flag_mark != 0 :
        flag_mark = 0
        # (C-1)
        for i in range(nrows):
            if marked_row[i] == 1:
                for j in range(ncols):
                    if M[i,j] == 0 and marked_col[j] != 1:
                        marked_col[j] = 1
                        flag_mark = flag_mark + 1
        # (C-2)
        for j in range(ncols):
            if marked_col[j] == 1:
                for i in range(nrows):
```

```

        if M[i,j] == 0 and marked_row[i] != 1
        and min_redundance_percolation[i] == j:
            marked_row[i] = 1
            flag_mark = flag_mark + 1

# (D)
covered_row = [(i+1)%2 for i in marked_row]
covered_col = marked_col

return (covered_row, covered_col)

```

It performs the following tasks:

- (A) Initialize `marked_row` and `marked_col` as zero vectors. If we want to mark a the row  $i$  or a column  $j$  we substitute a 1 at the  $i$  position of `marked_row` or at the  $j$  position of `marked_col`.
- (B) Mark all the row that possess a zero that makes the input 0-percolation redundant (i.e. if  $(M)_{h,j}$  and  $(M)_{k,j}$  are zeros in the same column we mark the row  $k$ ). The vector `duplicates_pos` gives the position of all the duplicate zeros in the same columns.
- (C-1) Mark all the column having a zero in the row marked in the previous step.
- (C-2) Mark all the row having zeros in marked cols, only if those zeros are in the 0-percolation with minimal redundance (so if their cols are in the `min_redundant_percolation` vector).
- (C) Perform (C-1) and (C-2) in sequence until it is possible to mark new positions.
- (D) Vertical covering segments are the segments marked in previous step in the column, whereas horizontal covering segments are all the unmarked row.

It can be proved that `covering_segments_searcher` finds the covering segments for the input matrix. Moreover the number of covering segments is always equals or less than the dimension of the matrix. In case of it is equals to its dimension, the vector `min_redundant_percolation` has redundancy index equals to 0. The concept of covering segments leads us to the crucial definition of *uncovered*, *covered* and *bi-covered* elements in the matrix  $M$ .

**Definition 4** Let  $M$  be a square matrix with real entries of dimension  $n \times n$  considered with `covered_col` and `covered_row` vectors.

If at the element  $M[i, j]$  corresponds `covered_row[i] = 0` and `covered_col[j] = 0` then the element  $M[i, j]$  is called *uncovered* (and certainly is not a zero).

If only one between `covered_row[i]` and `covered_col[j]` is equals to zero then the element  $M[i, j]$  is called *covered*.

If both `covered_row[i]` and `covered_col[j]` are equals to 1 then the element  $M[i, j]$  is called *bi-covered*. The total number of non-zero entries in `covered_col` and `covered_row` is called *covering number*<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup>It can be defined a discrete monotonous function  $g$ , such that  $(\text{covering number}) + g(\text{redundancy index}) = n$ .

Now we have all that we need to "shake" our matrix, which means perform what the following theorem states:

**Theorem 2** *Let  $M$  be a matrix considered with `covered_col` and `covered_row` vectors and with a solution vector  $\mathbf{s}$  (element of the space of feasible solution that minimize the cost of the association). Let  $m$  be the minimal element of the set of the uncovered elements. If  $m$  is subtracted to all the uncovered elements and  $2m$  is added to all the bi-covered elements, the new matrix obtained in this way still admits  $\mathbf{s}$  as solution vector.*

The matrix that results applying the previous theorem is called here *shaked matrix*. Our shaker algorithm is as follows:

**Input:** cost matrix  $M$ , set of walks with minimal redundance index.

**Output:** shaked matrix of  $M$ .

- (A) Uses auxiliary function to find the covering segments
- (B) Finds  $m$  the minimal uncovered element value.
- (C)  $m$  is subtracted to every uncovered element and  $2m$  is added to each bicovered element.

```
def shaker(M, filtered_walks):
    '''
    step 5 - shaker
    '''
    nrows = M.nrows()
    ncols = M.ncols()
    min_redundance_percolation = filtered_walks[0]
    # (1)
    [cov_row, cov_col] = covering_segments_searcher(M, min_redundance_percolation)
    # (2)
    zeropos_in_cov_row = [i for i in range(nrows) if cov_row[i] == 0]
    zeropos_in_cov_col = [j for j in range(ncols) if cov_col[j] == 0]
    m = min([M[i,j] for i in zeropos_in_cov_row for j in zeropos_in_cov_col])
    # (3)
    for i in range(nrows) :
        for j in range(ncols):
            if cov_row[i] == 0 == cov_col[j]:
                M[i,j] = M[i,j] - m
            elif cov_row[i] == 1 == cov_col[j]:
                M[i,j] = M[i,j] + 2*m
    return M
```

According to the flow diagram of figure 1, this step is performed after percolation finder and resolvability test until the resolvability test is not passed.

For the main example we have

```
walks = []
A,B = percolation_finder(M2); A,B
N = shaker(A,B); N
```

$$N = \begin{pmatrix} 6 & 14 & 14 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Which admits a 0-percolation with redundancy index equals to 0 (it is our solution!). Applying again percolation finder and resolvability test we get

```
S = percolation_finder(N);
T = resolvability_test(S[0],S[1]); T
```

$$\left[ \begin{pmatrix} 6 & 14 & 14 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}, [[3, 0, 2, 1]], \text{True} \right] \quad (5)$$

An so the solution to the main problem (that is the association of workers to different tasks that maximizes satisfaction and productivity) is  $[3, 0, 2, 1]$ .

### Why does it work?

In this section we want to answer the following questions:

1. Why does the solution vector remain unchanged after the shaker is applied to  $M$ ?
2. Why does the shaker take us away from trouble in a finite number of steps?

The answer to the first question consists is the proof of theorem 2. We approach the proof via some lemmas:

**Lemma 2** *Given a cost matrix  $M$  of dimension  $n \times n$ , if  $p$  is a percolation with redundancy index equals to 0, it is uniquely defined by a bijection  $\sigma$  between the set of indexes  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ .*

**Proof:** A percolation  $\mathbf{p} = (j_0, j_1, \dots, j_{n-1})$  with redundancy index equals to 0 is an vector that associate to each position (row in the corresponding matrix) one and only one integer number between 0 and  $n - 1$  (column in the corresponding matrix) without repetitions:

$$(j_0, j_1, \dots, j_{n-1}) \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ j_0 & j_1 & j_2 & \dots & j_{n-1} \end{pmatrix} = \sigma$$

Each percolation with redundancy index equals to 0 can be represented by the set of elements of the matrix  $\{M[i, \sigma(i)]\}_{i=0}^{n-1}$ . □

**Lemma 3** *Let  $M$  be a cost matrix of dimension  $n \times n$  and  $covering\_row$  and  $covering\_col$  having  $n - 1$  non-zero elements (covering segments are  $n-1$ ), and let  $\sigma$  a bijection of  $n$  elements. It must always exists an integer  $a \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  such that  $M[a, \sigma(a)]$  is uncovered. Moreover if for some  $k$ ,  $M[k, \sigma(k)]$  is a bi-covered element then it must exists  $b$  and  $c$  such that  $M[b, \sigma(b)]$  and  $M[c, \sigma(c)]$  are uncovered.*

**Proof:** Such  $k$  do not always exists: all covering segments can be parallel. In this case either  $covering\_row$  has only one zero and  $covering\_col$  is all made by zeros or  $covering\_col$  has only one zero and  $covering\_row$  is all made by zeros. If we consider  $covering\_row$  with only one zero at the position  $t$  then our uncovered element will be  $M[t, \sigma(t)]$  and so we have proved the first part of the thesis for  $a = t$ .

Let  $M[k, \sigma(k)]$  a bi-covered element, then we must have at least one non-zero element in  $covering\_col$  in the position  $k$  and at least two zeros in the vector  $covering\_col$ , in the position  $a \neq k$  and  $b \neq k$  (or vice versa one non-zero element in  $covering\_col$  in the position  $\sigma^{-1}(k)$  and at least two zeros in the vector  $covering\_row$ ).

If the percolation defined by  $\sigma$ , passes trough the bi-covered element (and therefore through  $M[k, \sigma(k)]$ ), when it passes through the rows of  $M$ , indicated with  $a$  and  $b$ , it will necessarily encounter two uncovered elements, since  $\sigma(a) \neq \sigma(k)$  and  $\sigma(b) \neq \sigma(k)$ . □

As a consequence of the previous lemma we have:

**Lemma 4** *Let  $\mathbf{s}_1$  and  $\mathbf{s}_2$  be two vector in the space of the feasible solution,  $w$  the weight function of  $M$  and  $\hat{w}$  the weight function defined by the shaked matrix of  $M$ . If  $w(\mathbf{s}_1) \leq w(\mathbf{s}_2)$  then  $\hat{w}(\mathbf{s}_1) \leq \hat{w}(\mathbf{s}_2)$ .*

And now, considering the fact that The thesis of theorem 2 is equivalent to the lemma 4, theorem 2 has been proved.

The answer to the second questions is a consequence of the following results:

**Lemma 5** *Let  $M[i, j] = 0$  a bi-covered element in the cost matrix  $M$ . It follows that*

$$\begin{aligned} z\_cols[j] &> 1 \\ z\_rows[i] &> 1 \end{aligned}$$

where  $z\_cols[j]$  is the number of zeros in the col  $j$  of  $M$  and  $z\_rows[i]$  is the number of zeros in the row  $i$ .

**Proof:** By contradiction, if  $z\_rows[i] = 1$ , there is only one zero on the  $i$ -th row. This must be  $M[i, j]$ , but it is already covered by the covering segment  $z\_cols[j]$ . According to the minimality of the covering segments we should have  $z\_rows[i] = 0$  and  $M[i, j] = 0$  should not be a bi-covered element. □

Every time step 4 is performed, we add a zero to the set of the uncovered elements, and we remove (in the worst case) a number of zero equals to the number of bi-covered elements. However according to the previous lemma this step do not reduces the non-zero element on the vectors  $z\_rows$  and  $z\_cols$ .

Since after step 1 and step 2 we have at least  $n + 1$  non-zero elements in both  $z\_rows$  and  $z\_cols$ , after a finite number of application of the steps 4, in the worst case given by

$$\sum_{i|z\_rows[i]>1} z\_rows[i] + \sum_{j|z\_cols[j]>1} z\_cols[j] + n - 1$$

all the zeros in vectors  $z\_rows$  and  $z\_cols$  we will be eliminated .

If there is no more zeros means that for each row and col we can always find a percolation with redundancy index equals to 0 and so we can be sure that step\_4 take us away from trouble in a finite number of steps.

## Hungarian Algorithm

Now it is possible to join all the previous steps in one single function, according to the flowchart presented at the beginning of the section.

```
def hungarian(M, find_all = True, max_percolation = 6):
    '''
    Hungarian Algorithm
    '''
    global walks
    walks = []
    cont = 0
    max_loop = max(M.nrows(), M.ncols())
    S = row_reduction(col_reduction(M))
    [S, walks] = percolation_finder(S, find_all, max_percolation)
    [S, filtered_walks, flag] = resolvability_test(S, walks)
    while flag == False and cont < max_loop:
        S = shaker(S, filtered_walks)
        walks = []
        [S, walks] = percolation_finder(S, find_all, max_percolation)
        [S, filtered_walks, flag] = resolvability_test(S, walks)
        cont = cont + 1
    walks = []
    return filtered_walks
```

## Conclusion

A tool for finding the solution vector of any square matrix has been presented. Saving all functions here presented in a single one .py file we can load into Sage with command *load* and reload in the same session (if some modifications has happened) with the command *attach*:

```
load('/home/paht_to_file/filename.py')
attach('/home/paht_to_file/filename.py')
```

We can test it on a random matrix  $A$

```
A = random_matrix(ZZ, 10, x = 0, y = 30); A
```

$$\begin{pmatrix} 18 & 3 & 39 & 27 & 2 & 4 & 34 & 8 & 0 & 5 \\ 11 & 0 & 11 & 17 & 23 & 25 & 32 & 22 & 14 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 12 & 16 & 12 & 0 & 11 & 14 & 1 \\ 8 & 28 & 10 & 0 & 24 & 0 & 19 & 3 & 17 & 18 \\ 16 & 17 & 36 & 0 & 0 & 26 & 32 & 5 & 3 & 20 \\ 7 & 11 & 11 & 7 & 21 & 4 & 0 & 18 & 8 & 13 \\ 23 & 14 & 26 & 8 & 2 & 15 & 26 & 0 & 24 & 10 \\ 11 & 3 & 12 & 0 & 25 & 0 & 24 & 0 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 & 5 & 12 & 22 & 10 & 13 & 10 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 0 & 23 & 25 & 17 & 15 & 14 \end{pmatrix}$$

```
s = hungarian(A); s
```

$$[[8, 9, 0, 3, 4, 6, 7, 5, 2, 1], [8, 9, 0, 5, 4, 6, 7, 3, 2, 1]]$$

If there are more employees than workstations, we can still use the Hungarian algorithm, adding dummy nodes to the second partition of the biparted complete graph. Each worker will give them a score from 1 to 20. 1 if they wish to find new job and be moved to another department or workplace; 20 if they prefer not to be moved.

Coming back to our leading example, we suppose that  $t4$  = “be move to another department“and the workers  $(A, B, C, D)$  are very loyal to their place so they give all a score equals to 20 for the node  $t4$ . The cost matrix will be:

$$M = \begin{pmatrix} 15 & 16 & 19 & 20 \\ 6 & 1 & 2 & 20 \\ 17 & 3 & 5 & 20 \\ 13 & 6 & 16 & 20 \end{pmatrix} \quad (6)$$

The solution is to move Abigail since

```
s = hungarian(M); s
```

$$[3, 0, 2, 1]$$

## References

- [1] J.A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*, Elsevier Science Publishing, 1982.
- [2] R. Sedgewick, P. Flajolet, *An introduction to Analysis of Algorithm*, Pearson, 1996.
- [3] C. Papadimitriou, K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization*, Drower Books, 1998.
- [4] <http://www.hungarianalgorithm.com/>
- [5] [http://en.wikipedia.org/wiki/Hungarian\\_algorithm](http://en.wikipedia.org/wiki/Hungarian_algorithm)
- [6] Mordecai J. Golin, *Bipartite Matching and the Hungarian Method*, Course Notes, Hong Kong University of Science and Technology.
- [7] Mark Lutz, *Programming Python*, 3rd edition, O'Reilly And Associates 2007.

## 212. Atmosfera standard

di Michele T. Mazzucato

*Noi viviamo sommersi  
nel fondo di un pelago d'aria elementare  
la quale per esperienze indubitare si sa che pesa.*

Evangelista Torricelli (1608-1647)  
in una lettera dell'11 giugno 1644  
diretta a Michelangelo Ricci (1619-1682)

L'atmosfera è lo strato gassoso che circonda la Terra. Paragonando il nostro pianeta ad una sfera con diametro di un metro, il suo spessore ammonterebbe a soli 2 millimetri.

L'attuale struttura schematica dell'atmosfera terrestre comprende cinque sistemi di divisione la cui nomenclatura è stata raccomandata dall'*International Union of Geodesy and Geophysics* IUGG nel 1959. Considerando che i limiti altitudinali delle divisioni hanno carattere puramente indicativo in quanto il passaggio da una regione all'altra non avviene in maniera netta e uniforme ma viene influenzata da molteplici fattori dinamici, si ha:

### 1) Una divisione secondo l'andamento verticale della temperatura:

- troposfera (0- 8 km ai poli), (0-11 km alle medie latitudini), (0-18 km all'equatore), (tropopausa)
- stratosfera (< 40 km), (stratopausa) (caratterizzata da un massimo contenuto di ozono atmosferico)
- mesosfera (40-80 km), (mesopausa)
- termosfera (> 80 km; regione nella quale si verificano le aurore)

### 2) Una divisione secondo la composizione chimica

- omosfera (comprende anche l'ozonosfera 10-50 km), (omopausa)
- eterosfera

### 3) una divisione secondo il grado di ionizzazione

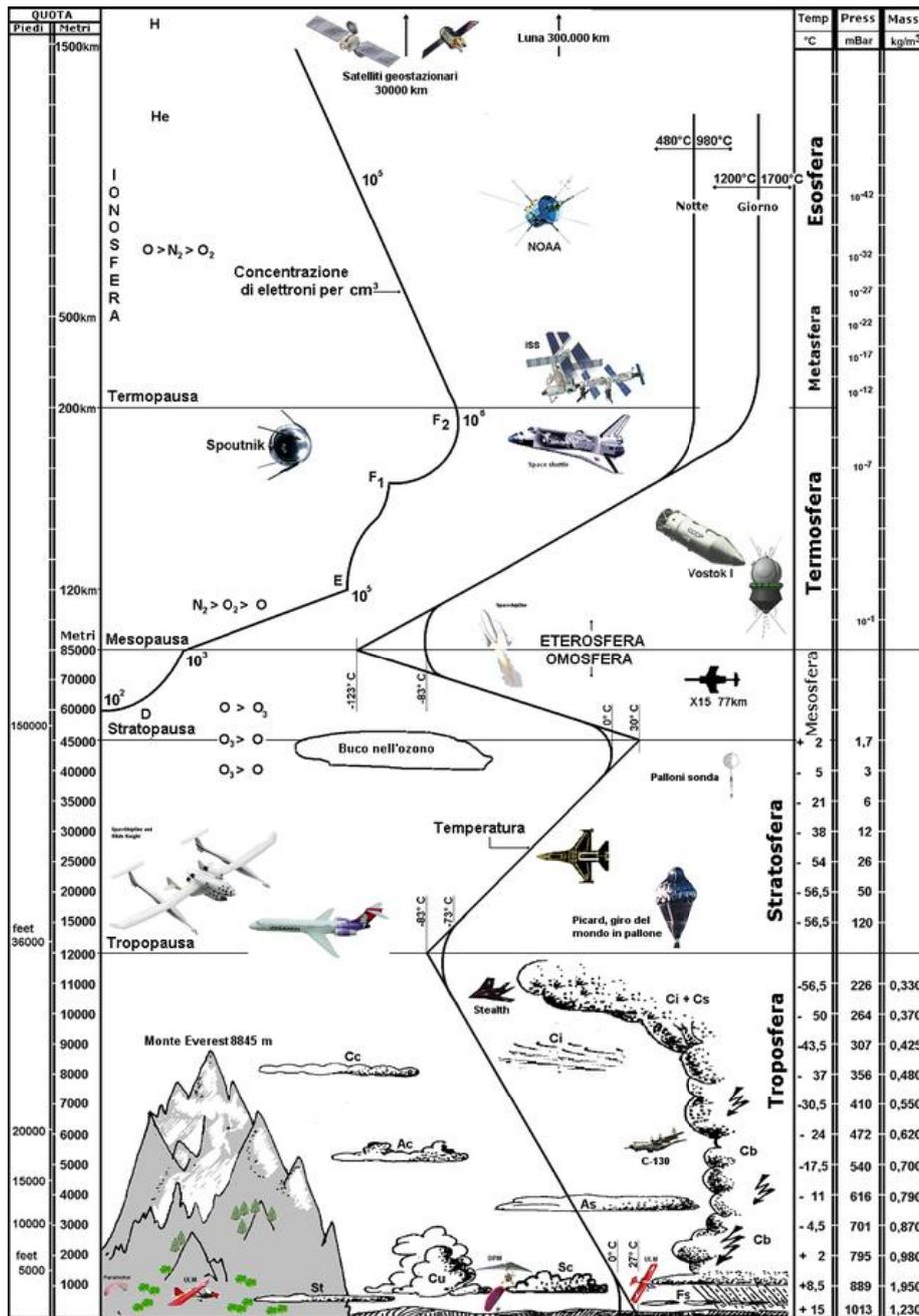
- ionosfera (> 70-80 km)
- strato D (~ 60 ÷ 100 km; diurno)
- strato E (o di Kennelly-Heaviside-Nagaoka)
- strato E1 (~ 100 ÷ 120 km; persiste giorno e notte)
- strato E2 (~ 120 ÷ 160 km; solo occasionalmente)
- strato F (o regione di Appleton)
- strato F1 (~ 160 ÷ 250 km; diurno)
- strato F2 (~ 250 ÷ 500 km; persiste giorno e notte)

### 4) una divisione secondo la reattività chimica (essenzialmente fotochimica)

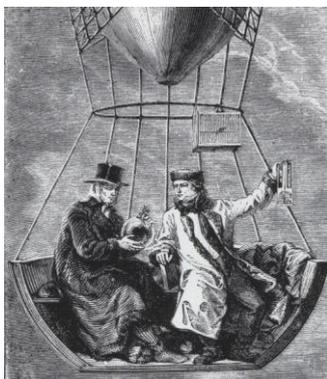
- chemosfera (> 20 km e < 110 km)

### 5) una divisione secondo la fuga delle molecole d'aria

- esosfera



[http://it.wikipedia.org/wiki/Atmosfera#mediaviewer/File:Atmosfeer\\_Atmosfera\\_-\\_Italiano.png](http://it.wikipedia.org/wiki/Atmosfera#mediaviewer/File:Atmosfeer_Atmosfera_-_Italiano.png)



Ascensione aerostatica di Joseph Louis Gay-Lussac (1778-1850), che sta prendendo un campione d'aria e Jean Baptiste Biot (1774-1862), che sta misurando la temperatura, nei cieli parigini nell'agosto del 1804.

L'atmosfera tipo, indicata anche come internazionale o standard, fu definita il 23 giugno 1950 dall'*International Civil Aviation Organization* ICAO, un ente istituito nel 1947 con sede permanente a Montreal in Canada. Tale atmosfera è un gas secco e perfetto le cui caratteristiche fisiche sono riportate nella **Tab. 1** i cui valori sono utilizzati nei calcoli.

|   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| pressione ( $P_0$ )   | 1013.25 mbar                        |
| temperatura ( $T_0$ )   | 15 °C                               |
| umidità (trascurabile)  | 60%                                 |
| indice di rifrazione assoluto   | 1.000290                            |
| raggio di curvatura della traiettoria descritta dalla radiazione luminosa $R_0$   | $\sim 7 \cdot R_t$                  |
| doppio del coefficiente medio di rifrazione $K_R$   | $\sim 0.15$                         |
| raggio equivalente $R_e$  | $\sim 7/6 \cdot R_t$                |
| gradiente termico verticale nella troposfera (dal lmm a 11000 metri geopotenziali, alla quale la temperatura diventa - 56.5 °C) | - 0.0065 °C                         |
| densità (a 0 °C e 760 mmHg = 1.29276 kg/m <sup>3</sup> = $D_0$ )  | 1.2250 kg/m <sup>3</sup>            |
| peso molecolare medio calcolato   | 28.96                               |
| costante dielettrica relativa ( $n^2$ )   | 1.00059                             |
| indice di rifrazione (riga gialla del sodio a 20 °C) ( $n$ )  | 1.0002926                           |
| temperatura critica   | - 140.6 °C                          |
| pressione critica   | 38.5 atm                            |
| densità critica   | $0.35 \cdot 10^3$ kg/m <sup>3</sup> |
| calore specifico medio a pressione costante ( $C_p$ )   | 0.2389 kcal/kg °C                   |
| calore specifico medio a volume costante ( $C_v$ )  | 0.1702 kcal/kg °C                   |
| conducibilità termica (a 0 °C e 760 mmHg) ( $kt$ )  | 0.0205 kcal/m h °C                  |
| velocità del suono nell'aria (a 0 °C e 760 mmHg) ( $V_s$ )  | 331.69 m/s                          |

**Tab. 1** – Caratteristiche fisiche dell'atmosfera standard al livello medio del mare

I valori  $C_p$ ,  $C_v$  e  $kt$  variano con la temperatura  $t$  secondo le formule:

$$C_p = 0.241 + 0.0000366 \cdot t \quad C_v = 0.172 + 0.0000366 \cdot t \quad kt = 0.0205 \cdot (1 + 0.00242 \cdot t) \quad \text{kcal/kg } ^\circ\text{C}$$

mentre la velocità del suono può essere calcolata con la seguente relazione:

$$V_s = (\alpha \cdot P_{\text{quota}} / D_{\text{quota}})^{0.5} \quad \text{m/s}$$

dove  $\alpha$  è il rapporto  $C_p/C_v$  che, per  $t = 0$  °C e  $P = 760$  mmHg, vale 1.4036.

| altitudine<br>m | temperatura<br>°C | pressione<br>mbar | densità<br>kg/m <sup>3</sup> |
|-----------------|-------------------|-------------------|------------------------------|
| 0               | 15.00             | 1013.25           | 1.2250                       |
| 500             | 11.75             | 954.61            | 1.1673                       |
| 1000            | 8.50              | 898.75            | 1.1116                       |
| 2000            | 2.00              | 794.95            | 1.0065                       |
| 3000            | -4.50             | 701.09            | 0.9091                       |
| 4000            | -11.00            | 616.40            | 0.8191                       |
| 5000            | -17.50            | 540.20            | 0.7361                       |
| 6000            | -24.00            | 471.81            | 0.6597                       |
| 7000            | -30.50            | 410.61            | 0.5895                       |
| 8000            | -37.00            | 356.00            | 0.5252                       |
| 9000            | -43.50            | 307.42            | 0.4664                       |
| 10000           | -50.00            | 264.36            | 0.4127                       |
| 11000           | -56.50            | 226.32            | 0.3639                       |
| 13000           | -56.50            | 165.10            | 0.2655                       |
| 15000           | -56.50            | 120.45            | 0.1937                       |
| 20000           | -56.50            | 54.75             | 0.0880                       |
| 30000           | -56.50            | 11.31             | 0.0132                       |

Tab. 2 – Alcuni valori dell'atmosfera standard (modello ICAO)

I valori della temperatura, pressione e densità alle varie quote si possono determinare con le seguenti relazioni:

$$\text{temperatura} = 15 - 0.0065 \cdot \text{Quota} \quad ^\circ\text{C}$$

pressione nella troposfera (da 0 m a 11000 m)

$$\text{pressione} = 1013.25 \cdot [1 - (0.0065 \cdot \text{Quota} / 288.15)]^{5.25588} \quad \text{mbar}$$

pressione nella stratosfera (da 11000 m a 32000 m)

$$\lg \text{pressione} = \lg 226.3204 - B \cdot (\text{Quota} - 11000) \quad \text{mbar}$$

dove  $B = 6.848317 \cdot 10^{-5}$  al metro geopotenziale, 226.3204 è la pressione in millibar alla tropopausa e  $\lg$  sono i logaritmi decimali

$$\text{densità} = D_0 \cdot (P_{\text{quota}}/760) \cdot [1/(1+\beta \cdot t)] \quad \text{kg/m}^3$$

dove  $\beta$  è il coefficiente di dilatazione o d'espansione termica dei gas perfetti il cui valore è 0.003661.

Da considerare che la pressione atmosferica è soggetta a una variazione diurna (marea atmosferica) avente un carattere di marcata regolarità. Essa presenta un innalzamento dalle ore 4 alle ore 10, discende dalle ore 10 alle ore 16 e risale fino alle ore 22 per poi tornare a discendere fino alle ore 4. Tale regolarità, che è grandissima nelle regioni tropicali, è meno sentita nelle nostre e le variazioni sono qui meno accentuate ( $\pm 3 \div 4$  nelle regioni tropicali e  $\pm 1 \div 2$  nelle nostre). A quote elevate la variazione diurna diviene irregolare e non può formare alcuna norma. Alcuni fattori di conversione per la pressione sono:

$$1 \text{ Pa (Pascal)} = 1013.25 \text{ mbar}$$

$$1 \text{ atm (atmosfera)} = 101325 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$$

$$1 \text{ mbar (millibar)} = 0.750062 \text{ mmHg} = 100 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ mmHg (millimetri di Mercurio)} = 1.333224 \text{ mbar} = 1 \text{ atm} = 133.3224 \text{ Pa}$$

|                    |               |
|--------------------|---------------|
| azoto              | 78.08 %       |
| ossigeno           | 20.95 %       |
| argon              | 0.93 %        |
| anidride carbonica | 0.035 %       |
| neon               | 0.001 818 %   |
| elio               | 0.000 524 %   |
| metano             | 0.000 200 %   |
| kripton            | 0.000 114 %   |
| idrogeno           | 0.000 050 %   |
| xenon              | 0.000 008 7 % |
| ossido nitroso     | tracce        |
| radon              | tracce        |
| anidride solforosa | tracce        |
| ossido di carbonio | tracce        |

**Tab. 3** – Composizione percentuale media volumetrica dell'aria secca



Evangelista Torricelli (1608-1647) inventore del barometro.



Léon Teisserenc de Bort (1855-1913) introdusse l'uso dei palloni sonda.



Vilhelm Bjerknes (1862-1951) fu il primo meteorologo ad applicare all'atmosfera le leggi della fisica.

Dall'esperienza del fisico italiano Evangelista Torricelli (1608-1647) che portò all'invenzione, nel 1643, del primo barometro, il matematico francese Blaise Pascal (1623-1662), nel 1648, dimostrò praticamente che l'atmosfera poteva avere soltanto un'altitudine finita. In seguito ai risultati ottenuti dalla lettura dei valori registrati dagli strumenti trasportati sui palloni meteorologici, il francese Léon Philippe Teisserenc de Bort (1855-1913), nel 1902, suggerì una divisione in due parti dell'atmosfera, una al di sotto dei 15 chilometri, dove la temperatura diminuiva bruscamente e, l'altra, al di sopra, dove la stessa rimaneva costante. Le due parti vennero denominate rispettivamente troposfera (sfera del cambiamento) e stratosfera (in quanto, secondo Teisserenc de Bort, la temperatura costante indicava che i gas erano disposti in strati indisturbati). Sul limite di tali regioni vi sono diverse fasce di venti che soffiano da ovest a est, individuate dai piloti giapponesi e americani durante la Seconda Guerra

Mondiale, queste vennero chiamate correnti a getto (i cui venti possono raggiungere quasi i 500 chilometri orari) e studiate dal fisico statunitense di origine svedese Carl Gustav Arvid Rossby (1898-1957). Nel 1902, indipendentemente l'uno dall'altro, lo statunitense Arthur Edwin Kennelly (1861-1939), l'inglese Oliver Heaviside (1850-1925) e il giapponese Hantaro Nagaoka (1865-1950) avevano previsto l'esistenza di regioni nell'alta atmosfera che contenessero ioni carichi e che riflettessero le radioonde, ma solo nel 1925, il fisico inglese Edward Victor Appleton (1892-1965), scoprì che tale strato, di seguito chiamato strato E, si trovava a una altezza di 80 chilometri nonché della presenza di altri strati, successivamente denominati F1 e F2. Fu nel 1913 che il fisico francese Charles Fabry (1867-1945) riuscì a dimostrare la presenza di significative quantità di ozono, scoperto nel 1840 dal chimico tedesco Christian Friedrich Schönbein (1799-1868), in quella parte superiore dell'atmosfera oggi denominata ozonofera. Nel 1920, il fisico jugoslavo Milutin Milankovic (1879-1958) suggerì che fossero coinvolti anche fattori di tipo astronomico, quali le lente oscillazioni nell'eccentricità dell'orbita terrestre e nell'inclinazione dell'asse della Terra nonché alla precessione di tale asse, a influire sul tempo atmosferico formando dei cicli climatici.

**Per saperne di più**

AA.VV., *Manuale di meteorologia*, Alpha Test, Milano 2010

Abate, S., *Lezioni di meteorologia generale*, Liguori, Napoli 1986

Calculator 1976 Standard Atmosphere Properties [www.luizmonteiro.com/StdAtm.aspx](http://www.luizmonteiro.com/StdAtm.aspx)

## 213. Le spirali di Archimede in 2D e 3D

Rosa Marincola  
rosamarincola@virgilio.it

### Sunto

Questo lavoro è stato realizzato in un laboratorio del Piano Lauree con una classe del II biennio superiore Sistemi Informativi Aziendali dell'IIS "A. Guarasci" di Rogliano (Cs) sez. Tecnico Economico e riguarda un percorso interdisciplinare di matematica e informatica sulla vita e l'opera di Archimede. L'obiettivo è stato quello di ampliare le conoscenze e le competenze del corso di studi tecnico economico dove, in base alle indicazioni ministeriali, non è prevista la trattazione di elementi di goniometria e lo spazio riservato alla geometria e alla storia della matematica è molto ridotto.

### Introduzione

Il lavoro ha coinvolto in modalità collaborativa e integrata due discipline: informatica e matematica, non solo per quanto riguarda la produzione di file multimediali, ma principalmente per la trattazione dei contenuti e l'ambiente di sviluppo: GeoGebra e il mondo virtuale 3D EdMondo in cui la classe sta effettuando una sperimentazione in collaborazione con l'INDIRE: <http://www.scuola-digitale.it/ed-mondo/progetto/sperimentazioni-in-corso/>.

Sono state utilizzate numerose risorse in rete per studiare i tre problemi classici dell'antica Grecia: la rettificazione della circonferenza, la trisezione dell'angolo e la duplicazione del cubo. Dopo aver studiato la vita e le opere di Archimede, ci si è concentrati sullo studio della spirale, dal trattato "Sulle spirali". Alcune fonti sono state riportate nelle varie fasi di lavoro.

Gli studenti oltre a realizzare delle costruzioni col software di geometria dinamica hanno realizzato lo script con cui plottare nel mondo virtuale 3D la spirale di Archimede e altre curve utilizzando la loro equazione in forma parametrica, molto più semplice da trattare rispetto all'equazione cartesiana. Nello stesso script hanno inserito le istruzioni dell'algoritmo archimedeo per calcolare la lunghezza di un arco di spirale in LSL (Linden Scripting Language), un linguaggio di programmazione orientato agli oggetti, simile a C, C#, Java, con cui sono prodotte animazioni nei mondi virtuali.

Con lo stesso metodo, dopo aver cercato le equazioni parametriche di altre curve celebri, le hanno plottate sulla nostra land Scriptlandia, in ricordo del fatto che secondo alcune fonti, Archimede disegnasse figure e curve ovunque, anche sul proprio corpo.

In 3D è stata costruita anche la celebre figura grazie alla quale fu rinvenuta la tomba di Archimede: una sfera inscritta in un cilindro.

### Obiettivi di apprendimento

- Far acquisire agli studenti conoscenze di storia della matematica, in particolare, sui tre problemi classici dell'antica Grecia e sulla storia e le opere di Archimede di Siracusa.
- Acquisire elementi di goniometria di solito non trattati nei corsi ad indirizzo economico (rappresentazioni di angoli in gradi e in radianti, funzioni goniometriche e loro variazione).
- Utilizzare le conoscenze goniometriche per manipolare equazioni di funzioni e di curve algebriche per passare dall'equazione espressa in forma cartesiana a quella polare e, a quella parametrica.
- Realizzare delle costruzioni di luoghi geometrici (spirali) ed esplorarne le proprietà con software di geometria dinamica (geogebra).
- Codificare correttamente gli algoritmi per plottare le curve algebriche in 3D in linguaggio LSL, per modificarne i parametri e in particolare per calcolare la lunghezza di un arco di spirale.
- Manipolare codici in LSL per ottenere effetti speciali in 3D applicati ai grafici (particles) ottenuti anche questi modificando i colori RGB, la velocità di emissione, l'ampiezza dell'angolo di emissione, il raggio e altri enti geometrici.
- Ricercare fonti significative di vario tipo (siti, video, materiali testuali) per l'acquisizione di contenuti matematici, storici e informatici.

## Spazi e tempi

Sono stati utilizzati diversi ambienti: aula scolastica, sala LIM, laboratorio d'informatica e varie risorse, essenzialmente online e gratuite (software, siti, materiali e il mondo virtuale 3D Edmondo).

L'attività è stata realizzata in 3 ore di attività curricolari e circa 6 extracurricolari, in parte in presenza e in parte a distanza.

## Metodologie

- Learning by doing
- Learning by thing
- Lavori di gruppo
- Discussione guidata
- Brevi lezioni frontali

## Fasi di lavoro

### **Fase 1**

Abbiamo avviato lo studio della vita e delle opere di Archimede attraverso ricerche in rete, in particolare abbiamo seguito con interesse il video YouTube del filosofo della scienza Giulio Giorello: *Giulio Giorello: Archimede, il primo genio universale* <https://www.youtube.com/watch?v=8ZJOzMem3DA>

Per lasciare traccia in EdMondo del nostro lavoro, abbiamo «rezzato» cioè costruito la figura raffigurata sulla tomba Archimede: una sfera inscritta in un cilindro e poi, dopo varie discussioni, abbiamo deciso di concentrarci sullo studio della sua spirale, così importante per la soluzione di due problemi classici dell'antichità e la presenza di tale curva insieme ad altre spirali, in tanti fenomeni naturali.

**Figura 1 La sfera inscritta in un cilindro e una spirale archimedea in EdMondo**



### «Sulle spirali»

Ricordiamo brevemente che “Sulle spirali” è un trattato di Archimede contenente 28 proposizioni, 7 problemi e 21 teoremi. In esso viene descritto come generare la curva spirale con un metodo cinematico: essa viene definita come il luogo piano di un punto che, partendo dall'estremo di un raggio o semiretta, si sposta uniformemente lungo questo raggio mentre il raggio a sua volta ruota uniformemente intorno al suo estremo.

L'equazione polare  $(r, \theta)$  della spirale archimedeana è :

$$r = a + b\theta$$

con  $a$  e  $b$  numeri reali,  $b > 0$ .

La rappresentazione parametrica della spirale archimedeana, al variare del parametro  $\theta$ , è data da:

$$\begin{cases} x(\theta) = (a + b\theta) \cos(\theta) \\ y(\theta) = (a + b\theta) \sin(\theta) \end{cases}$$

con  $a$  e  $b$  reali e  $b > 0$ .

### Fase 2

Archimede, come i suoi predecessori, affrontò lo studio dei tre famosi problemi classici della geometria:

1. la quadratura del cerchio ([http://it.wikipedia.org/wiki/Quadratura\\_del\\_cerchio](http://it.wikipedia.org/wiki/Quadratura_del_cerchio));
2. il problema della trisezione dell'angolo ([http://it.wikipedia.org/wiki/Trisezione dell'angolo](http://it.wikipedia.org/wiki/Trisezione_dell'angolo));
3. la duplicazione del cubo con riga e compasso ([http://it.wikipedia.org/wiki/Duplicazione del cubo](http://it.wikipedia.org/wiki/Duplicazione_del_cubo)).

La spirale fornì la soluzione a due di questi problemi: la quadratura del cerchio e la trisezione dell'angolo.

La cissoide di Diocle fornì invece la soluzione al problema della duplicazione del cubo.

#### 1) La quadratura del cerchio: *costruire un quadrato che abbia la stessa area di un dato cerchio*

Nella proposizione 18 Archimede scrive in termini moderni: supponiamo la retta ruotante OA abbia compiuto un giro completo e si prenda la tangente alla spirale in questo punto; dal centro di rotazione si tracci la perpendicolare alla retta: il segmento di perpendicolare compreso fra il centro di rotazione e il punto di intersezione fra la perpendicolare e la tangente, è uguale alla circonferenza del "primo cerchio", ovvero il cerchio che ha come raggio il segmento compreso fra il centro di rotazione e il punto di tangenza. Archimede dunque riduce il problema della rettificazione del cerchio a quello di tracciare la tangente alla spirale.

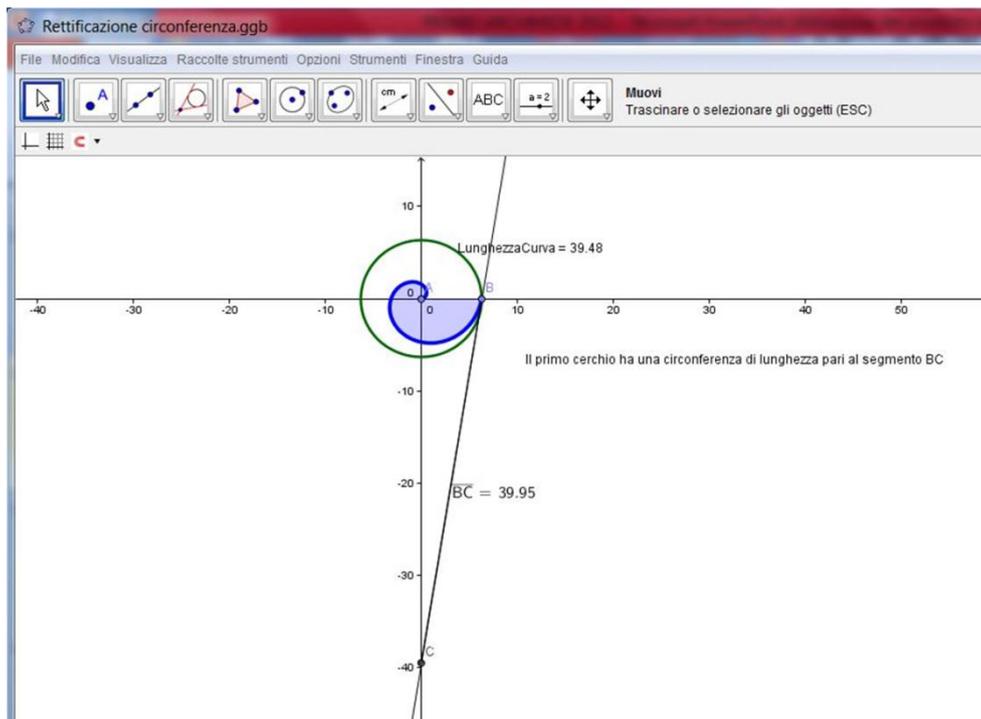


Figura 2: La rettificazione della circonferenza con GeoGebra

**2) La trisezione dell'angolo:** *costruire un angolo di ampiezza un terzo di un altro angolo qualsiasi dato.*

Il problema e la relativa soluzione sono stati analizzati mediante l'ottima applet presente sul seguente sito di cui si riporta un'immagine:

<http://www.gobnf.com/formule/default.aspx?code=0010564LKBP1>

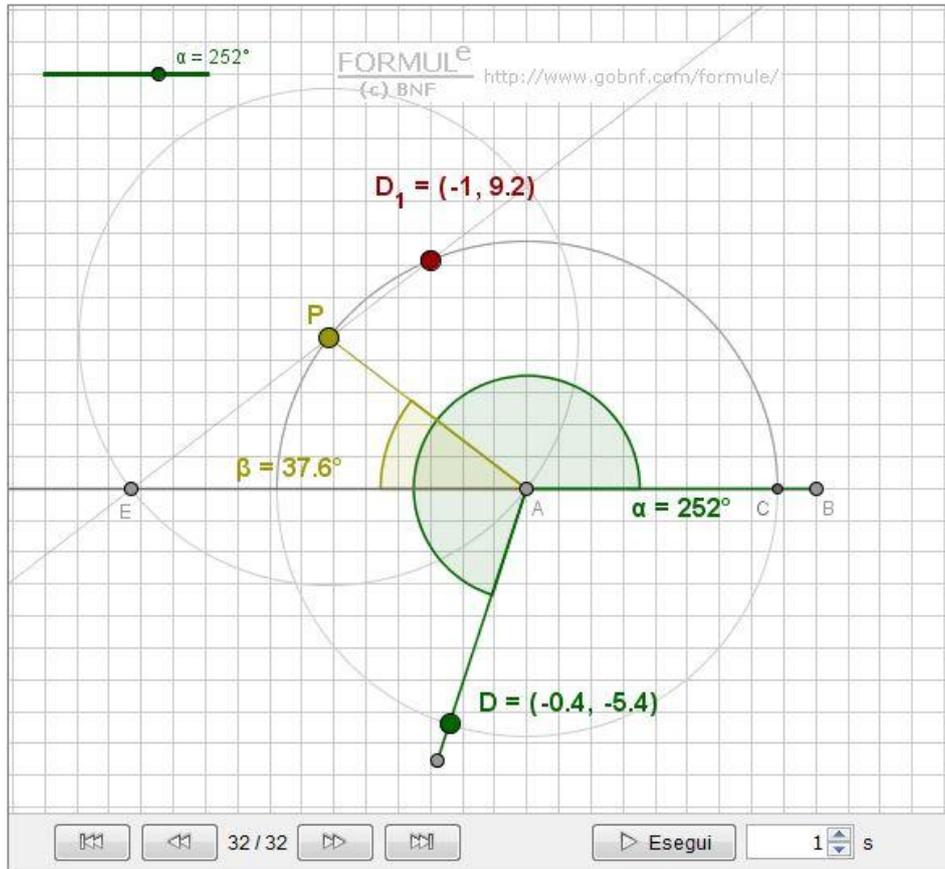


Figura 3 <http://www.gobnf.com/formule/default.aspx?code=0010564LKBP1>

**3) La duplicazione del cubo:** *costruire un cubo avente volume doppio rispetto a quello di un cubo di spigolo dato.*

Tra le tante possibili strategie risolutive del problema, ci siamo soffermati sul metodo che utilizza la Cissoide di Diocle (<http://progettomatematica.dm.unibo.it/Curve%20celebri/grecia/cissoide.html>) per poi costruire la curva in EdMondo; lo script è riportato in appendice.

### Fase 3

È stata realizzata la costruzione di una spirale molto presente in natura: come viene tessuta la ragnatela da un ragno.

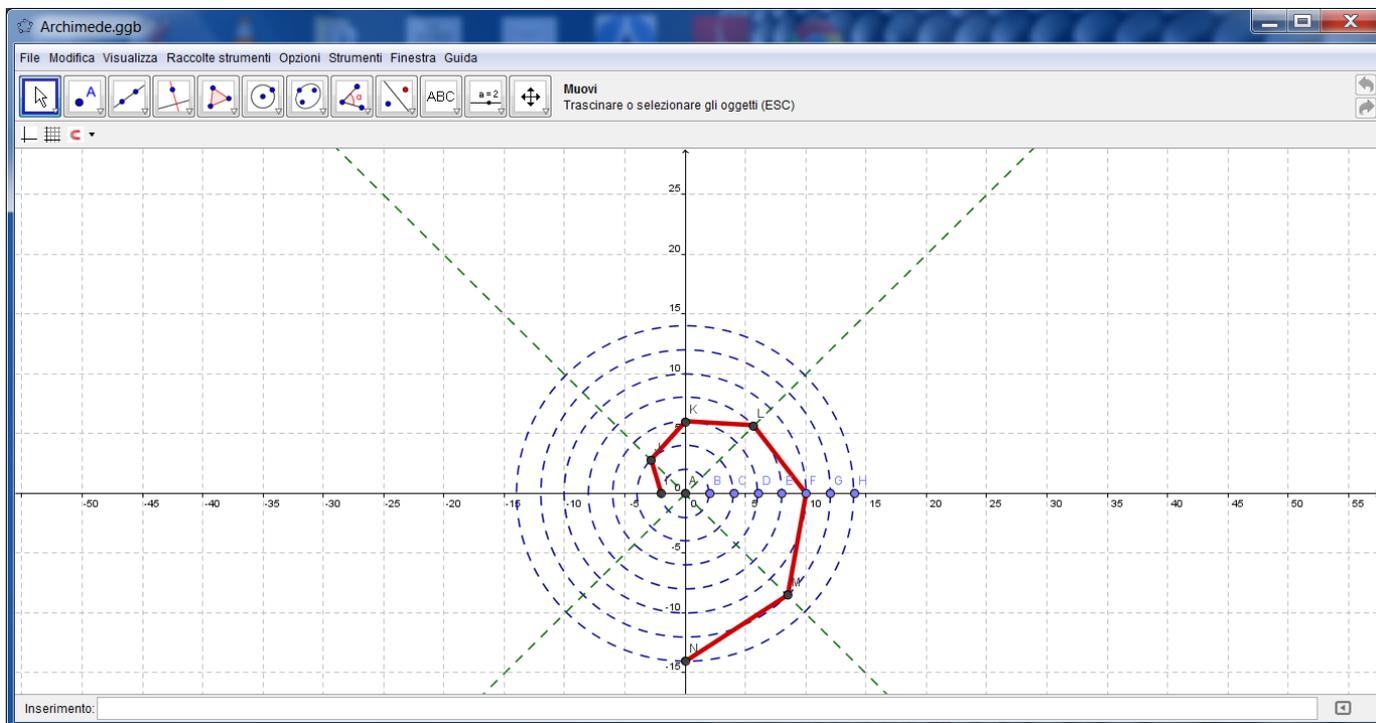


Figura 4 Ragnatela con GeoGebra

Con l'aiuto di GeoGebra è stata generata una spirale archimedeica mediante la sua equazione parametrica. Attraverso altre ricerche e studi, ne è stata evidenziata l'importanza.

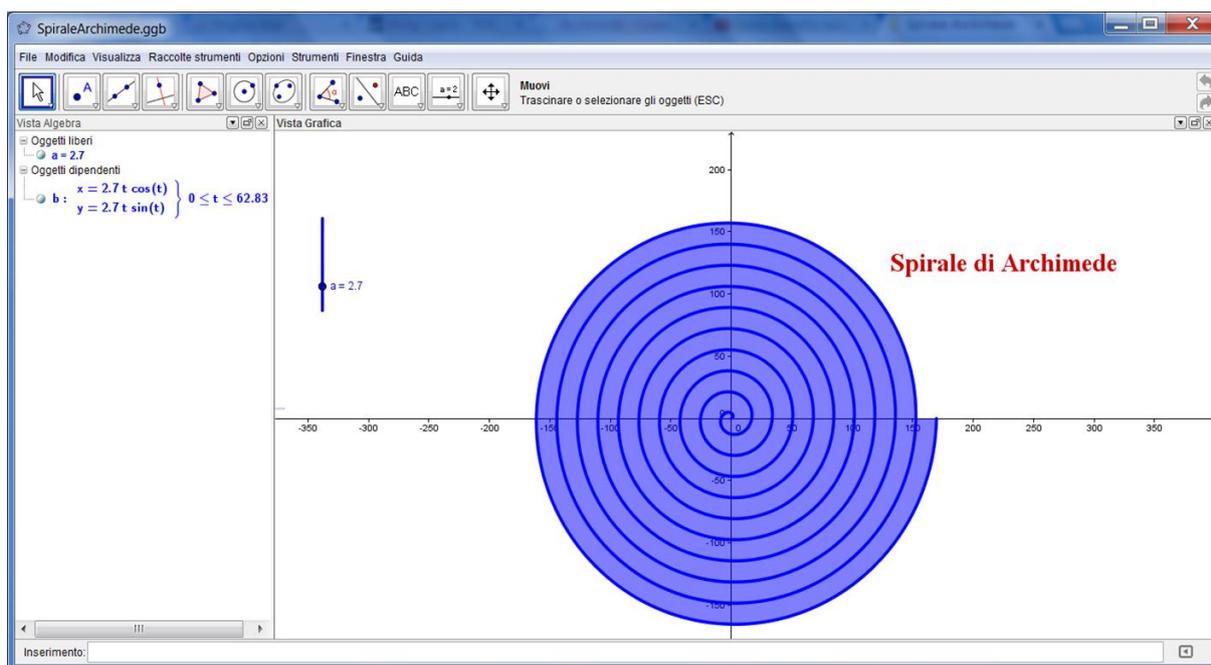


Figura 5 La spirale di Archimede realizzata con GeoGebra



Figura 6 La generazione della spirale con gli studenti

Dopo aver acquisito alcuni elementi teorici essenziali mediante una breve lezione frontale, è stato messo a punto lo script in LSL per rezzare la spirale di Archimede in 3D e calcolare la lunghezza di un suo arco ( per la formula e l'algoritmo si veda: <http://utenti.quipo.it/base5/geopiana/spirarchi.htm> )

**Nota di building:** per ciascuna curva occorre rezzare un cubo e una sferetta di piccole dimensioni, rinominata “nuvola” fare il take, cioè “prenderla” nell'inventario e trascinarla nel contenuto del cubo, in cui inserire anche lo script di ciascuna curva. Per avere gli effetti speciali, anche all'interno della sferetta denominata “nuvola” va inserito in precedenza lo script che genera le particles.

```
//Passo d, a=1
float d= 2*PI;
//lunghezza della spirale
float L;
float rad;
vector u; vector v;
vector center;
integer angle;

plot(vector x)
{
    string modo="rez";
    llRezObject("nuvola", x, ZERO_VECTOR, ZERO_ROTATION, 0);
}
vector calcolapos(float rad)
{//Equazione parametrica della spirale
    return (rad*llCos(rad))*u+(2*rad*llSin(rad))*(v)+center;
}
default
{
    touch_start(integer total_number)
    {
```

```

v=llVecNorm(llRot2Left(llGetRot()));
u=llVecNorm(llRot2Fwd(llGetRot()));
center=llGetPos(); // metodo con il timer
angle=0;
llSetTimerEvent(0.01);
}
timer()
{ float rad =DEG_TO_RAD*angle;
  vector pos=calcolapos(rad);
  plot(pos);

  angle+=10;
  if(angle>360) llSetTimerEvent(0);
  //Formula per calcolare la lunghezza della spirale
  L=0.5*(rad*llSqrt(1+rad*rad)+llLog(rad+llSqrt(1+rad*rad)));
  llSay(0,"Se l'angolo in radianti misura "+(string)angle+" la lunghezza
della spirale è "+(string)L);
}

```



Figura 7 Vari esperimenti in EdMondo

Questo è l'output ottenuto in chat quando viene eseguito lo script dell'oggetto (primitive) spirale:

```

[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 10 la lunghezza della spirale è 0.000000
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 20 la lunghezza della spirale è 0.175415
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 30 la lunghezza della spirale è 0.356030
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 40 la lunghezza della spirale è 0.546625
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 50 la lunghezza della spirale è 0.751283
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 60 la lunghezza della spirale è 0.973319
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 70 la lunghezza della spirale è 1.215335
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 80 la lunghezza della spirale è 1.479342
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 90 la lunghezza della spirale è 1.766894
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 100 la lunghezza della spirale è 2.079188
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 110 la lunghezza della spirale è 2.417163
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 120 la lunghezza della spirale è 2.781556
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 130 la lunghezza della spirale è 3.172957
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 140 la lunghezza della spirale è 3.591839
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 150 la lunghezza della spirale è 4.038590

```

[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 160 la lunghezza della spirale è 4.513529  
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 170 la lunghezza della spirale è 5.016921  
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 180 la lunghezza della spirale è 5.548988  
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 190 la lunghezza della spirale è 6.109919  
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 200 la lunghezza della spirale è 6.699875  
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 210 la lunghezza della spirale è 7.318995  
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 220 la lunghezza della spirale è 7.967396  
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 230 la lunghezza della spirale è 8.645185  
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 240 la lunghezza della spirale è 9.352450  
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 250 la lunghezza della spirale è 10.089274  
[08:42 AM] spirale: Se l'angolo in radianti misura 260 la lunghezza della spirale è 10.855725

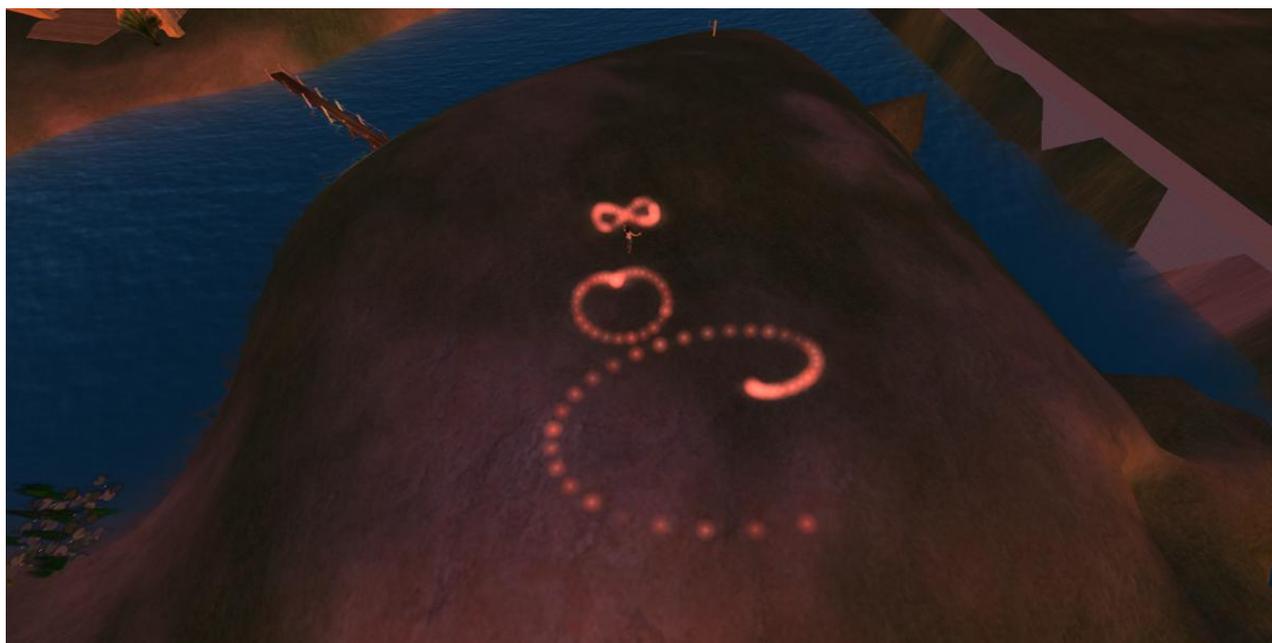


Figura 8 L'ambiente impostato a mezzanotte per evidenziare le curve

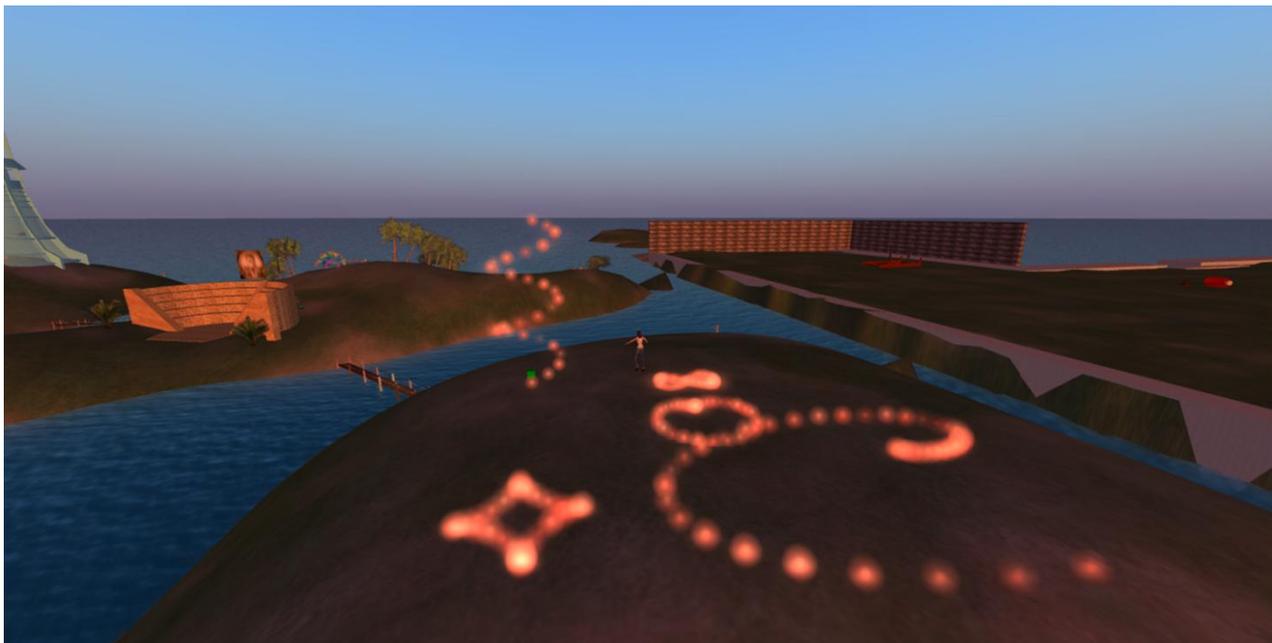


Figura 9 Curve algebriche che emettono particles

Compreso il modus operandi, sono state rezzate diverse curve algebriche: la spirale, la cardioide, l'asteroide, la lemniscata di Bernoulli e un'elica. La classe ha lavorato per gruppi di 2-3 studenti, ogni gruppo ha generato una curva. Sono state utilizzate le loro equazioni parametriche (con lo stesso script di base, ma sostituendo le equazioni) e sono stati creati degli effetti speciali con le particles, per accendere tante luci e rendere l'ambiente suggestivo.

Per generare gli effetti speciali con emissione di particles, si può utilizzare questo generatore online <http://particles-lsl-generator.bashora.com/> in cui è sufficiente inserire i vari parametri e modificarli finché non si ottiene l'effetto desiderato. La scelta e la discussione sui valori dei diversi parametri costituiscono un ottimo esercizio di familiarizzazione e manipolazione di vari enti geometrici.

### Appendice: La cissoide di Diocle

```
plot(vector x)
{
    string modo="rez";
    llRezObject("nuvola", x, ZERO_VECTOR, ZERO_ROTATION, 0);
}
vector calcolapos(integer angle)
{
    float rad=DEG_TO_RAD*angle;
    return (2*llPow(llSin(rad), 3)/llCos(rad))*u+2*llPow(llSin(rad),
2)*(v)+center;
}
vector u; vector v;
vector center;
integer angle;
default
{
    touch_start(integer total_number)
    {
```

```

v=llVecNorm(llRot2Left(llGetRot()));
u=llVecNorm(llRot2Fwd(llGetRot()));
center=llGetPos();
// metodo con il timer
angle=0;
llSetTimerEvent(0.01);
}
timer()
{
vector pos=calcolapos(angle);
plot(pos);
angle+=10;
if(angle>360) llSetTimerEvent(0);
}
}

```



Figura 10 La cissoide di Diocle in EdMondo

## Conclusioni

E' stato un'attività impegnativa che ha gratificato tutti gli attori coinvolti. Gli studenti hanno risposto favorevolmente agli stimoli offerti dall' insegnante. Hanno acquisito più conoscenze e competenze di quelle prefissate perché attraverso la manipolazione col software di geometria dinamica e poi in 3D, hanno realizzato varie costruzioni. Hanno lavorato attivamente, in modo creativo, senza ricorrere ad alcun esercizio ripetitivo o di addestramento. Divertendosi hanno imparato anche:

- a collaborare meglio con gli altri componenti del gruppo;
- ad avere un confronto diretto con gli altri e quindi a saper discutere;
- a usare un linguaggio scientificamente più rigoroso;
- ad ascoltare più attentamente e ottimizzare i tempi;
- a ricercare, selezionare e utilizzare risorse presenti sul Web.

L'utilizzo delle risorse disponibili in rete ha notevolmente facilitato il lavoro e ridotto i tempi di attuazione del percorso didattico.

## Sitografia

I problemi classici dell'antica Grecia

[http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/curve/curve\\_giusti/prima.php?id=3](http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/curve/curve_giusti/prima.php?id=3)

<http://www.mat.unimi.it/users/forti/Storia%20della%20Matematica/2011%20Storia%20della%20Matematica%20-%20I%20problemi%20classici%20grecoi.pdf>

Spirale di Archimede

<http://www.spiralifrattali.altervista.org/archimede.htm>

<http://progettomatematica.dm.unibo.it/Curve%20celebri/grecia/spiralearchi.html>

Lezioni di scripting in LSL a Scriptlandia

<http://www.matematicamente.it/magazine/18dic2012/177marincola-scriptlandia.pdf>

Curve algebriche: gioielli virtuali

<http://www.matematicamente.it/magazine/19aprile2013/179-Maricola-Curve.pdf>

## 214. Sommare le serie non convergenti: istruzioni per l'uso

Luca Lussardi

Università Cattolica del Sacro Cuore

luca.lussardi@unicatt.it

*È il mondo a essere pazzo; i matematici e i fisici si limitano ad accorgersene.*

Con questa frase Odifreddi conclude il suo articolo *Quelle somme da manicomio* ([3]). Quali sono le stranezze a cui fa riferimento? Prendiamola alla larga e partiamo dalla fisica, e in particolare dalla fisica contemporanea: la teoria delle stringhe. Come è ben noto si tratta di una teoria che si propone di unificare l'infinitamente piccolo con l'infinitamente grande. Per giungere ad alcune conclusioni fondamentali della teoria stessa, i fisici fanno uso di un curioso risultato che sfida l'intuizione di ogni persona ragionevole: la serie  $1 + 2 + 3 + \dots$  vale  $-\frac{1}{12}$ : la cosa che appare paradossale è il fatto che sommando infiniti numeri interi positivi si ottenga un numero negativo, per di più non intero. Ramanujan non aveva quindi tutti i torti quando a Hardy, in una lettera del 1913, scriveva: "A dire che  $1 + 2 + 3 + \dots$  è uguale a  $-\frac{1}{12}$  si rischia di essere mandati direttamente in manicomio". Il genio matematico indiano non aveva comunque avuto molta fortuna un anno prima quando presentando la stessa formula al matematico londinese Hill ricevette la risposta: "Lei è evidentemente un uomo con gusto per la matematica e qualche abilità, ma ha imboccato una strada sbagliata. E non capisce le precauzioni che bisogna prendere con le serie divergenti ...". Già, le serie divergenti, o meglio *non convergenti*, quelle particolari somme infinite che anche Eulero aveva cercato di domare arrivando talvolta a risultati contraddittori.

Lo scopo di questo articolo è quello di presentare alcune definizioni di convergenza di una serie più generali rispetto al classico approccio *alla Cauchy*, cercando di illustrare, in particolare, come sia possibile arrivare ad una nozione di convergenza che permetta di rendere rigorosa l'uguaglianza  $1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$ ; per maggiori dettagli si consiglia la lettura di Hardy ([2]).

$1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$ : una dimostrazione semplice, ma sbagliata

C'è un modo immediato che permette di “dimostrare” che  $1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$ , ed è basato su manipolazioni opportune delle serie usando proprietà tipiche delle somme finite. Poniamo  $S := 1 + 2 + 3 + \dots$ ; vogliamo far vedere che  $S = -\frac{1}{12}$ . Sia  $S' := 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  e osserviamo che

$$S' = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S'$$

da cui  $S' = \frac{1}{2}$ . Consideriamo ora invece la serie  $S'' := 1 - 2 + 3 - 4 + \dots$  e notiamo che

$$2S'' = 1 + (-2 + 1) + (3 - 2) + (-4 + 3) + \dots = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

da cui  $S'' = \frac{1}{4}$ . Infine, se calcoliamo  $S - S''$  troviamo

$$S - S'' = (1 - 1) + (2 + 2) + (3 - 3) + \dots = 4(1 + 2 + 3 + \dots) = 4S$$

da cui finalmente  $S = -\frac{1}{12}$ . Abbiamo quindi ottenuto il risultato voluto sfruttando opportuni riordinamenti dei termini di una serie; ma siamo sicuri che sia possibile farlo per le somme infinite? Per rispondere correttamente a questa domanda è necessario dire con precisione cosa uno intende per *convergenza* di una serie: una volta che viene fissata una definizione di convergenza allora è possibile indagare quali sono le proprietà e quindi, in particolare, quali proprietà delle somme finite restano valide. È immediato vedere l'importanza dell'aver fissato la definizione di convergenza: basta osservare che se per calcolare la somma della serie  $S' = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  avessimo usato la proprietà associativa di modo che  $S' = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$  avremmo ottenuto  $S' = 0$  e non  $S' = \frac{1}{2}$ ; in un certo senso, che preciseremo meglio,  $S' = \frac{1}{2}$  è *più giusto* di  $S' = 0$ .

**La convergenza alla Cauchy**

L'ingegnere francese Cauchy dà, ai primi dell'Ottocento, la prima definizione rigorosa di convergenza di una serie: se  $x_h$  è una successione di numeri reali (o complessi) la serie  $x_1 + x_2 + \dots$  converge al valore reale  $S$  se la successione costituita dalla somme parziali ha come limite  $S$ , ovvero se la successione  $S_k := x_1 + x_2 + \dots + x_k$  tende a  $S$  quando  $k \rightarrow +\infty$ . Esistono serie convergenti “non banali”, ovvero serie convergenti formate effettivamente da infiniti addendi non nulli? La risposta è ovviamente affermativa, ad esempio la serie *geometrica* data da  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$  converge, nel senso appena introdotto, a 1. Effettivamente, vale un risultato più generale: infatti, la serie geometrica

---

$1 + q + q^2 + \dots$  converge a  $\frac{1}{1-q}$  ogni volta che  $|q| < 1$ . Basta osservare che

$$(1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^k) = 1 - q^{k+1}$$

da cui

$$S_k = 1 + q + q^2 + \dots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

ogni volta che  $q \neq 1$ ; al limite si ottiene  $\frac{1}{1-q}$  se  $q^{k+1} \rightarrow 0$ , ovvero se  $|q| < 1$ . Applicando questa definizione di convergenza risulta che la serie  $1 + 2 + 3 + \dots$  non converge ad alcun valore reale: difatti,

$$S_k = x_1 + x_2 + \dots + x_k = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \rightarrow +\infty;$$

si dice anche, nel caso specifico, che la serie  $1 + 2 + 3 + \dots$  *diverge positivamente*<sup>1</sup>. In effetti, la nozione di convergenza alla Cauchy è quella più intuitiva e che ci porta a concludere, in accordo col buon senso, che alla serie  $1 + 2 + 3 + \dots$  non può essere attribuito un valore numerico finito. È ovviamente possibile anche avere serie *divergenti negativamente*: basta considerare, ad esempio, la serie  $-1 - 2 - 3 - \dots$ . Ma c'è ancora un caso: cosa accade quando la successione  $S_k$  non ammette limite? La serie in tal caso si dice *indeterminata* o anche *oscillante*. È in realtà proprio il caso delle nostre vecchie conoscenze  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  e  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ : infatti, per la serie  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  si trova subito che

$$S_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

per cui  $S_k$  non ha limite, mentre per la serie  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$  si trova

$$S_k = \begin{cases} -\frac{k}{2} & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{k+1}{2} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

e anche in questo caso  $S_k$  non ammette limite. Restando all'interno di questa teoria, le proprietà tipiche delle somme finite si generalizzano solo a certi tipi di serie; accenniamo a cosa accade alla nozione di convergenza alla Cauchy quando si riordinano gli elementi di una serie; per maggiori dettagli si può consultare [1]. Di fatto, la convergenza non viene alterata se la serie in questione è a termini non negativi: se una serie a termini non negativi converge allora ogni suo riordinamento converge allo stesso valore. Le cose

---

<sup>1</sup>Si presti attenzione alla terminologia: in parecchi testi il termine *divergente* viene utilizzato come sinonimo di *non convergente*: per noi invece le serie divergenti sono solo alcune tra le serie non convergenti.

cambiano quando la serie data è a termini di segno qualunque: in tal caso non è più vero che se la serie converge allora ogni suo riordinamento converge. Dietro quest'ultimo problema è nascosta in realtà una nozione di convergenza più forte, che è la convergenza *assoluta*: una serie converge assolutamente se converge la serie dei valori assoluti. Si dimostra quindi che se una serie converge assolutamente allora ogni suo riordinamento converge allo stesso valore. Per altro, i riordinamenti delle serie convergenti ma non assolutamente convergenti hanno un comportamento abbastanza bizzarro: si dimostra infatti che se una serie converge ma non converge assolutamente allora per ogni  $S \in [-\infty, +\infty]$  fissato ad arbitrio esiste un riordinamento della serie che converge a  $S$ . Per tirare comunque una prima conclusione, utilizzando la nozione di convergenza alla Cauchy le serie numeriche si dividono quindi in tre classi: convergenti, divergenti (positivamente o negativamente), indeterminate.

### Come far convergere le serie indeterminate: le somme di Cesàro

Nel 1890 il matematico italiano Cesàro propone una definizione più generale di convergenza di una serie: precisamente, la *somma di Cesàro* di una successione  $x_h$  vale  $S$  se la successione delle medie aritmetiche delle somme parziali converge a  $S$ , ovvero se la successione

$$C_k := \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_k}{k}$$

converge a  $S$ . La prima domanda che possiamo porci è: la nozione di convergenza alla Cesàro generalizza quella alla Cauchy? La risposta viene applicando un ben noto teorema dovuto ancora a Cesàro: si ha

$$(1) \quad \lim_k y_k = \lim_k \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_k}{k}$$

ogni volta che il limite a sinistra esiste. In particolare, applicando la (1) alla successione  $S_k$  delle somme parziali della serie data si ottiene che la convergenza alla Cauchy implica la convergenza alla Cesàro, e le rispettive somme sono uguali, e anche la divergenza alla Cauchy implica che la somma di Cesàro vale  $+\infty$  o  $-\infty$  a seconda che la serie sia positivamente o negativamente divergente secondo Cauchy. L'unico caso quindi in cui la somma di Cesàro può dare un nuovo significato si ha quando la serie data è indeterminata secondo Cauchy. Ad esempio, utilizzando questa nuova nozione di convergenza, risulta facilmente che la somma di Cesàro della serie  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  vale  $\frac{1}{2}$ : infatti, ricordando

che

$$S_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

si ha di conseguenza

$$C_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{k+1}{2k} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

che converge a  $\frac{1}{2}$ . La pseudo-dimostrazione illustrata a pagina 44 per arrivare a dire che  $1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$  può quindi perlomeno essere avviata se uno volesse usare le somme di Cesàro anziché quelle alla Cauchy; purtroppo però si arresta al passaggio successivo: infatti la serie  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ , che non converge nel senso di Cauchy, non converge nemmeno nel senso di Cesàro, dal momento che si ha, come abbiamo già avuto modo di osservare,

$$S_k = \begin{cases} -\frac{k}{2} & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{k+1}{2} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

da cui

$$C_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{k+1}{2k} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

che non ha limite.

### Un'ulteriore generalizzazione: le somme di Hölder

Introdotta nel 1882 dal matematico tedesco Hölder, la somma che porta il suo nome è una naturale generalizzazione della somma di Cesàro: si tratta semplicemente di reiterare il procedimento di media aritmetica; se per una certa media reiterata si ottiene una successione convergente, il valore limite si chiama *somma di Hölder* della serie inizialmente data. Formalizziamo un po' meglio la cosa. Anzitutto, diciamo che una serie  $(H, 1)$ -converge a  $S$  se la somma di Cesàro vale  $S$ . Posto quindi  $H_k^1 := C_k$ , sia

$$H_k^2 := \frac{H_1^1 + H_2^1 + \dots + H_k^1}{k}.$$

Diciamo che la serie  $(H, 2)$ -converge a  $S$  se  $H_k^2$  è una successione convergente a  $S$ . Iterando il ragionamento, diciamo che la serie  $(H, n)$ -converge a  $S$  se  $H_k^n$  è una successione convergente a  $S$ , dove abbiamo posto

$$H_k^n := \frac{H_1^{n-1} + H_2^{n-1} + \dots + H_k^{n-1}}{k}.$$

Anche la nozione di  $(H, n)$ -convergenza generalizza quella secondo Cauchy: di fatto, se diciamo che una serie  $(H, 0)$ -converge se converge secondo Cauchy, la  $(H, n)$ -convergenza

implica la  $(H, n + 1)$ -convergenza per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Le serie divergenti alla Cauchy continuano a divergere anche nel senso di Hölder: la nostra serie  $1 + 2 + 3 + \dots$  continua quindi a non convergere in nessun  $(H, n)$ -senso, bensì continua a divergere positivamente. Invece, la somma  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$  diventa  $(H, 2)$ -convergente (ricordiamo che non è  $(H, 1)$ -convergente). Abbiamo già individuato la successione  $C_k$ , ovvero, nelle nuove notazioni,

$$H_k^1 = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{k+1}{2k} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

che non converge. Troviamo quindi  $H_k^2$ . Se  $k$  è dispari si ha facilmente, grazie alla (1),

$$H_k^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} \frac{j+1}{2j+1} = \frac{k+1}{2k} \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^{\frac{k-1}{2}} \frac{j+1}{2j+1} = \frac{1}{4} + o(1)$$

mentre per  $k$  pari si ha, di conseguenza,

$$H_k^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{\frac{k-2}{2}} \frac{j+1}{2j+1} = \frac{1}{2} \frac{2}{k} \sum_{j=0}^{\frac{k-2}{2}} \frac{j+1}{2j+1} = \frac{1}{4} + o(1).$$

Dunque  $H_k^2 \rightarrow \frac{1}{4}$ , il che dimostra che la serie  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$  è  $(H, 2)$ -convergente a  $\frac{1}{4}$ .

Concludendo, abbiamo imparato a sommare le serie indeterminate, ma non abbiamo ancora capito come giustificare il procedimento euristico utilizzato nella sezione ???: infatti, la serie  $1 + 2 + 3 + \dots$  continua a  $(H, n)$ -divergere positivamente. Per arrivare a sommare anche le serie divergenti ci vogliono strumenti più sofisticati.

### Come si sommano le serie divergenti? $\mathbb{C}$ viene in aiuto

Nonostante il giochetto che fa ottenere il magico valore  $-\frac{1}{12}$  per la serie  $1 + 2 + 3 + \dots$  non possa essere restaurato utilizzando le precedenti generalizzazioni del concetto di convergenza, non ci arrendiamo e guardiamo ad un tentativo che coinvolge uno strumento molto più avanzato: l'analisi complessa. Presentare la metodologia generale è complicato ed esula dagli scopi di questo articolo introduttivo, per cui ci limitiamo a mostrare, senza troppi dettagli tecnici, come riottenere i valori trovati euristicamente a pagina 44. Ciò richiede l'introduzione della celeberrima funzione  $\zeta$  di Riemann, legata al problema della distribuzione dei numeri primi, e definita, per ogni  $z \in \mathbb{C}$  con  $\text{Re}(z) > 1$ , da

$$\zeta(z) := 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \dots$$

La definizione è ben data dal momento che la serie a secondo membro converge nel senso di Cauchy ogni volta che  $\operatorname{Re}(z) > 1$ . La funzione  $\zeta$  risulta essere anche una funzione olomorfa sull'aperto dove è definita. Si nota subito che se  $\zeta$  fosse definita dalla stessa espressione anche per  $z = -1$  si avrebbe proprio

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + \dots .$$

L'idea è quindi la seguente: prolungare analiticamente, secondo le tecniche dell'analisi complessa, la funzione  $\zeta$  in un intorno di  $z = -1$  e porre, *per definizione*,  $1 + 2 + 3 + \dots$  pari al valore che tale prolungamento assume proprio per  $z = -1$ . Cerchiamo quindi di capire come il prolungamento analitico funziona. Tipicamente, data una funzione olomorfa  $f$  definita su un aperto di  $\mathbb{C}$  si cerca una relazione funzionale soddisfatta dalla funzione  $f$  stessa che permette di estendere, mediante la relazione funzionale stessa, la funzione  $f$  anche al di fuori del proprio dominio; il fatto notevole, e in questo punto entra pesantemente l'analisi complessa, è che se un prolungamento analitico esiste allora è necessariamente unico (se i domini in gioco sono *topologicamente* fatti bene). La relazione funzionale giusta che permette di prolungare la  $\zeta$  di Riemann si ottiene introducendo altre due funzioni: la funzione  $\eta$  di Dirichlet e la funzione  $\Gamma$  di Eulero. Cominciamo col definire la  $\eta$  di Dirichlet: essa è data da

$$\eta(z) := 1 - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \dots, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Si verifica facilmente che per ogni  $z \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re}(z) > 1$  si ha

$$(2) \quad \eta(z) = (1 - 2^{1-z})\zeta(z).$$

La relazione (2) permette di estendere la  $\zeta$  di Riemann ad una funzione meromorfa sull'aperto  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ , la quale in particolare ha un polo semplice in  $z = 1$ . L'estensione a tutto  $\mathbb{C}$  si fa introducendo invece la  $\Gamma$  di Eulero definita da

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Si dimostra che l'integrale a secondo membro nella definizione di  $\Gamma$  converge assolutamente, per cui la definizione di  $\Gamma$  è ben data. Si può inoltre verificare facilmente che  $\Gamma(n+1) = n!$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ; effettivamente, la funzione  $\Gamma$  di Eulero ha origine proprio come interpolazione della funzione fattoriale. Ora, un calcolo non banale permette di trovare la relazione funzionale

$$(3) \quad \zeta(1-z) = 2(2\pi)^{-z} \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(z)\zeta(z), \quad 0 < \operatorname{Re}(z) < 1.$$

La relazione (3) permette di estendere la  $\zeta$  di Riemann a tutto  $\mathbb{C}$  e si dimostra che ne viene una funzione meromorfa su  $\mathbb{C}$  con un solo polo in  $z = 1$ . Abbiamo quindi risolto finalmente il nostro problema di dare un significato alla serie  $1 + 2 + 3 + \dots$ : essa, *per definizione*, può essere assunta pari al valore della funzione  $\zeta$  di Riemann, o meglio del suo prolungamento analitico, in  $z = -1$ . Calcoliamo tale valore usando la (3):

$$\zeta(-1) = 2(2\pi)^{-2} \cos \pi \Gamma(2) \zeta(2) = -\frac{1}{2\pi^2} \Gamma(2) \zeta(2).$$

Ora si ha  $\Gamma(2) = 1$ , mentre, per noti risultati sulle serie

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

da cui  $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ . Abbiamo quindi ritrovato il “paradossale” valore  $-\frac{1}{12}$ . Ci potremmo a questo punto chiedere se con la stessa tecnica si possano ritrovare i valori  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$  e  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \frac{1}{4}$  che combinati assieme davano proprio  $1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$ . La serie più immediata è  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ : infatti, basta osservare che formalmente corrisponde a  $\eta(-1)$ , dunque dobbiamo prolungare la  $\eta$  di Dirichlet. A tal scopo, osserviamo che grazie alla (2) e grazie al fatto che abbiamo esteso  $\zeta$  a tutto  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  possiamo prolungare anche la  $\eta$  di Dirichlet a  $\mathbb{C}$ , ottenendo quindi

$$\eta(-1) = (1 - 4)\zeta(-1) = -3 \left( -\frac{1}{12} \right) = \frac{1}{4}.$$

Passiamo infine a considerare la serie  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ , la quale si ottiene formalmente da  $\eta(0)$ ; per usare la (2) necessitiamo quindi di  $\zeta(0)$ . Il problema ora è che non possiamo direttamente usare la (3) per determinare  $\zeta(0)$  dal momento che in ogni caso dovremmo considerare  $\zeta(1)$ , ma 1 è una singolarità per  $\zeta$ . Dobbiamo quindi usare la (3) vicino a  $z = 1$  e passare al limite, sfruttando il fatto che, dal momento che si dimostra che il residuo di  $\zeta$  in  $z = 1$  vale 1,

$$\zeta(z) \sim \frac{1}{z-1}, \quad z \rightarrow 1.$$

Si ha quindi, grazie alla (3),

$$\zeta(0) = \frac{1}{\pi} \lim_{z \rightarrow 1} \cos \left( \frac{\pi z}{2} \right) \zeta(z) = \frac{1}{\pi} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z-1} \cos \left( \frac{\pi z}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

da cui, usando la (2),  $\eta(0) = -\zeta(0) = \frac{1}{2}$ .

Riottenere proprio il valore  $-\frac{1}{12}$  prolungando analiticamente la  $\zeta$  di Riemann appare un po' misterioso; il mistero si infittisce quando uno osserva che non si tratta di un risultato generale: se uno cambia regolarizzazione il valore formalmente assegnato alla serie  $1 + 2 + 3 + \dots$  potrebbe essere diverso. Ad esempio, consideriamo la successione

$$x_h(z) := \begin{cases} \frac{1}{h^z} & \text{se } h \text{ è pari} \\ \frac{1}{(h+1)^z} - \frac{1}{(h+1)^{z+1}} & \text{se } h \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Poniamo, per ogni  $z \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re}(z) > 1$ ,

$$f(z) := \sum_{h=1}^{+\infty} x_h(z).$$

La definizione di  $f$  è ben data e si vede facilmente che

$$(4) \quad f(z) = 2^{1-z}\zeta(z) - \frac{1}{2^{z+1}}\zeta(z+1).$$

La relazione (4) permette di estendere per prolungamento analitico la funzione  $f$  a tutto  $\mathbb{C}$  tranne che in 0 e 1 ottenendo quindi una funzione meromorfa su  $\mathbb{C}$  con due poli semplici in 0 e 1. Osserviamo ora che per ogni  $h \in \mathbb{N}$  con  $h \geq 1$  si ha  $x_h(-1) = h$  per cui, come nel caso della  $\zeta$  di Riemann, al valore  $f(-1)$  possiamo formalmente attribuire il valore della serie  $1 + 2 + 3 + \dots$ , ottenendo quindi, grazie alla (4),

$$f(-1) = 4\zeta(-1) - \zeta(0) = \frac{1}{6}.$$

## Conclusioni

Volendo tirare qualche conclusione sembra assodato che estendere il concetto di convergenza alla Cauchy alle serie indeterminate sia relativamente semplice: a forza di medie aritmetiche, uno riesce a trattare gran parte dei casi più interessanti. Ben diverso e più problematico è il caso delle serie divergenti: in questo caso risulta difficile assegnare ad esse un valore reale. Forse quindi il prof. Hill di Londra, quando disse a Ramanujan che bisogna prendere le dovute precauzioni con le serie divergenti, non si sbagliava del tutto.

## Riferimenti bibliografici

- [1] U. Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, T. Nistri e C., Pisa, 1878.
- [2] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Clarendon Press, Oxford 1949.
- [3] P. Odifreddi, *Quelle somme da manicomio*, Le Scienze 484, 2008.

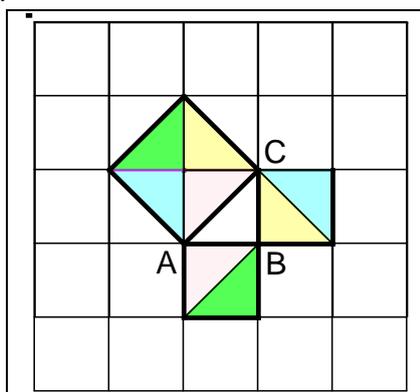
## 215. Socrate, Platone e ... il problem solving

Alfio Grasso

grassoalfino@yahoo.it

Vuole la leggenda che Pitagora abbia scoperto il teorema che porta il suo nome – nel caso particolare di un triangolo rettangolo e isoscele - fissando un pavimento formato da quadrati (figura). Immaginò di tracciarne le diagonali e, sempre idealmente, fermò la sua attenzione su alcuni di essi posti in una speciale posizione (segnati in neretto in figura).

L'acquisizione della proprietà pitagorica è immediata servendosi dei triangoli colorati, si deduce applicando opportune traslazioni.



Platone, nel *Teeteto*, espone che Socrate basava il suo insegnamento sull'arte "maieutica", cioè l'attività, fondata sul *dialogo*, di far emergere dalla mente del discepolo la Verità che già possiede dentro di sé, con opportune interrogazioni dirette, semplici e chiare. Così che è il discente a scoprire da sé la verità sviluppando l'intuizione («da me non hanno imparato mai nulla, ma da loro stessi scoprono e generano molte cose belle»); nel processo si partiva dal particolare per arrivare all'universale, poiché nell'universale si trova la Verità.

Nel *Menone* Platone mostra come Socrate applichi l'arte maieutica come strumento fondamentale anche per "portare alla luce" dalla mente degli interlocutori le conoscenze matematiche, come nel celebre dialogo in cui aiuta uno schiavo di Menone a scoprire che il lato del quadrato di area doppia di quella di uno assegnato è una diagonale di questo.

Socrate chiede allo schiavo se sa com'è fatta un'area quadrata, cioè che possiede tutti lati uguali e le diagonali anch'esse uguali. Alla risposta affermativa dello schiavo domanda quanto vale l'area di un quadrato di lato due piedi.

Lo schiavo risponde correttamente: due piedi per due piedi, cioè quattro.

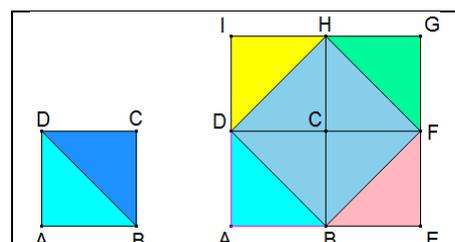
Socrate riprende il dialogo, sollecitando l'interlocutore a rispondere al quesito: di quanti piedi è il lato del quadrato di area doppia?

Lo schiavo risponde subito: di quattro piedi. A questo punto Socrate lo invita a riflettere: «quando il lato era di due piedi tu hai fatto correttamente due piedi per due piedi, allora se il lato del nuovo quadrato è quattro piedi, quanto sarebbe la sua area?»

Lo schiavo risponde: di sedici.

Dopo qualche altra riflessione il filosofo ateniese chiede allo schiavo se sa in che figure una diagonale divide un quadrato, ed egli risponde giustamente, in due triangoli uguali (prima figura).

A questo punto Socrate gli suggerisce di costruire altri tre quadrati uguali a quello dato in modo da formare un nuovo quadrato (seconda figura a destra). Gli domanda se ora sa dire quale dev'essere il lato del quadrato che possiede area doppia di quello di due piedi di lato. Lo schiavo, tenendo conto della



considerazione precedente, dà la risposta corretta: il lato del quadrato di area doppia è una sua diagonale.

Questo è *problem solving*: i docenti di matematica dovrebbero sforzarsi di attuarlo.

Faccio osservare che: *l'umanità, dai suoi albori, ha dovuto risolvere problemi di molteplice natura per sopravvivere.*

Il metodo della didattica per problemi è stato teorizzato da John Dewey (1859–1952), importante filosofo e pedagogista statunitense del secolo scorso, che ha esercitato una profonda influenza sulla cultura e sui sistemi educativi sia del proprio paese che di altri paesi.

Karl Popper (1902–1994), insigne filosofo ed epistemologo austriaco, sostiene che “la ricerca scientifica consiste nel risolvere problemi”, “la vita è costituita da problemi da risolvere” e, quindi, che “apprendere a risolvere problemi significa apprendere a vivere”.

Presento un'applicazione del *problem solving*, finalizzato alla conquista da parte degli allievi del cosiddetto I teorema di Euclide e conseguentemente del teorema di Pitagora.

### Prerequisiti

Isometrie, costruzione di un parallelogramma, equivalenza tra poligoni come equiscomponibilità.

Il triangolo rettangolo riveste un ruolo importante in geometria, in particolare perché a esso è legato il teorema più noto, quello di Pitagora. Questo teorema è un modo per esprimere la caratteristica che lo spazio euclideo è piatto.

Di notevole rilievo è il triangolo rettangolo e isoscele, perché è metà di un quadrato. Da esso prenderemo le mosse per *scoprire* due importanti proprietà: il cosiddetto I teorema di Euclide e quello di Pitagora.

Sia  $\triangle ABC$  un triangolo isoscele di altezza  $CH$  relativa all'ipotenusa  $AB$  (prima figura sotto); poiché  $\triangle ABC$  è isoscele,  $CH$  è anche...

*Giusta risposta.* Mediana, quindi  $\overline{AH} = \overline{HB}$ , e  $CH$  bisettrice dell'angolo in  $C$ ; quindi i triangoli  $\triangle AHC$  e  $\triangle HCB$  sono entrambi non solo rettangoli ma anche...

*Hai motivato correttamente,* si sono isosceli e inoltre simmetrici rispetto a  $CH$ .

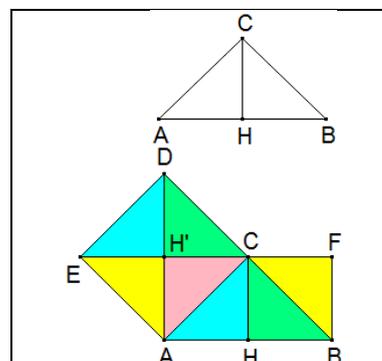
Se costruiamo (figura a lato) il quadrato di lato  $AC$ ,  $ACDE$ , esso ha per diagonali  $DA$  ed  $EC$  che s'intersecano nel loro punto medio  $H'$  e formano quattro triangoli rettangoli e isosceli che sono tra loro...

*Si bene,* isometrici, e lo sono anche con i triangoli  $\triangle AHC$  e  $\triangle HCB$ .

Realizziamo ora il rettangolo  $ABFH'$  le cui dimensioni sono  $AB$  e  $AH'$  isometrico ad  $AH$  proiezione di  $AC$  su  $AB$ ; allora tutti triangoli della seconda figura sono isometrici fra loro, cioè rettangoli e isosceli.

Come sono allora tra loro il quadrato e il rettangolo?...

*Si Dottò,* esatto, equivalenti perché equiscomposti.

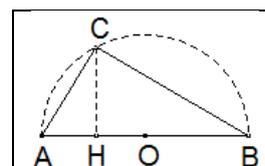


È spontaneo chiederci se tale proprietà vale anche nel caso in cui il triangolo  $\triangle ABC$  è solo rettangolo in  $C$  con  $CH$  altezza relativa all'ipotenusa.

Come possiamo costruire tale triangolo rettangolo? ... Si accettano suggerimenti... Se non ne vengono dopo una ragionevole attesa possiamo stimolarli con una opportuna domanda.

C'è qualche proprietà studiata mediante la quale si costruiscono triangoli certamente rettangoli?

*Bravo 7+,* prendiamo il punto  $C$  sulla semicirconferenza di centro  $O$  punto medio di  $AB$  e raggio  $AB/2$  (figura a fianco).



A questo punto prima di proseguire è opportuno verificare che gli allievi abbiano compreso bene il problema invitandoli a esporre con chiarezza le *premesse* e le *conclusioni* che abbiamo congetturato.

Vi ricordo che la buonanima del grande Cartesio ci ha insegnato che nessuno può risolvere un problema che non ha capito (spesso i giovani confondono addirittura l'ipotesi con la tesi).

Realizziamo allora il quadrato  $Q - ACDE$  - di lato  $AC$ . Dobbiamo ora costruire il rettangolo  $R$  che ha per lati  $AB$  e la proiezione di  $AC$  su  $AB$ ,  $AH$  (figura precedente).

Al solito chiediamoci se c'è qualche isometria che ci può aiutare per trovare il lato del rettangolo perpendicolare ad  $\overline{AB}$ .....

*Si, la tua è una buona idea:* la rotazione – chiamiamola  $\rho$  – di centro  $A$ , in senso antiorario di un angolo retto, trasforma il punto  $H$ , in  $H'$  e  $C$  in  $E$  perché  $\overline{AE} = \overline{AC}$  e  $\widehat{CAE}$  retto; il triangolo  $AHC$  possiede allora per associato  $AH'E$ , con  $H'$  sulla perpendicolare per  $A$  ad  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AH'} = \overline{AH}$  e  $\overline{EH'} = \overline{CH}$ .

$H'$  è così il vertice opposto a  $B$  del rettangolo  $R$ . Chiamiamo poi  $F$  il quarto vertice di  $R$  e  $G$  l'intersezione fra i segmenti  $\overline{DB}$  e  $\overline{H'F}$ .

Vi rammento che il nostro obiettivo è quello di provare l'equivalenza tra il quadrato  $ACDE$  e il rettangolo  $R$ ,  $ABFH'$ , che sono comunque *parallelogrammi*. (*Respice finem*, abbi *sempre* presente ciò che vuoi provare, suggeriva sempre **Cartesio**). Questa sollecitazione è utile perché i giovani spesso utilizzano le informazioni date dall'ipotesi traendone conclusioni che non sono finalizzate alla tesi.

Osserviamo attentamente la figura...; si accettano proposte... Se non ne arrivano in un tempo ragionevole possiamo dare un'imbeccata: richiamate alla mente la condizione perché due parallelogrammi siano equivalenti. Qualche suggerimento? ...

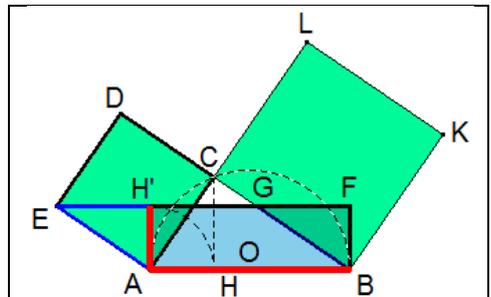
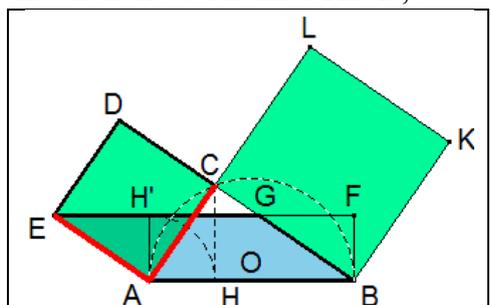
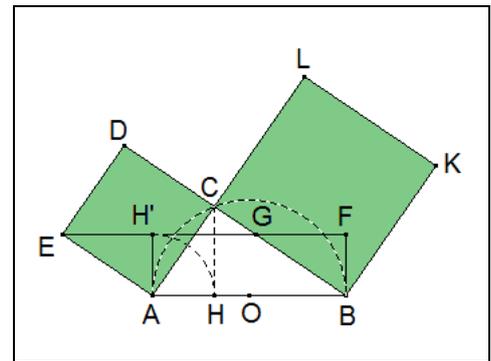
OK! Devono presentare stessa base e medesima altezza; ma i nostri non ce l'hanno. Allora, *come suggerisce ancora Cartesio*, cerchiamo un problema connesso con questo, ma che abbiamo già risolto: c'è un parallelogramma equivalente al quadrato? Riflettete su ciò...

Bene! Il quadrato  $ACDE$  e il parallelogramma  $ABGE$ , hanno la stessa base  $EA$  e medesima altezza  $AC$ , quindi sono equivalenti, come evidenziato nella figura successiva a destra.

A questo punto siamo a un passo dalla meta – ricordate la tesi – poiché...

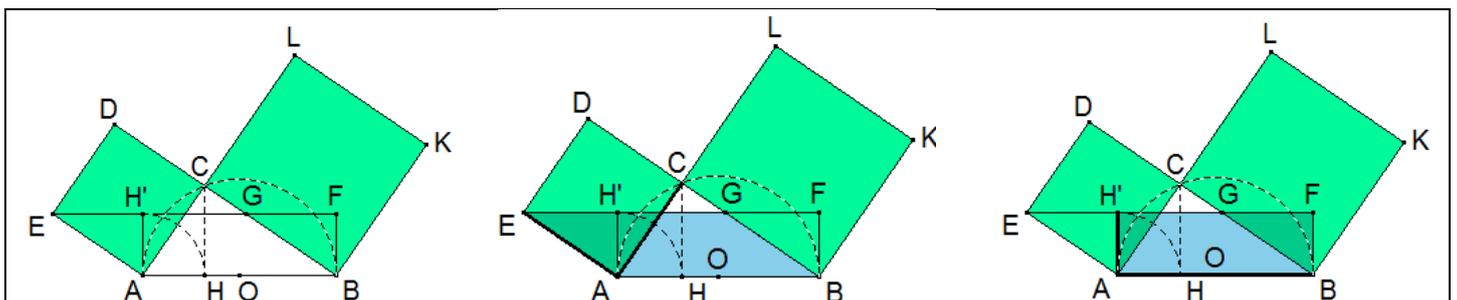
*Complimenti! Le due motivazioni sono entrambe corrette.*

- Alice afferma che il parallelogramma  $ABGE$  e il rettangolo  $ABFH'$  sono equivalenti perché hanno base comune in  $AB$  e stessa altezza  $AH'$ .
- Damiano dice che essi sono equiscomposti nel comune trapezio  $ABGH'$  e nei triangoli  $GBF$  per il rettangolo e  $AH'E$  per il parallelogramma, corrispondenti nella traslazione di vettore  $\overline{AB}$ .



Seppure con un poco di fatica, e questo è stimolante – altrimenti non ci si sentirebbe sarebbe gratificati - avete risolto il problema che ci eravamo posto. Esso è solitamente chiamato *I teorema di Euclide* relativo all'equivalenza, il cui enunciato è:

In ogni triangolo rettangolo il quadrato che ha per lato un cateto è equivalente al rettangolo i cui lati sono l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa.



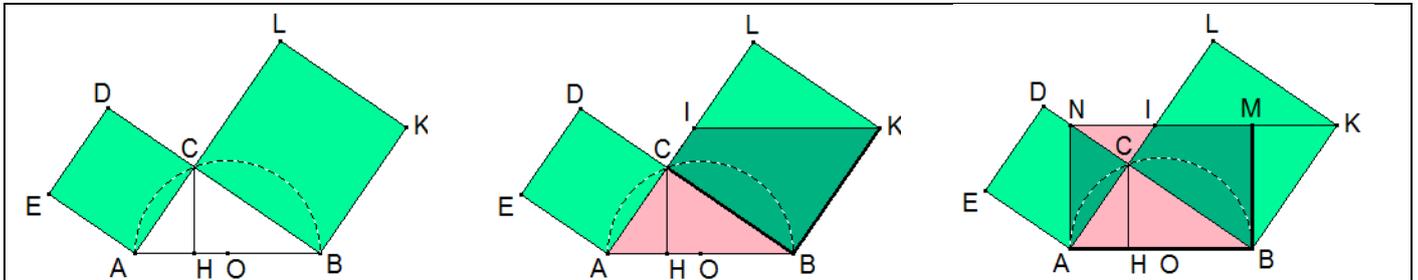
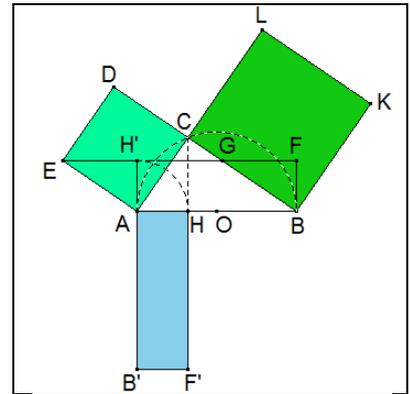
A questo punto, per evidenziare ancora più chiaramente il rettangolo **ABFH'** lo possiamo ruotare attorno ad **A** di un angolo retto nel senso positivo, cioè quello antiorario (**B'** ed **F'** sono ordinatamente i corrispondenti di **B** ed **F** nella rotazione eseguita in figura).

Per inciso, quello provato non è il primo teorema che si trova nel trattato *Elementi* di **Euclide** – che è il libro più letto e tradotto al mondo dopo *La Bibbia* – esso si trova come parte della dimostrazione del teorema di Pitagora che è la XXXXVI *Proposizione* del I Libro.

Procedendo analogamente col quadrato di lato **CB** e il rettangolo di base **AB** e altezza **HB**, otteniamo la successiva sequenza di parallelogrammi equivalenti.

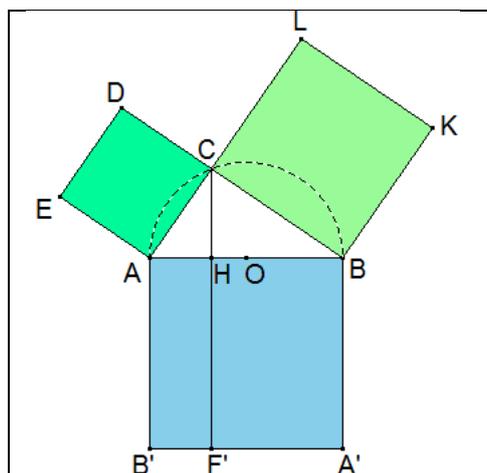
Il parallelogramma **ABKI** ha la stessa base **BK** e medesima altezza **CB** del quadrato **CBKL** (prima figura).

Il rettangolo **ABMN** presenta uguale base **AB** e stessa altezza **MB** del parallelogramma **ABKI** (seconda figura).



Adesso, ruotando **ABMN** attorno a **B** di un angolo retto in senso orario, otteniamo che.....

Esatto! Il rettangolo **ABMN** completa col rettangolo **AB'F'H** il quadrato che ha per lato l'ipotenusa **AB** nella figura 1.



Allora abbiamo provato che.....

*In ogni triangolo rettangolo il quadrato che ha per lato l'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati i cui lati sono i cateti.*

La proposizione dimostrata è il teorema più noto dell'umanità, il teorema di Pitagora.

Congratulazioni!

# 216. Il triangolo di Tartaglia e altre disposizioni numeriche

Stefano Borgogni  
e-mail: stfbrg@rocketmail.com

## SUNTO

Questo studio intende esaminare alcune disposizioni infinite di numeri interi, che si possono rappresentare con la classica struttura ortogonale della matrice (righe/colonne) o con altre forme geometriche. Saranno trattate disposizioni molto note e altre poco conosciute ma tutte con una caratteristica comune, quella di essere definite da regole di costruzione estremamente semplici.

## 1. IL TRIANGOLO DI TARTAGLIA

Cominciamo questa trattazione con quella che, probabilmente, è la disposizione di numeri interi più celebre in assoluto: il Triangolo di Tartaglia<sup>1</sup> o Triangolo di Pascal.

In Francia e nei paesi anglosassoni viene chiamato Triangolo di Pascal, poiché il grande matematico e filosofo francese gli dedicò il *Traité du triangle arithmétique* (1653) che ebbe notevole successo. In realtà il matematico italiano ne aveva già parlato un secolo prima nel suo *General trattato di numeri et misure* (1556). Dunque, per semplici ragioni cronologiche, scevre da qualsiasi campanilismo, in questo testo lo definiremo Triangolo di Tartaglia.

Comunque lo si voglia chiamare, l'origine di questo triangolo si perde nella proverbiale “notte dei tempi”: lo conosceva già il matematico, poeta e filosofo persiano Omar Khayyàm (vissuto intorno al 1100), che - a sua volta - ne aveva avuto notizia da fonti indiane o cinesi ancora precedenti.

Il triangolo ha tante e tali proprietà che ci vorrebbero più volumi per descriverle tutte e per approfondire i collegamenti - talora insospettabili - con le principali successioni numeriche, nonché le possibili applicazioni nei più svariati campi della matematica. E tutto ciò a fronte di una regola di costruzione semplicissima, comprensibile anche per un bambino delle scuole elementari.

Cominciamo con il riproporre le prime righe del Triangolo di Tartaglia.

|  |  |  |  |   |  |    |  |    |  |     |  |     |  |     |  |     |  |     |  |    |  |    |  |   |
|--|--|--|--|---|--|----|--|----|--|-----|--|-----|--|-----|--|-----|--|-----|--|----|--|----|--|---|
|  |  |  |  | 1 |  |    |  |    |  |     |  |     |  |     |  |     |  |     |  |    |  |    |  |   |
|  |  |  |  | 1 |  | 1  |  |    |  |     |  |     |  |     |  |     |  |     |  |    |  |    |  |   |
|  |  |  |  | 1 |  | 2  |  | 1  |  |     |  |     |  |     |  |     |  |     |  |    |  |    |  |   |
|  |  |  |  | 1 |  | 3  |  | 3  |  | 1   |  |     |  |     |  |     |  |     |  |    |  |    |  |   |
|  |  |  |  | 1 |  | 4  |  | 6  |  | 4   |  | 1   |  |     |  |     |  |     |  |    |  |    |  |   |
|  |  |  |  | 1 |  | 5  |  | 10 |  | 10  |  | 5   |  | 1   |  |     |  |     |  |    |  |    |  |   |
|  |  |  |  | 1 |  | 6  |  | 15 |  | 20  |  | 15  |  | 6   |  | 1   |  |     |  |    |  |    |  |   |
|  |  |  |  | 1 |  | 7  |  | 21 |  | 35  |  | 35  |  | 21  |  | 7   |  | 1   |  |    |  |    |  |   |
|  |  |  |  | 1 |  | 8  |  | 28 |  | 56  |  | 70  |  | 56  |  | 28  |  | 8   |  | 1  |  |    |  |   |
|  |  |  |  | 1 |  | 9  |  | 36 |  | 84  |  | 126 |  | 126 |  | 84  |  | 36  |  | 9  |  | 1  |  |   |
|  |  |  |  | 1 |  | 10 |  | 45 |  | 120 |  | 210 |  | 252 |  | 210 |  | 120 |  | 45 |  | 10 |  | 1 |

Vediamo ora alcune delle principali proprietà di questa disposizione infinita, tenendo presente che le righe orizzontali sono numerate a partire da  $r_0$  (quella contenente un solo 1) e le diagonali a partire da  $d_0$  (quella composta da tutti 1).

---

<sup>1</sup> Dal nome del matematico bresciano Niccolò Fontana (1499-1557), detto Tartaglia per le sue difficoltà ad articolare le parole, dovute a una ferita alla mandibola occorsagli da bambino.

## 1.1. Potenze di un binomio

Cominciamo con una proprietà assai nota del nostro Triangolo: il suo legame con le successive potenze di un generico binomio  $(a \pm b)$ .

Tra le tante formule matematiche apprese nel corso del liceo, una che normalmente tutti gli studenti ricordano è quella del quadrato del binomio:  $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ . I coefficienti numerici del polinomio risultante sono 1-2-1, e coincidono esattamente con i numeri che compongono la riga  $r_2$  del Triangolo di Tartaglia.

Ciò vale anche per tutte le successive potenze del binomio  $(a \pm b)^n$ . Ad esempio,  $r_4$  comprende i numeri 1-4-6-4-1 e, in effetti - ordinando il polinomio risultante per potenze decrescenti di  $a$  e crescenti di  $b$  - si verifica facilmente che  $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ .

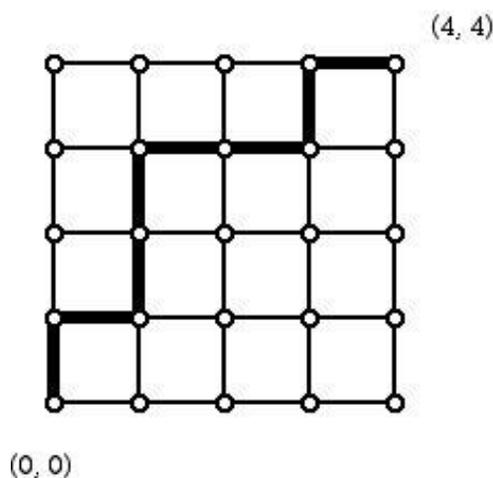
## 1.2. Triangolo di Tartaglia e calcolo combinatorio

Il Triangolo di Tartaglia ha molti e significativi collegamenti con il calcolo combinatorio.

Ad esempio, in quanti modi diversi si possono scegliere  $k$  elementi in un insieme di  $n$ ? Come è noto, la risposta è data dalla formula  $n! / k!(n-k)!$ . Ma si può ottenere il risultato in maniera assai più semplice, senza bisogno di calcolare i fattoriali di  $n$  e di  $k$ : è sufficiente prendere il numero all'intersezione tra  $n$ -esima riga e  $k$ -esima diagonale del Triangolo.

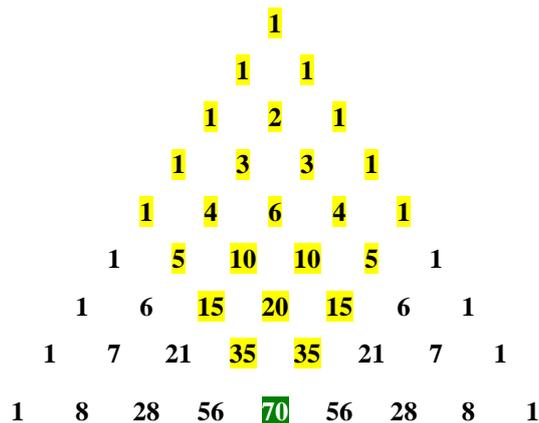
Per esempio, per sapere in quanti modi diversi posso scegliere 4 oggetti all'interno di un gruppo di 7, non è necessario applicare la formula ( $7! / 4! \times 3! = 5.040 / 24 \times 6 = 35$ ); basta guardare il numero posto all'incrocio tra  $r_7$  e  $d_4$ , e il gioco è fatto! (stavolta il punto esclamativo non c'entra niente con il fattoriale...).

Un'altra applicazione simile è la seguente: dato un reticolo di punti collegati orizzontalmente e verticalmente, come nella figura, quanti sono i percorsi diversi di distanza minima<sup>2</sup> che collegano due di tali punti?



Nel caso rappresentato in figura i possibili percorsi diversi che collegano il punto  $(0,0)$  con il punto  $(4,4)$  sono 70. Ebbene, tale risultato si può agevolmente ricavare dal Triangolo di Tartaglia tramite un semplice accorgimento grafico: basta ruotare il triangolo di 45 gradi in modo da trasformarlo in una matrice ortogonale e considerare ogni numero come uno dei punti del reticolo. Si ottiene così un rettangolo, nel quale il numero posto nel vertice opposto all'1 iniziale dà il risultato cercato.

<sup>2</sup> Il concetto di “distanza” è quello della cosiddetta “Geometria del taxi” (“Taxicab geometry” in inglese), in cui si immagina una città suddivisa in isolati quadrati e la distanza tra due punti equivale al percorso più breve che deve percorrere un’auto per passare da uno all’altro, muovendosi, ovviamente, soltanto per linee orizzontali o verticali.



|   |   |    |    |     |     |
|---|---|----|----|-----|-----|
| 1 | 1 | 1  | 1  | 1   | 1   |
| 1 | 2 | 3  | 4  | 5   | 6   |
| 1 | 3 | 6  | 10 | 15  | 21  |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35  | 56  |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70  | 126 |
| 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 |

### 1.3. Triangolo di Tartaglia e successioni numeriche

Si diceva degli stretti collegamenti esistenti tra il Triangolo di Tartaglia e le più note successioni numeriche; ecco alcuni esempi.

- La diagonale  $d_1$  è formata dai numeri naturali,  $d_2$  esprime i numeri triangolari (1-3-6-10...),  $d_3$  quelli tetraedrici<sup>3</sup> (1-4-10-20...) e così via: le successive diagonali  $d_4, d_5 \dots d_k$ , infatti, indicano l'equivalente dei numeri triangolari nello spazio a 4, 5 ... k dimensioni.
- Se consideriamo le diagonali meno inclinate del triangolo (nell'ordine, quelle composte da 1; 1; 1-1; 1-2; 1-3-1; 1-4-3; 1-5-6-1 etc.), la somma dei numeri che le compongono fornisce la successione di Fibonacci (1-1-2-3-5-8-13...)! Si tratta di una proprietà davvero notevole, poiché collega tra di loro due strutture numeriche fondamentali, che condividono la caratteristica di essere tanto semplici quanto ricche di applicazioni in tutti i campi della matematica (e non solo). Questa proprietà è stata messa in luce solo nella seconda metà del XIX secolo.
- Partendo dal vertice e scendendo in verticale, invece, si ha una sequenza di valori (1, 2, 6, 20, 70...) che - divisi successivamente per 1, 2, 3, 4, 5... - danno i cosiddetti Numeri di Catalan.<sup>4</sup>

### 1.4. Altre proprietà numeriche

Segnaliamo ancora altre tre proprietà numeriche del Triangolo di Tartaglia sulle quali - per brevità - non ci soffermiamo in questa sede:

- La somma dei numeri compresi nella riga  $r_n$  equivale a  $2^n$ . Ad esempio, la somma dei valori della riga  $r_5$  (1-5-10-10-5-1) vale 32, ossia  $2^5$ .

<sup>3</sup> Ai numeri triangolari, tetraedrici e ad altre tipologie di numeri figurati è dedicato un articolo pubblicato su questo stesso sito: <http://www.matematicamente.it/il-magazine/279-numero-16-dicembre-2011/7723-164-numeri-figurati>.

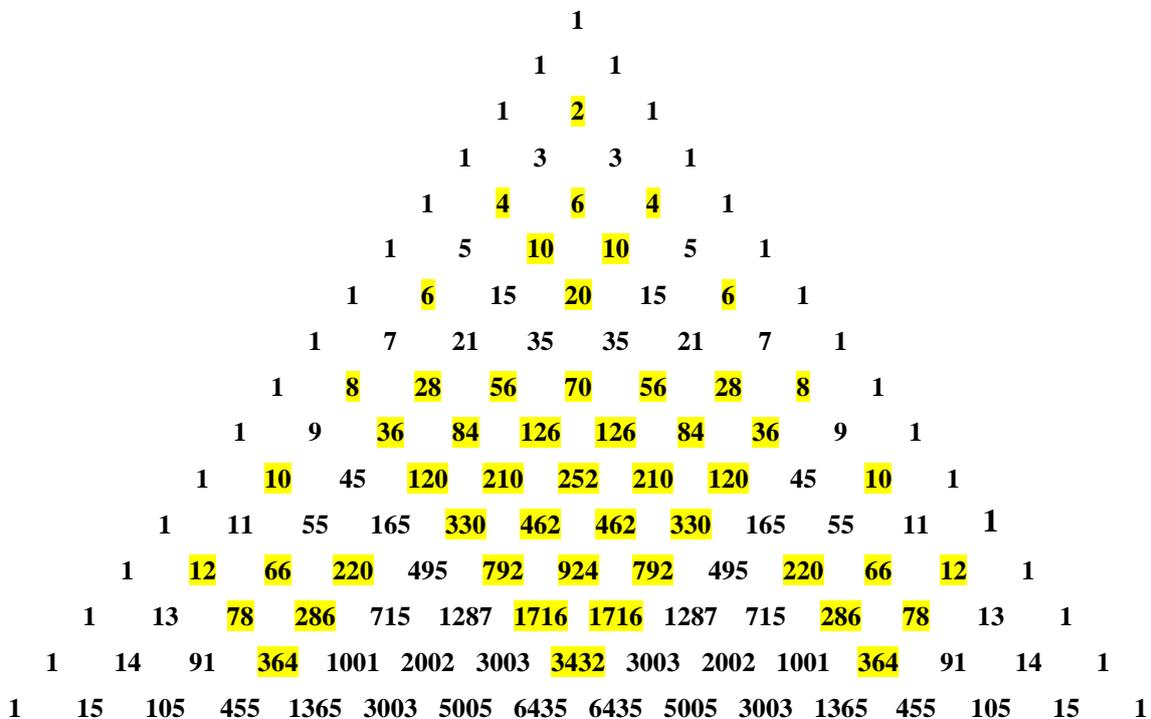
<sup>4</sup> I Numeri di Catalan (dal nome del matematico belga dell'800 Eugene Catalan) hanno svariate applicazioni nel calcolo combinatorio; ad esempio, rispondono alla domanda "In quanti modi diversi si può dividere un poligono convesso in triangoli, tracciando diagonali che non si intersecano?". La successione inizia con 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429...

- La riga  $r_n$  comprende esclusivamente numeri dispari se e solo se  $n=2^k-1$ . Ad esempio, 7 equivale a  $2^3-1$  e  $r_7$  è costituita dai numeri 1-7-21-35-35-21-7-1.
- A parte i due “1” agli estremi, la riga  $r_n$  è composta da numeri tutti divisibili per  $n$  se e solo se  $n$  è un numero primo. Ad esempio, la riga  $r_{11}$  è formata dai numeri 1-11-55-165-330-462-462-330-165-55-11-1, numeri che - come è facile verificare - sono tutti divisibili per 11.

### 1.5. Sottotriangoli

L'elenco potrebbe continuare a lungo, ma ci fermiamo qui passando, invece, a esaminare un'altra notevole proprietà che risulta evidente utilizzando i colori o altri accorgimenti grafici.

Allargando sufficientemente il triangolo e identificando in maniera differente i numeri pari e quelli dispari, si possono osservare diverse forme triangolari (con il vertice in basso), di dimensioni sempre maggiori. Riportiamo una parte del triangolo in cui - per maggiore chiarezza - sarà applicato un fondino colorato ai numeri pari.



Ma c'è di più: la stessa proprietà vale anche se si prendono in considerazione non i numeri pari o dispari (dunque, divisibili o non divisibili per 2), ma quelli che sono multipli o meno di un qualsiasi numero primo. Nel presente studio si propone il caso del numero 3, per il quale - anche con un numero limitato di righe - si riescono a distinguere in modo sufficientemente chiaro i triangoli “capovolti” di cui si è detto; disponendo di uno spazio maggiore, si potrebbe fare lo stesso discorso con 5, 7, 11 o un altro qualsiasi numero primo.

|   |    |    |     |    |     |     |      |     |      |      |      |      |       |      |       |      |       |     |      |     |      |    |      |    |     |   |     |  |    |   |
|---|----|----|-----|----|-----|-----|------|-----|------|------|------|------|-------|------|-------|------|-------|-----|------|-----|------|----|------|----|-----|---|-----|--|----|---|
| 1 |    |    |     |    |     |     |      |     |      |      |      |      |       |      |       |      |       |     |      |     |      |    |      |    |     |   |     |  |    |   |
| 1 |    |    |     |    |     |     |      |     |      |      |      |      |       | 1    |       |      |       |     |      |     |      |    |      |    |     |   |     |  |    |   |
| 1 |    |    |     |    |     |     |      |     |      |      |      |      | 2     |      | 1     |      |       |     |      |     |      |    |      |    |     |   |     |  |    |   |
| 1 |    |    |     |    |     |     |      |     |      |      |      | 3    |       | 3    |       | 1    |       |     |      |     |      |    |      |    |     |   |     |  |    |   |
| 1 |    |    |     |    |     |     |      |     |      |      | 4    |      | 6     |      | 4     |      | 1     |     |      |     |      |    |      |    |     |   |     |  |    |   |
| 1 |    |    |     |    |     |     |      |     |      | 5    |      | 10   |       | 10   |       | 5    |       | 1   |      |     |      |    |      |    |     |   |     |  |    |   |
| 1 |    |    |     |    |     |     |      |     | 6    |      | 15   |      | 20    |      | 15    |      | 6     |     | 1    |     |      |    |      |    |     |   |     |  |    |   |
| 1 |    |    |     |    |     |     |      | 7   |      | 21   |      | 35   |       | 35   |       | 21   |       | 7   |      | 1   |      |    |      |    |     |   |     |  |    |   |
| 1 |    |    |     |    |     |     | 8    |     | 28   |      | 56   |      | 70    |      | 56    |      | 28    |     | 8    |     | 1    |    |      |    |     |   |     |  |    |   |
| 1 |    |    |     |    |     | 9   |      | 36  |      | 84   |      | 126  |       | 126  |       | 84   |       | 36  |      | 9   |      | 1  |      |    |     |   |     |  |    |   |
| 1 |    |    |     |    | 10  |     | 45   |     | 120  |      | 210  |      | 252   |      | 210   |      | 120   |     | 45   |     | 10   |    | 1    |    |     |   |     |  |    |   |
| 1 |    |    |     | 11 |     | 55  |      | 165 |      | 330  |      | 462  |       | 462  |       | 330  |       | 165 |      | 55  |      | 11 |      | 1  |     |   |     |  |    |   |
| 1 |    |    | 12  |    | 66  |     | 220  |     | 495  |      | 792  |      | 924   |      | 792   |      | 495   |     | 220  |     | 66   |    | 12   |    | 1   |   |     |  |    |   |
| 1 |    | 13 |     | 78 |     | 286 |      | 715 |      | 1287 |      | 1716 |       | 1716 |       | 1287 |       | 715 |      | 286 |      | 78 |      | 13 |     | 1 |     |  |    |   |
| 1 | 14 |    | 91  |    | 364 |     | 1001 |     | 2002 |      | 3003 |      | 3432  |      | 3003  |      | 2002  |     | 1001 |     | 364  |    | 91   |    | 14  |   | 1   |  |    |   |
| 1 | 15 |    | 105 |    | 455 |     | 1365 |     | 3003 |      | 5005 |      | 6435  |      | 6435  |      | 5005  |     | 3003 |     | 1365 |    | 455  |    | 105 |   | 15  |  | 1  |   |
| 1 | 16 |    | 120 |    | 560 |     | 1820 |     | 4368 |      | 8008 |      | 11440 |      | 12870 |      | 11440 |     | 8008 |     | 4368 |    | 1820 |    | 560 |   | 120 |  | 16 | 1 |

### 1.6. Un gioco di magia

Tra le numerose applicazioni del Triangolo di Tartaglia in ambito non strettamente matematico, ne citiamo ancora una nella quale questa disposizione numerica viene utilizzata per un gioco di magia tutt'altro che banale.

Il gioco si sviluppa attraverso i seguenti passi:

- Dite a qualcuno di scrivere cinque numeri di una cifra (il gioco funziona con numeri di qualsiasi dimensione, ma per semplicità conviene limitarsi a quelli più piccoli.) in sequenza.
- Guardate i numeri e con un rapido calcolo mentale scrivete un numero su un foglietto che metterete in tasca.
- Dite di sommare i primi due numeri, poi il secondo e il terzo e così via, calcolare le radici numeriche dei risultati ottenuti (es.  $6+7 = 13 \rightarrow$  radice numerica = 4) e scriverle al di sotto della coppia di partenza.
- Fate ripetere più volte il procedimento fino a quando rimane un solo numero.

A questo punto, tirate fuori dalla tasca il vostro foglietto, in cui sarà scritto esattamente lo stesso numero.

Come avete fatto? Basta moltiplicare i cinque numeri iniziali rispettivamente per 1, 4, 6, 4 e 1 (i coefficienti della riga  $r_4$  del Triangolo di Tartaglia), fare la somma e calcolare la radice numerica; si tratta di un calcolo mentale che per una/un appassionata/o di matematica dovrebbe essere abbastanza agevole.

Facciamo un esempio con cinque numeri a caso:

$$\begin{array}{cccccc}
 2 & 3 & 5 & 7 & 4 & \rightarrow & 2 \times 1 + 3 \times 4 + 5 \times 6 + 7 \times 4 + 4 \times 1 = 2+3+3+1+4 = 4 \\
 & 5 & 8 & 3 & 2 & & \\
 & & 4 & 2 & 5 & & \\
 & & & 6 & 7 & & \\
 & & & & 4 & & 
 \end{array}$$

Il gioco appare ancora più sbalorditivo (anche se è più laborioso per chi scrive) se si parte con 10 numeri. In tal caso, infatti, i coefficienti da utilizzare sono quelli della riga  $r$ , del Triangolo, ossia 1-9-36-84-126-126-84-36-9-1, e ben sei di questi - in quanto multipli di 9 - hanno la radice numerica pari a 0, dunque si possono tranquillamente ignorare nel calcolo mentale di cui si è detto.

Basta, allora, considerare il primo e l'ultimo dei 10 numeri iniziali, sommarli al triplo del 4° e del 7°, trovare la radice numerica e, voilà, il gioco è fatto!

Per esempio:

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 | 4 | 8 | 7 | 3 | 1 | 6 | 4 |
|   | 5 | 8 | 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 7 | 1 |
|   |   | 4 | 8 | 3 | 0 | 7 | 5 | 2 | 8 |
|   |   |   | 3 | 2 | 3 | 7 | 3 | 7 | 1 |
|   |   |   |   | 5 | 5 | 1 | 1 | 1 | 8 |
|   |   |   |   |   | 1 | 6 | 2 | 2 | 0 |
|   |   |   |   |   |   | 7 | 8 | 4 | 2 |
|   |   |   |   |   |   |   | 6 | 3 | 6 |
|   |   |   |   |   |   |   |   | 0 | 0 |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   | 0 |

Con poche semplici operazioni, operando come sopra indicato, si può agevolmente pervenire allo stesso risultato:  $2 + 4 + 4 \times 3 + 3 \times 3 = 2 + 4 + 3 + 0 = 0$ .

## 2 - TRIANGOLO DI BELL

Passiamo adesso a un triangolo assai meno celebre, il cosiddetto Triangolo di Bell (dal nome del matematico Eric Temple Bell) che si può costruire in maniera simile al Triangolo di Tartaglia, per mezzo di un procedimento additivo più complicato da spiegare che da mettere in pratica.

Si scrive 1 nella prima riga. La seconda riga inizia con l'ultimo numero della riga precedente, poi si aggiunge come secondo numero la somma tra il numero precedente e quello posizionato al di sopra.

$$1$$

$$1 \quad 2 \quad (1+1)$$

La terza riga inizia con l'ultimo numero della seconda; poi si scrive il numero ottenuto sommando il numero precedente con il numero che gli sta sopra e si ripete due volte lo stessa operazione:

$$1$$

$$1 \quad 2$$

$$2 \quad 3 \quad (2+1) \quad 5 \quad (3+2)$$

Continuando allo stesso modo si ottiene un triangolo del quale, per brevità, ci limitiamo qui a mostrare le prime righe.

|          |          |          |           |           |            |            |  |  |  |
|----------|----------|----------|-----------|-----------|------------|------------|--|--|--|
| <b>1</b> |          |          |           |           |            |            |  |  |  |
| 1        | <b>2</b> |          |           |           |            |            |  |  |  |
| 2        | 3        | <b>5</b> |           |           |            |            |  |  |  |
| 5        | 7        | 10       | <b>15</b> |           |            |            |  |  |  |
| 15       | 20       | 27       | 37        | <b>52</b> |            |            |  |  |  |
| 52       | 67       | 87       | 114       | 151       | <b>203</b> |            |  |  |  |
| 203      | 255      | 322      | 409       | 523       | 674        | <b>877</b> |  |  |  |

Gli stessi numeri si possono disporre in una forma triangolare simile a quella di un Triangolo di Tartaglia rovesciato:

|          |          |          |           |           |            |            |     |
|----------|----------|----------|-----------|-----------|------------|------------|-----|
| <b>1</b> | <b>2</b> | <b>5</b> | <b>15</b> | <b>52</b> | <b>203</b> | <b>877</b> | ... |
|          | 1        | 3        | 10        | 37        | 151        | 674        | ... |
|          |          | 2        | 7         | 27        | 114        | 523        | ... |
|          |          |          | 5         | 20        | 87         | 409        | ... |
|          |          |          | 15        | 67        | 322        | ...        |     |
|          |          |          | 52        | 255       | ...        |            |     |
|          |          |          | 203       | ...       |            |            |     |
|          |          |          |           | ...       |            |            |     |

Questo triangolo ha una notevole proprietà: ogni numero equivale alla differenza tra i 2 numeri che stanno sopra di esso, rispettivamente a destra e a sinistra. In altre parole, lo potremmo definire un Triangolo di Tartaglia “sottrattivo” (ammesso che questa parola esista), anziché additivo.

I numeri evidenziati in grassetto costituiscono una successione, i cosiddetti **Numeri di Bell**, che ha una notevole importanza nel calcolo combinatorio.

In particolare, questa sequenza di elementi  $B_1, B_2 \dots B_n$  rappresenta il numero delle possibili partizioni di un insieme di  $n$  elementi, cioè il numero di modi in cui questo insieme può essere ottenuto come unione disgiunta di suoi sottoinsiemi non vuoti. Un esempio può chiarire meglio il concetto:  $B_3 = 5$  in quanto per un insieme di tre elementi  $\{a,b,c\}$  esistono cinque differenti modi di dividerlo in sottoinsiemi non vuoti:  $\{a\}, \{b\}, \{c\} / \{a,b\}, \{c\} / \{a,c\}, \{b\} / \{a\}, \{b,c\} / \{a,b,c\}$ .

La questione si può porre in altri termini: se ho  $n$  oggetti, in quanti modi diversi posso disporli in  $n$  scatole non distinguibili tra di loro? Evidentemente, nel caso di 1 oggetto e 1 scatola esiste 1 sola possibile disposizione; per  $n=2$  le possibilità sono 2 (entrambi gli oggetti in una scatola oppure 1 oggetto in ciascuna scatola); per  $n=3$  il risultato è 5 e così via.

Concludiamo questa parte con una significativa applicazione dei Numeri di Bell: data una poesia di  $n$  versi, essi indicano il numero dei possibili schemi differenti di rima. Ad esempio, una quartina offre 15 possibilità: aaaa, aaab, aaba, abaa, baaa, aabb, abab, abba, aabc, abac, abca, abbc, abcb, abcc, abcd.

Salendo nel numero di versi, le possibili rime differenti aumentano in maniera vertiginosa: ad esempio, se esaminassimo un poema di 14 versi (la misura del sonetto, la forma poetica più classica della nostra tradizione letteraria), potremmo scoprire che esistono ben 190.899.322 schemi diversi di rima!

### 3 - MATRICI DI WYTHOFF E DI STOLARSKY

Facciamo ancora un breve accenno a due disposizioni di numeri poco conosciute, ma che presentano caratteristiche senza dubbio interessanti: le cosiddette matrici di Wythoff e di Stolarsky.<sup>5</sup>

Anche in questo caso ci troviamo di fronte a una disposizione infinita di numeri interi, stavolta nella più consueta forma ortogonale anziché in quella triangolare.

Per cominciare, vediamo le prime 10 righe e 12 colonne di entrambe le matrici.

---

<sup>5</sup> Dal nome di due matematici, l'olandese Abraham Wythoff (celebre soprattutto per l'invenzione del gioco di strategia noto come *Wythoff's game*, una sorta di “Nim”) e lo statunitense Kenneth B. Stolarsky.

**Matrice di Wythoff**

|    | 1  | 2  | 3  | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9     | 10    | 11    | 12    |
|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|-------|-------|-------|
| 1  | 1  | 2  | 3  | 5   | 8   | 13  | 21  | 34  | 55    | 89    | 144   | 233   |
| 2  | 4  | 7  | 11 | 18  | 29  | 47  | 76  | 123 | 199   | 322   | 521   | 843   |
| 3  | 6  | 10 | 16 | 26  | 42  | 68  | 110 | 178 | 288   | 466   | 754   | 1.220 |
| 4  | 9  | 15 | 24 | 39  | 63  | 102 | 165 | 267 | 432   | 699   | 1.131 | 1.830 |
| 5  | 12 | 20 | 32 | 52  | 84  | 136 | 220 | 356 | 576   | 932   | 1.508 | 2.440 |
| 6  | 14 | 23 | 37 | 60  | 97  | 157 | 254 | 411 | 665   | 1.076 | 1.741 | 2.817 |
| 7  | 17 | 28 | 45 | 73  | 118 | 191 | 309 | 500 | 809   | 1.309 | 2.118 | 3.427 |
| 8  | 19 | 31 | 50 | 81  | 131 | 212 | 343 | 555 | 898   | 1.453 | 2.351 | 3.804 |
| 9  | 22 | 36 | 58 | 94  | 152 | 246 | 398 | 644 | 1.042 | 1.686 | 2.728 | 4.414 |
| 10 | 25 | 41 | 66 | 107 | 173 | 280 | 453 | 733 | 1.186 | 1.919 | 3.105 | 5.024 |

**Matrice di Stolarsky**

|    | 1  | 2  | 3  | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9     | 10    | 11    | 12    |
|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|-------|-------|-------|
| 1  | 1  | 2  | 3  | 5   | 8   | 13  | 21  | 34  | 55    | 89    | 144   | 233   |
| 2  | 4  | 6  | 10 | 16  | 26  | 42  | 68  | 110 | 178   | 288   | 466   | 754   |
| 3  | 7  | 11 | 18 | 29  | 47  | 76  | 123 | 199 | 322   | 521   | 843   | 1.364 |
| 4  | 9  | 15 | 24 | 39  | 63  | 102 | 165 | 267 | 432   | 699   | 1.131 | 1.830 |
| 5  | 12 | 19 | 31 | 50  | 81  | 131 | 212 | 343 | 555   | 898   | 1.453 | 2.351 |
| 6  | 14 | 23 | 37 | 60  | 97  | 157 | 254 | 411 | 665   | 1.076 | 1.741 | 2.817 |
| 7  | 17 | 28 | 45 | 73  | 118 | 191 | 309 | 500 | 809   | 1.309 | 2.118 | 3.427 |
| 8  | 20 | 32 | 52 | 84  | 136 | 220 | 356 | 576 | 932   | 1.508 | 2.440 | 3.948 |
| 9  | 22 | 36 | 58 | 94  | 152 | 246 | 398 | 644 | 1.042 | 1.686 | 2.728 | 4.414 |
| 10 | 25 | 40 | 65 | 105 | 170 | 275 | 445 | 720 | 1.165 | 1.885 | 3.050 | 4.935 |

Che cosa hanno queste due matrici di particolarmente significativo? Esaminandole più attentamente, si può osservare che godono di alcune notevoli proprietà:

- La prima riga (uguale per entrambe) è formata dai celeberrimi numeri di Fibonacci.
- Ogni riga, non solo la prima, soddisfa la regola di costruzione delle successioni di Fibonacci generalizzate.<sup>6</sup>
- Ogni numero intero appare una e una sola volta nella matrice.
- Il primo termine di ogni riga è il più piccolo intero non presente nelle righe precedenti.

<sup>6</sup> Una “Successione di Fibonacci generalizzata” ( $S_n$ ) si costruisce in base alla formula ricorsiva  $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$ , partendo da due numeri interi a piacere. Lasciando da parte i Numeri di Fibonacci, la successione generalizzata più semplice è quella composta dai cosiddetti “Numeri di Lucas” (dal nome del matematico francese dell’800 Edouard Lucas), che inizia con la coppia 1-3.

Si può notare che in alcuni casi le righe delle due matrici sono esattamente uguali; ad esempio, prendendo in esame le prime righe, si riscontra una coincidenza assoluta per  $r_1, r_4, r_6, r_7, r_9$ .

Non si sa se esista una qualche regola per stabilire in che modo si susseguano le righe identiche all'interno delle due matrici. Egualmente, non è noto se le righe coincidenti siano infinite, anche se tale ipotesi sembra assai probabile.

Infine, segnaliamo una curiosità riguardante l'ottava riga della matrice di Wythoff: i suoi valori corrispondono alla somma di numeri appartenenti alle due sequenze additive fondamentali, quella di Fibonacci e quella di Lucas.

In particolare, i numeri di questa particolare riga sono esprimibili nella forma  $F_{n+1} + L_n$ , a partire da  $n=5$ : 19 è pari alla somma tra  $F_6$  (8) e  $L_5$  (11), 31 equivale a  $F_7$  (13) e  $L_6$  (18) e così via. Per maggiore chiarezza, riportiamo in una semplice tabella quanto appena detto.

|                                 |    |    |    |    |     |     |     |     |     |
|---------------------------------|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Numeri di Fibonacci (da $F_6$ ) | 8  | 13 | 21 | 34 | 55  | 89  | 144 | 233 | ... |
| Numeri di Lucas (da $L_5$ )     | 11 | 18 | 29 | 47 | 76  | 123 | 199 | 322 | ... |
| Matrice di Wythoff - Riga 8     | 19 | 31 | 50 | 81 | 131 | 212 | 343 | 555 | ... |

## 217. Lo scaffale dei libri

### “Elementi di orientamento” di M. T. Mazzucato

Dopo lavori dedicati al binocolo, alla bussola e al globo terrestre, grazie ai suoi interessi che spaziano dalla topografia all’astronomia, Michele Mazzucato ha deciso di dedicare questa opera all’orientamento.

Come ci dice nella presentazione il prof. Enrico Maddalena, che si occupa di orientamento da oltre quarant’anni, ciò che traspare dalle opere di Mazzucato è il suo entusiasmo per i fenomeni naturali, che indaga con spirito scientifico: “concretizza il suo stupore per la natura, affrontando gli argomenti che via via lo appassionano, con una indagine a tutto tondo, avvicinandosi a essi da ogni angolo.”

Il libro è un “prontuario che raccoglie utili informazioni, metodi semplici e pratici, numerosi dati e procedimenti passo-passo”. Il testo si divide in quattro parti, precedute da un indice dettagliato, che permette di trovare agevolmente ciò che è di proprio interesse.

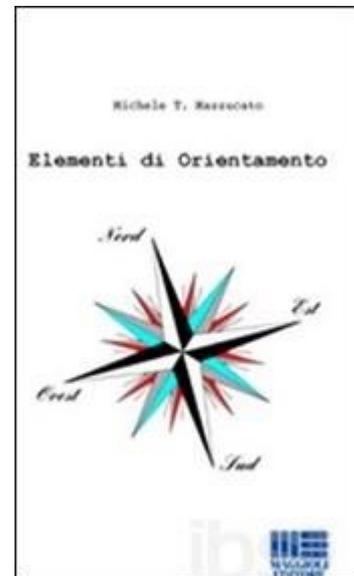
Nella prima parte, dedicata alla bussola, lo strumento principe dell’orientamento, l’autore procede con la classificazione dello strumento a cui fa seguito una sua breve storia. Scopriamo così che i primi in Europa a usare la bussola furono gli amalfitani, che contribuirono a perfezionarla: importata dagli arabi, è in realtà stata inventata dai cinesi. D’altra parte, il magnetismo ha fatto la sua comparsa in Europa solo in un’epoca relativamente recente, mentre in Cina era utilizzato da secoli. Il capitolo procede poi con alcune indicazioni per l’uso pratico della bussola.

La seconda parte è dedicata all’orientamento: interessante la spiegazione su come individuare il Nord grazie a un orologio e al Sole, soprattutto se confrontata con quella di come si può raggiungere lo stesso obiettivo durante la notte, usando la Luna. In tal caso, il procedimento è più complesso, visto che bisogna usare un metodo diverso a seconda delle varie fasi lunari. Inoltre, l’autore ci fornisce le istruzioni per costruire un notturnalabio, che ci aiuta a conoscere l’ora notturna con maggior precisione, grazie alla costellazione dell’Orsa Maggiore e alla Stella Polare.

La terza parte è dedicata alla cartometria e, in questo caso, ci sono indicazioni dettagliate su come misurare le distanze, le aree, le pendenze, utilizzando semplicemente una carta geografica. Non mancano, nelle determinazioni pratiche, interessanti applicazioni dei teoremi studiati al liceo, come il teorema di Talete che ci permette di determinare l’altezza di un oggetto, utilizzandone l’ombra o i triangoli, oppure l’applicazione della cinematica unidimensionale, per determinare – ad esempio – la profondità di un pozzo, con il metodo acustico.

L’ultima parte è dedicata alle appendici: dai rapporti di scala, che ci vengono descritti non solo con una tavola dettagliata, ma anche con un simpatico metodo pratico, agli elementi di trigonometria con le soluzioni dei triangoli, dalla direzione e nomenclatura dei venti alla posizione angolare del sole all’alba o al tramonto, fino ad arrivare ai fusi orari, le ventisette tavole ci permettono di ottenere tutte le informazioni necessarie per il nostro orientamento.

In conclusione, troviamo un glossario, dal quale possiamo ricavare anche le istruzioni per realizzare una bussola, e una bibliografia particolarmente ricca, a dimostrazione del grande lavoro di approfondimento svolto dall’autore.



Interessanti e simpatiche le citazioni che accompagnano l'opera, come quella di apertura, da "Alice nel paese delle meraviglie" di Lewis Carroll: "Inizia dall'inizio e vai avanti finché non arrivi alla fine: poi, fermati."

Daniela Molinari

### “La sezione aurea” di Mario Livio

La sezione aurea, protagonista indiscussa di questo testo, ci accompagna nel mondo dell'arte, della musica, della poesia, della natura e della fisica, passando attraverso la storia della matematica. Dopo il primo capitolo, nel quale l'autore ci presenta il percorso che verrà affrontato nell'opera, Livio ripercorre la storia della matematica, fin dalla nascita dei sistemi di numerazione.

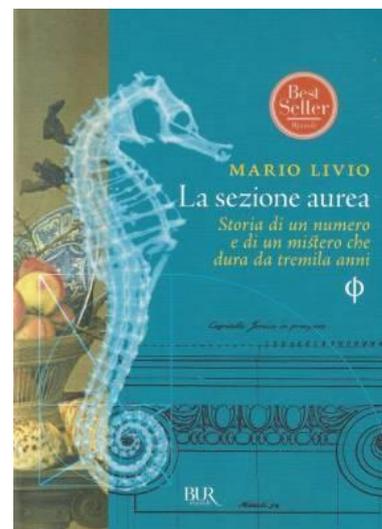
Pare che gli irrazionali siano dovuti alla scuola pitagorica e che l'incommensurabilità sia nata dal confronto tra la diagonale e il lato del quadrato. Per quanto alcuni studiosi suppongano che anche la piramide di Cheope porti in sé il rapporto aureo, non ci sono prove che gli Egizi lo conoscessero. Solo con Platone e i poliedri regolari, per la costruzione dei quali il rapporto aureo è indispensabile, si può dire che faccia la sua comparsa il più irrazionale degli irrazionali.

Con gli Elementi di Euclide, tale valore viene non solo nominato, ma anche discusso, perché permette di costruire il pentagono.

La matematica araba non offre grandi risultati dal punto di vista della geometria, puntando molto di più sull'algebra, perciò con il quinto capitolo – intitolato “Figlio di una buona disposizione” – approdiamo al 1200, con Fibonacci: nell'opera principale del matematico pisano, il *Liber abbaci*, la sezione aurea è usata consciamente per la soluzione di alcuni problemi, ma ne vengono aumentate anche le applicazioni. Inaspettatamente, grazie alla successione di Fibonacci, nella quale si intrecciano matematica e natura, ritroviamo la sezione aurea, anche se bisogna aspettare Keplero, che nota come il quoziente tra un numero della serie e il suo precedente tenda al rapporto aureo. D'altra parte, il fisico, divenuto famoso per le sue tre leggi dell'astronomia, ha individuato nei solidi platonici un ottimo modello per rappresentare le orbite dei pianeti.

Precedentemente, la collaborazione tra Luca Pacioli e Leonardo da Vinci ha portato alla pubblicazione, nel 1509, del *Compendio de divina proportione*, che ha permesso di aumentare l'interesse per la sezione aurea, dopo che il mondo dell'arte, con Piero della Francesca e Albrecht Dürer, si è avvicinato alla matematica, nella quale ha trovato la propria dimensione per affrontare lo studio della prospettiva. Per quanto, comunque, alcuni studiosi siano convinti di aver trovato la sezione aurea in molte opere pittoriche o architettoniche, solo conoscendo la struttura che ha dato origine all'opera possiamo in qualche modo essere certi della sua presenza. Ecco quindi che nelle opere di Paul Sérusier troviamo il rapporto aureo per “disciplinare” le sue invenzioni, mentre Le Corbusier, dopo un'iniziale diffidenza, ritiene, con il suo “Modulor”, di poter conferire dimensioni armoniose agli oggetti utilizzati da ognuno di noi nella quotidianità. L'autore presenta con precisione le varie ipotesi e, al termine della carrellata, interviene con il proprio punto di vista: la sezione aurea è meno diffusa, soprattutto tra le opere d'arte del passato, di quanto si pensi.

La ricerca della sezione aurea nell'arte, nella musica e nella poesia va a scontrarsi, direttamente, con il concetto di bellezza: se la bellezza matematica, per quanto difficile da capire per i profani, può in qualche modo essere



spiegata, ciò che rende bella un'opera d'arte, un brano musicale o una poesia non è così chiaro, visto che va a toccare le corde della nostra emotività.

L'esplorazione di Livio si conclude con la scoperta, negli anni Ottanta del secolo scorso, dell'ingegnere israeliano Dany Schectman che ha trovato una lega metallica la cui struttura non assomiglia ai cristalli fino ad allora noti. La cosa sorprendente è che, fino a quel momento, si era rimasti convinti che, come nella tassellazione del piano non è possibile usare i pentagoni, così nell'ambito tridimensionale non possono esserci simmetrie quintuple.

Nel 1974, lo studio svolto da Roger Penrose, fisico di Oxford, impegnato nella tassellazione del piano con figure non regolari, ma che in qualche modo possono essere ricondotte a decagoni sovrapposti, è diventato fondamentale per capire le scoperte di Schectman. In altre parole, questa matematica, apparentemente slegata dalla realtà, ha spiegato la realtà. Un po' come è successo con i frattali di Mandelbrot.

L'ultimo capitolo dell'opera indaga la concezione della matematica: scoperta? Invenzione? La posizione dell'autore è proprio a metà tra le due interpretazioni, un po' come succede alla natura della luce, che è sia ondulatoria che corpuscolare. Quest'ultimo esempio, come altri nel corso della narrazione, ci rimanda alle origini dell'autore, che non è un matematico ma un astrofisico, ricercatore allo Space Telescope Science Institute.

Daniela Molinari

### “Il Binocolo” di M. T. Mazzucato

Il binocolo è uno dei più complessi strumenti ottici. Il libro scritto da Mazzucato è “un utile manuale di riferimento”, nel quale ci viene fornito “il maggior numero possibile di elementi necessari per poter conoscere e valutare, anche da soli, le differenti caratteristiche di questi utilissimi e universalmente diffusi strumenti”.

Il testo comincia con una presentazione storica: non possono mancare i riferimenti a Galileo Galilei, del quale ci vengono fornite alcune citazioni, anche se la paternità di questo strumento non potrà mai essere nota con certezza. Galilei ebbe il merito di apportare miglioramenti tali da poterne costruire uno capace di oltre trenta ingrandimenti.

Lo strumento viene descritto in tutte le sue caratteristiche, distinguendo tra i vari tipi di binocoli e riconoscendone vantaggi e svantaggi: se da un lato i binocoli sono strumenti ottici dalle buone prestazioni a un costo relativamente basso e sono di facile utilizzo, dall'altro forniscono un basso ingrandimento e il sistema ottico che li caratterizza è così complesso da rendere molto probabile la presenza di difetti.

L'autore elenca diciannove parametri che possono modificarne le prestazioni: alcune tabelle aiutano il lettore a districarsi meglio tra i parametri elencati.

Il binocolo può avere molteplici utilizzi: la maggior parte delle persone lo utilizza per godersi il panorama, altri ne hanno fatto un compagno inseparabile per il proprio hobby del birdwatching, alcuni lo usano in campo sportivo o tecnico. Per coloro che lo utilizzano in campo astronomico, non mancano le indicazioni per effettuare le migliori misurazioni, tanto che le appendici del testo sono dedicate proprio all'osservazione astronomica.

Partendo da un decalogo dell'osservazione del cielo a occhio nudo o con il binocolo, viene indicato un programma per il computer di facile utilizzo e si



procede poi con dieci elenchi che possono guidare le osservazioni: gli oggetti del cielo da osservare nelle varie stagioni, le stelle doppie, le costellazioni, le stelle più luminose del cielo, fino ad arrivare ad alcune note di astronomia per i più esperti.

Per quanti, come la sottoscritta, dovessero far uso del binocolo con gli occhiali, vengono fornite indicazioni preziose, oltre ad una tabella riassuntiva con le caratteristiche dell'occhio umano.

L'autore specifica, inoltre, che un utilizzo combinato di binocolo e macchina fotografica richiede grandi abilità ed esperienza, ma dà alcune indicazioni per svolgere al meglio il proprio lavoro, con alcune tabelle che permettono al lettore di orientarsi tra massimo tempo di esposizione e angoli di campo.

Quando utilizziamo il binocolo per i nostri hobbies, non dobbiamo dimenticare che ci sono dei fattori atmosferici che possono influenzare la nostra osservazione, come le turbolenze atmosferiche che danno un effetto tremolante: se vogliamo ottenere un'immagine il più possibile nitida, non ci resta che utilizzare dei filtri appropriati.

In conclusione, Mazzucato dà indicazioni per la cura del proprio binocolo: in considerazione del fatto che si tratta di uno strumento delicato, bisogna proteggerlo il più possibile dagli urti, ma bisogna averne cura anche in termini di pulizia. Per valutare il binocolo, in caso di acquisto, ci sono alcuni test che si possono effettuare, osservando oggetti lontani e puntiformi o di forma rettilinea e più vicini.

Sempre pensando ad un acquisto, possono essere molto utili sia le sigle che individuano le particolarità costruttive che caratterizzano ciascun binocolo, sia il glossario affiancato dalla terminologia inglese.

Nel corso dell'opera, inoltre, incontriamo l'elenco dei fondatori di alcune case di binocoli, ulteriore dato utile nel caso di un acquisto.

Daniela Molinari

### “Pillole di diritto d'autore per creativi” di S. Aliprandi

100 e più risposte su copyright, licenze, marchi, brevetti, siae... a cura di Simone Aliprandi. L'idea di questo libro nasce dal successo della rubrica “Chiedilo all'avvocato” che l'autore tiene da un paio d'anni sul sito Rokit.it (<http://aliprandi.blogspot.it/p/rokit.html>).

Musicisti, webmaster, fotografi, organizzatori di eventi culturali e in generale tutti gli operatori del mondo della creatività possono informarsi con questo libro sulle questioni giuridiche più frequenti relative alla tutela delle loro creazioni, agli adempimenti SIAE, alla gestione del branding e del licensing.

L'opera ha solo uno scopo informativo; i casi trattati sono casi ipotetici, rielaborati per essere resi abbastanza generici e utili a tutti.

Simone Aliprandi è autore di diversi libri relativi al diritto d'autore e le licenze Creative Commons.



**MAGAZINE**  
**MATEMATICAMENTE.IT** *Rivista trimestrale di matematica,  
per curiosi e appassionati  
distribuita gratuitamente sul sito*

**Anno 8 Numero 23 DICEMBRE 2014**

Registrazione n. 953 del 19.12.2006 – Tribunale di Lecce

ISIN ISSN 2035-0449

Direttore responsabile Antonio Bernardo  
antoniobernardo@matematicamente.it